БОЙМУРОД АЛИЕВ

ГЕОМЕТРИЯ

(ибтидои стереометрия)
китоби дарсӣ барои синфи 10

Вазорати маорифи Ҷумҳурии Тоҷикистон
ба чоп тавсия кардааст

ДУШАНБЕ – 2011

ББК 22.151я72
А - 49

Алиев Боймурод
Геометрия (ибтидои стереометрия), китоби дарсӣ барои синфи 10. «Офсет», Душанбе. Соли 2011, 172 саҳифа.

Ҷадвали истифодаи иҷоравии китоб

№	Ному насаби хонанда	Синф	Соли хониш	Ҳолати китоб (баҳои китобдор)	
				Аввали сол	Охири сол
1					
2					
3					
4					

Муаллимони мӯҳтарам

Хоҳишмандем фикру мулоҳизаҳои худро оид ба мазмуни китоби мазкур ба нишонии 734024, ш. Душанбе, кӯчаи Айнӣ, 45, Пажӯҳишгоҳи рушди маорифи Академияи таҳсилоти Ҷумҳурии Тоҷикистон ирсол намоед.

ISBN 978-99947-62-26-2

САРСУХАН

Китоби мазкур аз рӯи «Барномаи геометрия барои синфҳои 10-11» (2011), ки онро Вазорати маорифи Ҷумҳурии Тоҷикистон ҳамчун барномаи таълимии давраи гузариш ба мактаби 12-сола маъқул донистааст, бо назардошти Консепсияи миллии маълумот, талаботи Стандарти давлатии маълумот аз математика, навишта шудааст. Амалан мундариҷаи китоб аз доираи барномаи геометрия васеътар буда, қариб тамоми маводи таълимиро аз фанни геометрия барои синфи 10-уми мактабҳои тамоили табиию риёзӣ дар бар мегирад. Китобро инчунин дар гимназияҳо, литсейҳо ва литсейҳои муштарак ба сифати китоби дарсӣ низ истифода кардан мумкин аст.

Китоб аз 7 параграф иборат аст. Дар параграфҳои 1-4-и он аксиомаҳои стереометрия ва алоқаи онҳо бо аксиомаҳои планиметрия, ҷойгиршавии байниҳамдигарии нуқтаҳо, хатҳои рост ва ҳамвориҳо, тавсифҳои гуногуни ин ҷойгиршавиҳо ва алоқаи байни онҳо (параллелӣ; перпендикулярӣ; масофаи байни нуқтаҳо, хатҳои рост, ҳамвориҳо; алоқаи байни муносибатҳои параллелӣ ва перпендикулярӣ; кунҷи байни хатҳои рост ва ҳамвориҳо) баён карда шудааст. Ин мавод як қисми ибтидои стереометрияро ташкил дода, қисми душворфаҳми геометрияи мактабӣ аст. Душвориаш дар он зоҳир мегардад, ки дарки мафҳумҳо, тасвияҳо ва исботи онҳо сатҳи баланди тасаввуроти фазогӣ доштанро талаб карда, масъалаҳояш асосан ҳисобӣ нестанд. Яъне ҳалли масъалаҳо аз сохтанҳо ва исботҳо иборат мебошад.

Мувофиқи методологияи таълими ҳозира, ки дар мактабҳои Тоҷикистон амал мекунад, дар китоб параллелӣ ва перпендикулярии хатҳои рост на ҳамҷоя, балки дар алоҳидагӣ муоина карда мешавад. Бо ибораи дигар, қисми аффиннии ибтидои стереометрия (геометрияи параллелӣ ва буриши хатҳои рост бо ҳамвориҳо) аз қисми метрикии он (геометрияи перпендикулярӣ, масофаҳо ва кунҷҳо) ҷудо карда шудааст. Ҳангоми чунин ҷудокунӣ методҳои ҳалли масъалаҳои аффиннӣ аз метрикӣ фаҳмотар ва дастрас мегарданд. Дигар ин ки ҳангоми баёни масъалаҳои стереометрӣ маводи планиметрие, ки барои дарк кардани он зарур аст хотирнишон карда мешавад. Бар замми ин дар китоб ба монандии (шабоҳати) маводи ҳар ду қисми геометрия диққати махсус дода мешавад.

Дар параграфҳои 5-6 чунин мафҳумҳо ба монанди координатаҳои нуқта, масофаи байни ду нуқта, координатаи буриш ва ҷойгиршавии ду хати рост, табдилдиҳӣ, вектор, дарозии вектор, зарби адад бар вектор, зарби скалярии векторҳо ва ғайраҳо, ки онҳо дар синфи 8 дар ҳамворӣ дохил ва омӯхта шуда буданд, дар фазо паҳн карда мешаванд.

Дар параграфи 7 доир ба бисёррӯяҳо маълумоти ибтидоӣ оварда мешавад. Пункти 20-и ин параграф маводи дар пункти 3-и параграфи 1 бударо пурра мекунад. Тарзи ҳисоби масоҳат ҳои сатҳи паҳлуӣ ва пурра, инчунин ҳаҷми ҷисмҳои одитарини геометрӣ ба мисли призма, паралелепипед, куб ва пирамида дар ҳамин ҷой баён карда шудааст. Мувофиқи барномаи давраи гузариш омӯзиши буришҳо дар бисёрруяҳо ба синфи 11 гузаронида мешавад. Бинобар ин дар мактабҳои таҳсилоти умумӣ (на дар тамоилии табиӣ – риёзӣ) назарияи буришҳоро дар аввал аз мадди назар сокит кардан мункин аст.

Қисми назарявии ҳар як пункт бо саволҳои назоратӣ ба охир мерасад. Ба мақсади нишон додани татбиқи назария дар ҳар як пункт, ғайр аз пункти 1, ҳалли якчанд масъала оварда мешавад. Масъалаҳои барои ҳалли мустақилона пешбинӣ шуда, дар ҳар як пункт миқдоран каме зиёданд, бинобар ин на ҳар талаба барои ҳалли ҳамаи онҳо фурсат меёбад. Ба ин саъй кардан ҳам лозим нест. Пиндошта мешавад, ки бо назардошти қобилият вазифаи хонагӣ фардӣ хоҳад буд. Масъалаҳое, ки ҳаллашон каме мураккаб аст бо аломати* нишона шудаанд.

Ҳар як пункт бо масъалаҳо барои такрор ба охир мерасад. Масъалаҳои стереометрии ин қисм бо истифодаи назарияи пунктҳои пешина ҳал мешаванд. Масъалаҳои планиметрӣ чун қоида шабоҳати стереометриро надоранд. Ин масъалаҳоро бо мақсади фаромӯш нашудани маводи синфҳои 7-9 ва тайёрӣ ба олимпиадаҳо ва имтиҳонҳои дар пеш буда пешниҳод кардаем.

Яке аз талаботҳои Стандарти давлатии маълумоти умумӣ дар Тоҷикистон донистани осори илмии ниёгон аст. Бо ҳамин мақсад дар китоб маълумоти мухтасари таърихӣ оварда шудааст, ки дар он ба натиҷаҳои чандин нобиғаҳои илми Шарқ, алалхусус Осиёи Марказӣ доир ба параллелӣ ва перпендикулярӣ дар ҳамворӣ ва фазо диққати асосӣ дода мешавад. Мавҷуд будани чунин мавод ба хонанда аз умумибашарӣ будани натиҷаҳои илмӣ гувоҳӣ дода, боиси дарки ифтихор ва хештаншиносии ӯ мегарданд.

Сохтори китоб айнан сохтори китобҳои дарсии чопшудаи «Алгебра»-и синфҳои 7-11-ро мемонад. Ягонагии сохтори китобҳои дарсии фанҳои алгебраю геометрия омӯхтани математикаро осонтар мекунад.

Ҳангоми навиштани китоб чунин китобҳои дарсӣ ва методӣ, ба мисли «Геометрия, 7-11» (муал. А.В. Погорелов, 1991), «Геометрия в 9 классе» (муал. А.Н. Земляков, 1988), «Элементарная геометрия» (муал. А.П. Киселев, 1980), «Геометрия для 9-10 классов» (муал. Александров А.Д. ва диг., 1988), «Элементарная геометрия» (муал. А.Г. Болтянский, 1985), «Сборник задач по геометрии для 9-10 классов» (муал. В.А. Гусев ва диг., 1977), «История математики в школе: 9-10 классы» (муал. Г.И. Глейзер, 1983), ки онҳоро нашриёти «Просвещение»-и Маскав чоп кардааст, истифода шудаанд. Баъзе масъалаҳои барои мустақилона ҳал кардан пешниҳодшуда ва чор масъалаи ҳалшуда, ки дар ҳалли онҳо паҳлӯҳои маводи назариявӣ ниҳоят назаррасанд, яъне характерноканд, (масалан, масъалаи 2-и пункти 12), аз ҳамин китобҳо гирифта шудаанд. Ин мумкин аст, чунки китоби дарсӣ маводи таълимӣ-методӣ аст, на илмӣ.

Муаллиф

§1. АКСИОМАҲОИ СТЕРЕОМЕТРИЯ ВА НАТИҶАҲО АЗ ОНҲО

1. Фанни стереометрия. Мафҳумҳои асосии он

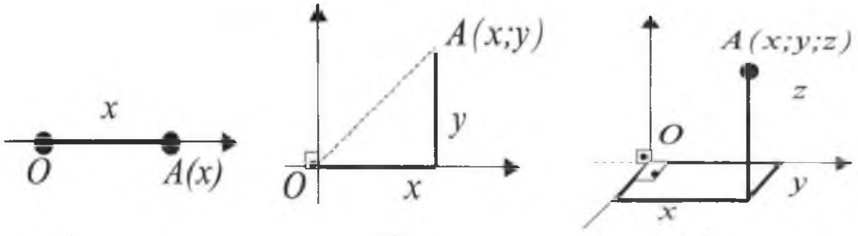
Мо аллакай **планиметрия** – қисми геометрияро, ки дар он фигураҳо дар ҳамворӣ омӯхта мешаванд, медонем (Калимаи planimetria аз решаи лотинии plenum - сатҳи ҳамвор, ҳамворӣ ва бандаки юнонии meтereo – чен мекунам иборат аст). Мафҳумҳои асосии планиметрия – **нуқта** ва **хати рост**, инчунин **аксиомаҳои** онро истифода карда, хосиятҳо ва формулаҳоро барои фигураҳои ҳамвор, ба монанди кунҷ, секунҷа, чоркунҷа (параллелограмм, трапетсия), бисёркунҷа, давра, доира ҳосил карда будем.

Акнун ба омӯхтани қисми дигари геометрия – **стереометрия** (аз калимаи юнонии stereos-фазогӣ (stereon-ҳаҷм) ва metreo-чен мекунам) шурӯъ менамоем. Дар ин қисм **фигураҳои фазогӣ**, яъне фиғураҳое, ки онҳоро дар як ҳамворӣ ҷойгир кардан мумкин нест, омӯхта мешаванд. Худи ҳамворӣ, ки дар планиметрия ҳамаи фигураҳо дар он ҷойгир буданд, дар стереометрия танҳо яке аз фигураҳои имконпазир мегардаду халос.

Стереометрия шакл, андоза ва ҷойгиршавии (вазъияти) байниҳамдигарии фигураҳои фазогиро меомӯзад. Дар айни ҳол ҳамаи дигар хосиятҳои фигураҳо ба эътибор гирифта намешаванд. Масалан, доир ба куби теғааш *5см* ё параллелепипеди сатҳаш *18см²* буда мулоҳиза рондан мумкин аст, вале дар геометрия доир ба куби сиёҳ ё параллелепипеди оҳанӣ сухан рондан мумкин нест, чунки ҷисмҳои геометрӣ дорои чунин хосиятҳо нестанд.

Бар хилофи ҳамвории дученака (ё хати рости якченака), фазо, ки дар стереометрия омӯхта мешавад, **сеченака** мебошад. Ин тасдиқро маънидод менамоем.

Дар хати рост (расми 1, *а*) аз нуқтаи ибтидоии *О* ба чап ва ба рост қад-қади ин хат ҳаракат кардан мумкин аст. Яъне мавқеъи (ҷои) ҳар гуна нуқтаи *А* бо як адади мусбат ё манфӣ (вобаста ба самти ҳаракат), ки **координатаи** ин нуқта ном дорад, муайян карда мешавад.



а) б) в)

Расми 1

Дар ҳамворӣ (расми 1, *б*) аз нуқтаи ибтидоӣ қад-қади ду хатҳои рости перпендикуляр ба чапу рост ва ба болою поён ҳаракат кардан мумкин аст. Мавқеъи ҳар гуна нуқта бо ду адад тавсиф (муайян) карда мешавад. Ин ададҳо бузургии ҷойивазшавиро қад-қади ин хатҳо ба рост (чап) ва ба боло (ба поён) ифода менамоянд. Дар фазо бошад (расми 1, *в*) аз нуқтаи *O* се самти ҷуфт-ҷуфт перпендикуляри ҷойивазшавӣ мавҷуд аст: ба чапу рост, ба болою поён, ба пешу қафо.

Ҳанӯз ба омӯзиши хосиятҳои фигураҳои геометрӣ шурӯъ накарда бошем ҳам, аммо, масалан, чӣ будани куб ё кураро нағз тасаввур карда метавонем. Вале дар геометрия доир ба фигура танҳо ҳамон вақт сухан рондан мумкин аст, агар таърифи он дода шуда бошад. Моҳияти ҳар гуна таъриф, чӣ тавре маълум аст, аз он иборат мебошад, ки мафҳуми муайяншаванда (масалан, квадрат) бо ёрии мафҳуми аллакай муайян буда (масалан, ромб ё росткунҷа) тавсиф карда мешавад. Дар навбати худ мафҳуми «аллакай муайянбуда» бояд бо ёрии мафҳумҳои аз он пеш муайян кардашуда тавсиф шавад (масалан, ромб бо ёрии параллелограмм) ва ҳоказо. Аммо миқдори фигураҳои геометрӣ беохир нест. Бинобар ин охири охирон мо ба ҳолате дучор меоем, ки фигураи ба он ҳаволашаванда (такяшаванда) вуҷуд надорад.

Барои ҳамин маҷбурем, баъзе фигураҳоро бетаъриф қабул намоем.

Мафҳумҳое, ки ин фигураҳоро ифода мекунанд (чун қоида содатаринашонро), дар геометрия мафҳумҳои асосӣ меноманд. Ин мафҳумҳо бетаъриф оварда (муоина) мешаванд, вале аз ҳаёти ҳаррӯза ҳамаи мо доир ба онҳо тасавввуроти аниқ дорем.

Фаҳмост, ки ба ҳар муносибат низ бояд таъриф дода шавад. Ваъз дар ин ҷо ҳам айнан мисли ҳолати таърифи фигураҳои геометрӣ мебошад: муносибатҳое пайдо мешаванд, ки онҳоро таъриф додан номумкин аст ва маҷбурем баъзе муносибатҳоро бе таъриф қабул намоем.

Муносибатҳои **«ҷойгир будан»**, **«бурида шудан»**, **«баробар будан»**, **«тааллуқ доштан»**, низ мафҳумҳои асосии стереометрия ҳисоб мешаванд. Онҳо зоҳиран айнан фаҳмо ҳисоб карда мешаванд, бинобар ин таъриф надоранд, яъне мафҳумҳои ибтидоианд.

Агар нуқтаи A ба ҳамвории α тааллуқ дошта бошад (расми 2, *б*), он гоҳ мегӯянд, ки ҳамвории α аз рӯи нуқтаи A мегузарад ва рамзӣ менависанд: $A \in \alpha$. Навиштаҷоти $A \notin \alpha$ нишон медиҳад, ки нуқтаи A ба ҳамвории α тааллуқ надорад.

Агар ҳар як нуқтаи хати рости a ба ҳамвории α тааллуқ дошта бошад (расми 2, *в*), он гоҳ мегӯянд, ки хати рост дар ҳамворӣ ҷойгир аст ва $a \subset \alpha$ менависанд. Навиштаҷоти $a \not\subset \alpha$ маънои онро дорад, ки хати рости a дар ҳамвории α ҷойгир нест, яъне ақаллан як нуқтаи хати рост ба ҳамворӣ тааллуқ надорад.

Агар хати рости a ва ҳамвории α танҳо якто нуқтаи умумӣ дошта бошанд (расми 2, *г*), он гоҳ мегӯянд, ки ин хати рост ҳамвориро мебурад.

Агар хати рости a ба ду ҳамвории гуногун α ва β таалуқ дошта бошад, (расми 2, *д*) он гоҳ мегӯянд, ки ин ҳамвориҳо аз рӯи хати рости a бурида мешавад (ҳамдигарро мебуранд).

Оянда дар расмҳо қисми хати рост ё ҳамворӣ, ки ба чашм аён нест, бо хати рах-рах ифода карда мешавад (ниг. ба расми 2, *г*) ё *д*)).

---

1. Мафҳумҳои асосии планиметрияро номбар кунед. **2.** Мафҳумҳои асосии стереометрияро як-як хотирнишон намоед. **3.** Стереометрия чиро меомӯзад? **4.** Сеченака будани фазоамонро чӣ тавр фаҳмондан мумкин аст? **5.** Муносибатҳои ибтидои стереометрияро номбар намоед.

---

1. Кадоме аз ин фигураҳо ё ҷисмҳо дар ҳамворӣ ҷойгир нестанд: секунҷа, миз, порча, давра, параллелепипед, китоб, доира, кура, куб, квадрат, телевизор, трапетсия?

2. Ҳамвории α-и дорои нуқтаи B-ро тасвир кунед. Инро бо истифодаи рамзи тааллуқ доштан нависед.

3. Хати рости b дар ҳамвории β ҷойгир аст. Инро рамзӣ нависед.

4. Хати рост ҳамвориро дар нуқта мебурад. Нақшаи мувофиқро кашида, онро рамзӣ нависед.

5. Маълум, ки ду нуқтаи хати рости a дар ҳамвории α ҷойгир аст. Доир ба ин хати рост чӣ гуфтан мумкин аст? Нақшаи мувофиқро кашед.

6. Ду ҳамворӣ ду нуқтаи умумӣ доранд. Доир ба хати росте, ки ин нуқтаҳоро пайваст мекунад чӣ гуфтан мумкин аст? Нақшаи мувофиқро кашед.

7. Рӯяи параллелепипед ҳамворӣ шуда метавонад? Қисми ҳамворӣ чӣ?

8. Ҳамворӣ фазоро ба чанд қисм ҷудо мекунад?

9. Ду ҳамворие, ки ҳамдигарро мебуранд, фазоро ба чанд қисм ҷудо менамоянд?

Масъалаҳо барои такрор

10. Нуқтаҳои A, B, C дар як хати рост ҷойгиранд. Дарозии порчаи BC-ро ёбед, агар $AB=3,2м$, $AC=4,4м$ бошад. Масъала чандто ҳал дорад?

11. Чорто хатҳои рости a, b, c, d дода шудаанд. Маълум, ки хатҳои a, b, c дар як нуқта бурида мешаванд. Хатҳои b, c, d низ дар як нуқта бурида мешаванд. Исбот кунед, ки ҳамаи чор хатҳои рости додашуда аз рӯи як нуқта мегузаранд.

12. Кунҷҳои назди асоси секунҷаи баробарпаҳлу α чунинанд, ки $tg\alpha = 4$ аст. Масоҳати ин секунҷа 25 $см^2$ мебошад. Дарозии асоси ин секунҷаро ёбед.

13. Хати миёнаи трапетсияи баробарпаҳлу, ки дар атрофи доира кашида шудааст, ба 68 *см* баробар аст. Радиуси ин доираро ёбед, агар асоси поёнии трапетсия аз асоси болоиаш 64 *см* зиёд бошад.

2. Аксиомаҳои стереометрия ва алоқаи онҳо бо аксиомаҳои планиметрия. Натиҷаҳо аз аксиомаҳои стереометрия

I. Мисли планиметрия дар стереометрия ҳам хосиятҳои фигураҳои геометрӣ бо тарзи исбот кардани тасдиқоти ба онҳо мувофиқ (теоремаҳо) муқаррар карда мешаванд. Ҳар гуна исбот бошад аз муҳокимарониҳое иборат аст, ки онҳо тасдиқоти навро ба тасдиқоти аллакай исботшуда меоранд. Барои ҳамин дар ин ҷо ҳам вазъият айнан ҳолати таърифи мафҳумҳои геометриро мемонад: мо ба тасдиқоти аввалине меоем, ки онҳоро исбот кардан мумкин нест, чунки ҳангоми исботи онҳо чизе нест, ки ба он истинод (такя) намоем.

Чунин тасдиқоти аввалин (чун қоида ниҳоят сода) аксиомаҳо ном доранд ва дурустии онҳо бе исбот қабул карда мешавад. Дар геометрия ба сифати аксиомаҳо тасдиқоте қабул карда мешаванд, ки онҳо ба фигураҳои асосии геометрӣ хосанд ва барои мушоҳидакунанда амалан возеҳанд.

Чи тавре дар пункти 1 қайд кардем, фигураҳои асосӣ дар фазо нуқта, хати рост ва ҳамворӣ мебошанд. Аксиомаҳоеро, ки хосиятҳои асосии нуқта ва хати ростро дар як ҳамворӣ ифода мекарданд, ҳангоми ба омӯзиши планиметрия шурӯъ намудан дохил карда будем. Дар фазо дохил кардани фигураи нави асосӣ – **ҳамворӣ** васеъ кардани ин аксиомаҳоро талаб мекунад. Ин аксиомаҳо хосиятҳои ҳамвориҳо, алоқамандии онҳоро бо ду фигураи дигари асосии стереометрия – нуқта ва хати рост ифода менамоянд. Ин аксиомаҳо инҳоанд:

C_1. Ҳамворӣ чи хеле ки набошад, нуқтаҳое ҳастанд, ки ба ин ҳамворӣ тааллуқ доранд ва нуқтаҳое ҳастанд, ки ба он тааллуқ надоранд (расми 3).

C_2. Се нуқтаи дар як хати рост ҷойгир набуда, ҳамвориро яккимата муайян мекунад (расми 4).

Мазмуни ин аксиома аз он иборат аст, ки агар мо се нуқтаи дар як хати рост ҷойгир набударо дошта бошем, он гоҳ аз рӯи онҳо ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст ва фақат якто. Агар ин нуқтаҳо дар як хати рост ҷойгир бошанд он гоҳ аз болои онҳо миқдори беохири ҳамвориҳоро гузаронидан мумкин аст. Алалхусус, аз рӯи хати рости додашуда миқдори беохири ҳамвориҳоро гузаронидан мумкин аст.

дар бораи хатҳои рост ва нуқтаҳои фазо меравад. Масалан, дар аксиомаи P_2 нуқтаҳо дар ҳамвориҳои гуногун ҷойгир шуда метавонанд. Мазмуни ин ду аксиома дар расмҳои 7 ва 8 акс ёфтаанд. Чи тавре дида мешавад аксиомаи C_1 ба аксиомаи P_1 ва C_2 ба P_2 монанд аст. Дар C_1 хати рост ба ҳамворӣ ва дар C_2 ду нуқтаи дар P_2 буда ба се нуқтаи дар як хати рост воқеъ набуда иваз карда шудаанд.

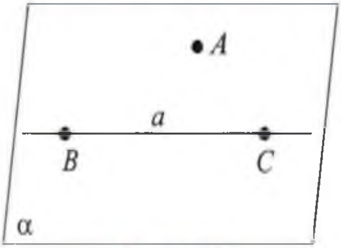

Расми 7


Расми 8

Дар оянда тасвияи дигар аксиомаҳои планиметрия дар ҷои зарурӣ бо назардошти фазо муҳокима шуда, баъд истифодаи онҳо нишон дода хоҳад шуд. Масалан, ниг. ба саҳ. 28 - 29.

II. Аксиомаҳои $C_1 - C_4$ имконият медиҳанд, ки дар фазо *сохтанҳо* иҷро карда шаванд. Ин сохтанҳо аз гузаронидани ҳамвориҳо иборат аст. Аксиомаи C_2 тасдиқ мекунад, ки се нуқтаи дар як хати рост нахобида ҳамвориро яккимата муайян мекунад. Пурсида мешавад, боз чӣ тавр (бо ёрии фигураҳои содатарин – хати рост ва нуқта) ҳамвориро яккимата муайян кардан (додан) мумкин аст? Ҷавобҳоро дар шакли теоремаҳо меорем.

Теоремаи 1. Аз рӯи хати рост ва нуқтаи дар он ҷойгир набуда ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст ва фақат якто.



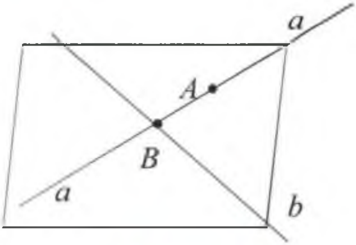
Расми 9

Исбот. Бигзор *a* хати рости додашуда, *A* нуқтаи дар *a* ҷойгир набуда мебошанд. Нуқтаҳои *B* ва *C*-ро, ки ба *a* тааллуқ доранд мегирем (расми 9). Нуқтаҳои *A, B, C,* ки дар як хати рост намехобанд, мувофиқи аксиомаи C_2 ҳамвории *α*-ро муайян мекунанд. Ин ҳамворӣ нуқтаҳои *B* ва *C*-и хати *a*-ро дар бар мегирад. Пас мувофиқи аксиомаи C_3 хати рости *a* дар ҳамвории *α* ҷойгир аст. Ҳамин тариқ, хати рости *a* ва нуқтаи дар он нахобидаи *A* ҳамвории *α*-ро муайян мекунанд. Ягона будани ин ҳамворӣ аз аксиомаи C_2 бармеояд. Теорема исбот шуд.

Эзоҳи 1. Аз рӯи ду нуқта ё якчанд нуқтаи дар як хати рост ҷойгир буда ва ё як хати рост миқдори зиёди (беохири) ҳамвориҳоро гузаронидан мумкин аст (ниг. ба шарҳи аксиомаи C_2). Кифоя аст дурустии ин тасдиқро дар мисоли хати рости a нишон диҳем. Берун аз ин хат нуқтаи A-ро интихоб мекунем (аксиомаи P_1) ва ба хати росту ин нуқта теоремаи 1-ро татбиқ менамоем. Ҳамвории α-ро ҳосил мекунем, ки аз рӯи ин хати рост мегузарад. Барои нишон додани мавҷудияти дигар ҳамвории аз рӯи ин хат мегузаштагӣ, боз берун аз ҳамвории α нуқтаи C-ро мегирем (аксиомаи C_1). Нуқтаи C дар хати рости a ҷойгир нест, бинобар ин мувофиқи теоремаи 1 аз рӯи онҳо ҳамвории β-ро мегузаронем. Ҳамвории α ва β гуногунанд, чунки нуқтаи C-и ҳамвории β дар ҳамвории α ҷойгир нест. Ҳар дуи ин ҳамвориҳо аз рӯи хати рости a мегузаранд. Сабаби беохир будани миқдори чунин ҳамвориҳо ихтиёрӣ будани интихоби нуқтаи $C \notin \alpha$ мебошад.

Теоремаи 2. Аз рӯи ду хати рости ҳамдигарро мебуридагӣ ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст ва фақат якто.

Исбот. Бигузор a ва b ду хати рости ҳамдигарро мебуридагӣ ва A нуқтаест, ки дар a ҷойгир буда, ба b тааллуқ надорад (расми 10). Мувофиқи теоремаи 1 хати b ва нуқтаи A ҳамвории α-ро яққимата муайян мекунанд.



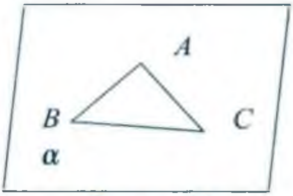
Расми 10

Аз сабаби он ки b дар α ҷойгир аст, нуқтаи буриши ин хатҳо B низ ба α мутааллиқ аст. Нуқтаҳои A ва B-и хати a дар α ҷойгиранд, пас мувофиқи аксиомаи C_3 ҳамвории α ин хатро дар бар мегирад. Инак, α ҳамвории ягонаи матлуб аст. Теорема исбот шудааст.

Мо ба саволи (пеш аз баёни шарти теоремаи 1) гузоштаамон ҷавоб ҳосил кардем. Ҳамвориро бо: 1) се нуқтаи дар як хати рост ҷойгирнабуда (аксиомаи C_2); 2) хати рост ва нуқтаи дар он ҷойгирнабуда (теоремаи 1); 3) бо ду хати рости ҳамдигарро мебуридагӣ (теоремаи 2) яққимата муайян кардан мумкин аст. Аз рӯи як хати рост ё се нуқтаи дар як хати рост ҷойгирбуда миқдори беохири ҳамвориҳоро гузаронидан мумкин аст.

Эзоҳи 2. Ҳангоми исботи теоремаҳои 1 ва 2 аксиомаи C_1 истифода нашудааст. Пурсида мешавад, ки мумкин ин аксиома лозим нест? Амалан, аксиомаи C_1 қатъиян муҳимтарин **аксиомаи фазогӣ** мебошад: маҳз аз он дар фазо мавҷудияти ҳамвориҳо ва хатҳои рости ҳамдигарро мебуридагӣ, инчунин дигар фигураҳои дар як ҳамворӣ ҷойгир набудагӣ бармеояд. Аксиомаи C_1-ро мо барои нишон додани дурустии тасдиқоти дар эзоҳи 1 буда истифода кардаем.

Масъалаи 1. Нишон медиҳем, ки тарафҳои секунҷа дар як ҳамворӣ ҷойгиранд.



Расми 11

Ҳал. Бигузор секунҷаи ABC дода шудааст (расми 11). Тарафҳои AB ва AC хатҳои ҳамдигарро мебуридагианд. Пас мувофиқи теоремаи 2 аз рӯи онҳо якто ҳамвории α-ро гузаронидан мумкин аст.

Ду нуқтаи тарафи BC дар ҳамвории α ҷойгир аст. Пас мувофиқи аксиомаи C_3 тарафи BC дар α ҷойгир аст. Ҳамин тариқ, ҳар се тарафи секунҷа дар як ҳамворӣ мехобанд.

Масъалаи 2. Маълум, ки чор нуқта дар як ҳамворӣ намехобанд. Муайян мекунем, ки сетои дилхоҳи онҳо дар як хати рост ҷойгир шуда метавонанд ё на?

Ҳал. Фарз мекунем, ки сетои онҳо дар як хати рост ҷойгиранд. Агар нуқтаи чорум низ дар ин хати рост хобад, он гоҳ аз рӯи онҳо миқдори беохири ҳамвориҳоро гузаронидан мумкин аст. Ин бошад ба шарти масъала зид аст. Рафту нуқтаи чорум дар ин хати рост нахобад, он гоҳ мувофиқи теоремаи 1 ягона ҳамворие гузаронидан мумкин, ки ин хати рост ва ин нуқтаро, яъне ҳар чор нуқтаро, дар бар мегирад. Боз зиддият ба шарти масъала ҳосил шуд.

Ҷавоб. На.

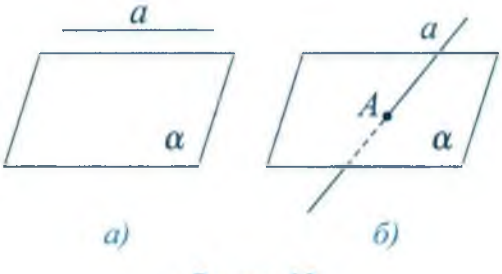
Масъалаи 3. Нишон медиҳем, ки агар хатҳои рости AB ва CD дар як ҳамворӣ ҷойгир набошанд, он гоҳ хатҳои рости AC ва BD низ дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд.

Ҳал. Фарз мекунем, ки тасдиқ нодуруст аст ва хатҳои рости AC ва BD дар як ҳамвории α ҷойгиранд. Аз ин бармеояд, ки нуқтаҳои A, B, C, D дар α ҷойгиранд. Ба хатҳои рости AB ва CD аксиомаи C_3-ро татбиқ намуда ҳосил мекунем, ки онҳо дар ҳамвории α, яъне дар як ҳамворӣ ҷойгиранд. Ин бошад ба шарти масъала зид аст.

III. Акнун маълумоти аввалинро нисбати ҷойгиршавии байниҳамдигарии фигураҳои асосии (ибтидоии) стереометрия – нуқта, хати рост ва ҳамворӣ меорем (Дар ин бора дар дарсҳои оянда маълумоти муфассал оварда мешавад). Чи тавре аллакай қайд шуд, ҷойгиршавии байниҳамдигарии ду ҳамвориҳои гуногун бо аксиомаи C_4 муайян карда мешавад: агар ин ҳамвориҳо нуқтаи умумӣ дошта бошанд, он гоҳ аз рӯи хати росте, ки ин нуқтаро дар бар мегирад, бурида мешаванд. Дар ин ҳолат онҳо **бо ҳамдигар буридашаванда** (ё кӯтоҳ **буридашаванда**) номида мешаванд. Мисоли чунин ҳамвориҳо ҳамвориҳое, ки онҳоро ҳангоми асоснок кардани тасдиқи дар эзоҳи 1 буда сохтем, шуда метавонанд. Баъд, аз аксиомаҳои P_1 ва P_2 бармеояд, ки барои ҳар гуна хати рост дар фазо хати рости онро мебуридагӣ вуҷуд дорад.

Ҳамин тариқ, ҷойгиршавии байниҳамдигарии ду хати рост (ду ҳамворӣ) чунин аст: **Ду хати рости (ҳамвории) гуногун ё нуқтаи умумӣ надоранд, ё дар як нуқта (аз рӯи як хати рост) ҳамдигарро мебуранд.**

Нисбати ҷойгиршавии байниҳамдигарии нуқта ва хати рост бошад, ду имконият вуҷуд дорад: **Ё нуқта ба хати рост тааллуқ дорад, ё ба он тааллуқ надорад.** Ҷойгиршавии байниҳамдигарии нуқта ва ҳамворӣ ҳам айнан ҳамин тавр аст. Ба масъалаи ҷойгиршавии байниҳамдигарии хати рост ва ҳамворӣ дар фазо аксиомаи C_3 ҷавоби пурра медиҳад: **Ҳамворӣ ва хати рости дар он ҷойгир набуда ё ҳамдигарро намебуранд, ё дар як нуқта бурида мешаванд** (расми 12).



а) б)

Расми 12

1. Аксиомаҳои стереометриро баён карда, онҳоро шарҳ диҳед. 2. Теоремаро доир ба хати рост ва нуқта баён кунед (теоремаи 1). Ҳангоми исботи ин теорема кадом аксиомаҳо истифода мешаванд? 3. Аз рӯи ду нуқта, ё якчанд нуқтаи дар як хати рост ҷойгирбуда ва ё як хати рост чандто ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст? 4. Исбот кунед, ки ду хати рости ҳамдигарро мебуридагӣ ҳамвориро яккимата муайян мекунанд (теоремаи 2). Боз бо кадом тарзҳо ҳамвориро яккимата муайян кардан мумкин аст? 5. Вазъияти ҷойгиршавии байниҳамдигарии ду хати рост ва ду ҳамворӣ чӣ гуна аст? 6. Кадом аксиома доир ба ҷойгиршавии байниҳамдигарии хати рост ва ҳамворӣ ҷавоб медиҳад?

14. Исбот кунед, ки аз рӯи нуқтаи додашуда ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст ва дар айни ҳол на якто.

15. Исбот намоед, ки барои ҳар гуна хати рост дар фазо хати рости онро мебуридагӣ мавҷуд аст.

16. Барои ҳар гуна ҳамворӣ дар фазо хати рости онро мебуридагӣ мавҷуд аст. Инро исбот намоед.

17. Барои ҳар гуна хати рост дар фазо ҳамвории онро мебуридагӣ мавҷуд аст. Инро исбот кунед.

18. Исбот кунед, ки барои ҳар гуна ҳамворӣ дар фазо ҳамвории онро мебуридагӣ мавҷуд мебошад.

19. Дар фазо нуқтаҳои A ва B дода шудаанд. Хати ростеро, ки аз рӯи онҳо мегузарад созед.

20. Маълум, ки ҳамвориҳои α ва β ҳамдигарро мебуранд. Хати буриши онҳоро созед.

21. Нуқтаҳои A, B, C дар ҳар як ду ҳамвории гуногун ҷойгиранд. Исбот кунед, ки ин нуқтаҳо дар як хати рост ҷойгиранд.

22. Тарафи BC-и секунҷаи ABC дар ҳамвории α ҷойгир аст. M ва N мувофиқан нуқтаҳои тарафҳои AB ва AC мебошанд. Нишон диҳед, ки агар M дар α ҷойгир набошад, он гоҳ N низ дар α ҷойгир нест.

23. Исбот кунед, ки аз рӯи нуқтаи буриши ду хати рости додашуда, хати рости сеюмро гузаронидан мумкин аст, ки бо онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир нест.

24. Се ҳамвории ҷуфт-ҷуфти бо ҳамдигар буридашаванда дода шудааст. Исбот кунед, ки агар ду хати буриши ин ҳамвориҳо бурида шаванд, он гоҳ хати сеюми буриш аз нуқтаи буриши онҳо мегузарад.

25. Нуқтаҳои A, B, C ва D, ки дар як ҳамворӣ воқеъ нестанд, дода шудаанд. Чандто ҳамвориҳои гуногунро, ки аз рӯи сетои ин нуқтаҳо мегузаранд, сохтан мумкин аст?

26. Чор нуқта, ки сетоаш дар як хати рост ҷойгир нест, дода шудааст. Исбот кунед, ки хати рости аз рӯи ду нуқтаи дилхоҳи онҳо мегузаштагӣ бо хати росте, ки аз рӯи ду нуқтаи дигараш мегузарад, буриш надорад.

27. Исбот намоед, ки дар фазо се нуқтае вуҷуд дорад, ки онҳо дар як хати рост ҷойгир нестанд.

28.* Исбот кунед, ки дар фазо чор нуқтае мавҷуд ҳаст, ки онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд.

29. Порчаҳои AB, BC, CD, DA дода шудаанд. Дар айни ҳол M нуқтаи буриши порчаҳои AC ва BD аст. Нишон диҳед, ки порчаҳои додашуда дар як ҳамворӣ ҷойгиранд.

30. Нуқтаҳои A, B, C дар як хати рост ҷойгир нестанд. Нуқтаҳои D ва E мувофиқан миёнаҷои порчаҳои AC ва BC мебошанд. Исбот кунед, ки нуқтаҳои: 1) A, B, D; 2) C, D, E; 3) A, D, E дар як хати рост ҷойгир нестанд.

31. Маълум, ки нуқтаҳои A, B, C, D дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд. Исбот кунед, ки хатҳои рости AB ва CD ҳамдигарро намебуранд.

32.* Нуқтаҳои A, B, C, D дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд. Нуқтаҳои K ва M мувофиқан миёнаҷои порчаҳои AC ва BC мебошанд. Исбот кунед, ки хатҳои рости: 1) AC ва DK; 2) BD ва KM; 3) AD ва KM ҳамдигарро намебуранд.

33. Исбот кунед, ки дар фазо ду хати росте мавҷуданд, ки онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд.

34.* Хати рост дар ҳамворӣ ҷойгир аст. Исбот кунед, ки чунин нуқтаҳои ҳамворӣ мавҷуданд, ки онҳо ба хати рост тааллуқ надоранд.

35. Ҳамвории α фазоро ба ду нимфазо ин тавр ҷудо мекунад: нуқтаи $A\notin\alpha$-ро интихоб мекунем. Ҳамаи нуқтаҳои X-и фазоро, ки барояшон хати рости AX ҳамвориро намебурад, ба нимфазои якум мансуб ҳисоб менамоем. Рафту агар хати рости AX α-ро бурад, он гоҳ ба нимфазои дуюм. Исбот кунед, ки агар ду нуқта ба як зерфазо тааллуқ дошта бошад, он гоҳ порчаи онҳоро пайвасткунанда ҳамвории α-ро намебурад. Рафту агар нуқтаҳо ба зерфазоҳои гуногун тааллуқ дошта бошанд, он гоҳ ин порча ҳамвории α-ро мебурад.

Масъалаҳо барои такрор

36. Магар дар секунҷа медиана аз маркази давраи берункашида мегузарад?

37. Исбот кунед, ки баландиҳои секунҷа h_a, h_b, h_c ва радиуси давраи дарункашидаи он r нобаробарии $h_a + h_b + h_c \geq 9r$ – ро қаноат мекунонанд.

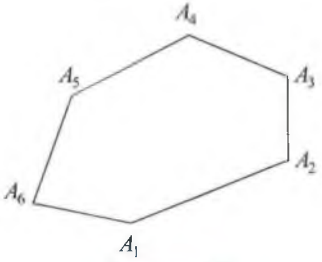
38. Исбот кунед, ки агар A, B кунҷҳои тези $\triangle ABC$ ва $\sin A \sin B > \frac{1}{2}$ бошад, он гоҳ кунҷи C ҳам тез аст.

39. Яке аз кунҷҳои секунҷаи росткунҷа ба миёнаи арифметикии ду кунҷи дигар баробар аст. Катетҳои секунҷаро ёбед, агар гипотенузаи он c бошад.

40. Магар дар секунҷа ҳамеша дуто: а) баландӣ; б) медиана; в) биссектриса ҳамдигарро мебуранд?

3. Мисолҳои фигураҳои фазогӣ. Буришҳо

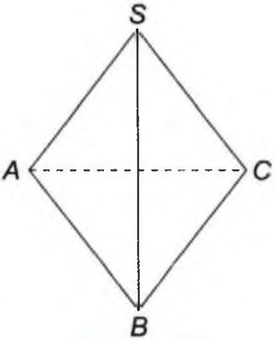
Чи тавре медонем бисёркунҷаҳо, ки қисми ҳамвории бо порчаҳои хатҳои рост маҳдудгашта мебошанд, фигураҳои одитарини планиметрия ҳастанд. Дар ин ҷо талаб карда мешавад, ки ин порчаҳои хатҳои рост ҳамдигарро намебуранд (расми 13). Масалан, секунҷа ва параллелограмм бисёркунҷа мебошанд.



Расми 13

Дар стереометрия фигураҳо дар фазо омӯхта мешаванд, ки онҳо **ҷисмҳо** ном доранд. Айёнӣ ҷисми геометриро ҳамчун қисми фазои бо ҷисми физикавӣ ҷудо карда шуда ва сатҳи маҳдуд дошта тасаввур кардан мумкин аст. Мисли бисёркунҷаҳо дар ҳамворӣ фигураҳои одитарин дар фазо **бисёррӯяҳо** мебошанд, ки сатҳи

Бисёррӯяе, ки дар натиҷаи нуқтаи додашударо бо нуқтаҳои бисёркунҷаи ҳамвор пайваст кардан ҳосил мешавад, пирамида ном дорад. Нуқтаи додашуда қуллаи пирамида, бисёркунҷаи ҳамвор асоси пирамида номида мешавад. Сатҳи пирамида аз асос ва рӯяҳои паҳлуӣ, ки секунҷаҳоанд, иборат аст. Хатҳое, ки қуллаи пирамидаро бо қуллаҳои асос пайваст мекунанд, теғаҳои паҳлуӣ ном доранд. Агар асоси пирамида n-кунҷа бошад, пирамидаро пирамидаи n-кунҷа меноманд. Дар расми 16 пирамидаи 5-кунҷа тасвир шудааст. Панҷкунҷаи $ABCDE$ асос, S қулла, SA, $SB,\ldots,SE$ теғаҳои паҳлуии он аст. Рӯяҳои паҳлуӣ секунҷаҳои ASB, $BSC,\ldots$, ESA мебошанд. Агар асоси пирамида секунҷа бошад, онро тетраэдр мегӯянд (аз ду калимаи юнонии *tetra* – чор ва *hedra* – асос, рӯя тартиб дода шуда, маъноаш чоррӯя аст). Тетраэдр дорои 4 рӯя ва 6 теғаю 4 қулла мебошад (расми 17). Агар ҳамаи теғаҳо баробар бошанд, он гоҳ тетраэдрро тетраэдри мунтазам меноманд.



Расми 17

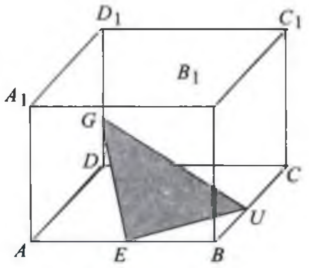
Акнун мафҳуми **буриши** бисёрррӯяро бо ҳамворӣ дар фазо муайян мекунем. Бигузор ҳамвории α дода шудаст. Ин ҳамворӣ фазоро ба ду нимфазо, бо ҳамон маъное, ки дар шарти масъалаи 35 оварда шудааст, ҷудо менамояд.

Таъриф. Агар ақаллан ду нуқтаҳои бисёррӯя дар нимфазоҳои гуногун ҷойгир бошанд, он гоҳ мегӯянд, ки ҳамвории α бисёррӯяро мебурад. Дар ин ҳолат α ҳамвории **буранда** ном дорад. Фигурае, ки ҳар як нуқтаи он ба бисёррӯя ва ҳамвории буранда тааллуқ дорад, **буриши бисёррӯя бо ҳамвории α** ё кӯтоҳ **буриш** номида мешавад.

Ду масъалаи бо буришҳо алоқаманд бударо ҳал мекунем.

Масъалаи 1. Буриши параллелепипеди $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ро бо ҳамворӣ, ки аз миёнаҷои теғаҳои AB, BC ва DD_1 мегузарад месозем.

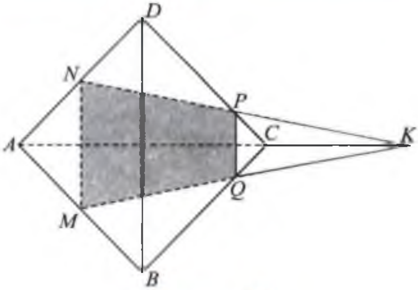
Ҳал. Миёнаҷои теғаҳоро бо E, U, G ишорат менамоем. Ин нуқтаҳо дар як хати рост ҷойгир нестанд. Мувофиқи



Расми 18

теоремаи 2 аз рӯи онҳо якто ҳамвории α мегузарад (расми 18). Нуқтаҳои E, U ба ҳамвории ABC ва ҳамвории бурандаи α тааллуқ доранд. Пас, тамоми хати рости EU ба α тааллуқ дорад, яъне EU хати буриши α бо ҳамвории ABC аст. Баъд, ҳамвории аз рӯи нуқтаҳои G, D, E мегузаштагиро дида мебароем. Ин ҳамворӣ ҳамвории α-ро аз рӯи хати рости GE мебурад. Порчаи GE қисми умумии ин ду ҳамворӣ ва параллелепипед мебошад. Нисбати нуқтаҳои D, G, U низ ҳамин тавр мулоҳиза ронда, ҳосил мекунем, ки секунҷаи EUG буриши матлуб аст. Масъала ҳал шуд.

Масъалаи 2. Дар теғаҳои AB, AD, CD-и тетраэдри $ABCD$ мувофиқан нуқтаҳои M, N, P чунон гирифта шудаанд, ки хати ростҳои NP ва AC паралел нестанд (расми 19). Буриши ин тетраэдро бо ҳамворие, ки аз рӯи ин се нуқта мегузарад месозем.



Расми 19

Ҳал. Ҳамвории аз рӯи нуқтаҳои M, N ва P мегузаштагиро бо α ишорат мекунем. Ин ҳамворӣ бо ҳамвории DAC нуқтаҳои умумии N ва P-ро дорост, барои ҳамин мувофиқи аксиомаи C_4 хати рости NP буриши онҳост.

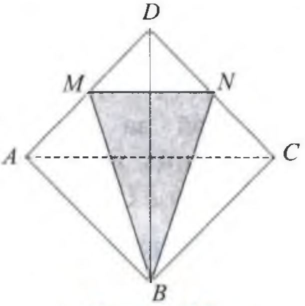
Айнан ҳамин тавр муқарар мекунем, ки порчаи NM буриши α бо рӯяи ADB аст. Нуқтаи M ба ҳамвории α ва ҳамвории ABC тааллуқ дорад. Барои сохтани хати буриши ин ду ҳамворӣ бояд боз як нуқтаи умумии онҳоро ёбем. Бигузор K нуқтаи буриши хати рости NP ва AC аст.

Хати рости MK-ро сохта мебинем, ки он теғаи BC-ро дар нуқтаи Q мебурад. Фаҳмост, ки нуқтаи Q ҳам ба α ва ҳам ба ҳамвории ABC тааллуқ дорад, яъне MQ хати буриши α ва рӯяи ABC аст. Буриши матлуб чоркунҷаи $MNPQ$ мебошад.

Баъзан дар масъалаҳо ғайри ёфтани буриш боз ҳисоби масоҳат ё периметри он талаб карда мешавад.

Масъалаи 3. Тетраэдри мунтазами $ABCD$, ки теғааш a аст, дода шудааст. Аз қуллаи B ва миёнаҷои теғаҳои AD, DC ҳамвории гузаронида шудааст. Периметри фигураеро, ки дар буриш ҳосил мешавад меёбем.

Ҳал. Ба осонӣ дида мешавад, ки буриши матлуб секунҷаи MNB аст (расми 20). Мувофиқи шарти масъла:



Расми 20

1) $AD = DC = AB = AC = BC = a$;

2) $AM = MD = DN = NC = \frac{1}{2}$.

Ёфтани $p = MN + MB + BN$ талаб карда мешавад. MN хати миёнаи ΔADC аст. Дар асоси хосияти хати миёна $MN = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$.

Дар тетраэдр рӯяҳои паҳлуӣ секунҷаҳои баробартарафанд, барои ҳамин медианаи BM-и ΔADB баландӣ аст, яъне ΔAMB росткунҷа мебошад.

Пас мувофиқи теоремаи Пифагор

$$AB^2 = AM^2 + MB^2, \; a^2 = \frac{a^2}{4} + MB^2.$$

Аз ин ҷо $MB^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$ ва $MB = a\frac{3}{2}$. Вале $BM=NB$, чунки ΔMBN баробарпаҳлӯ аст. Ҳамин тариқ,

$$p = MN + 2BM = \frac{a}{2} + \frac{a \; 3}{2} \cdot 2 = a\left(\frac{1}{2} + \; 3\right).$$

1. Бисёррӯя чист? Рӯя, теға ва қуллаи бисёррӯя чиҳоянд? **2.** Таърифи параллелепипеди росткунҷа (куб) ва пирамидаро (тетраэдро) оред. **3.** Чӣ гуна ҳамвории буранда номида мешавад? **4.** Кадом фигура буриш ном дорад? Оё вай ҳамвор набуда метавонад?

41. Бигузор $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеди росткунҷа аст. Исбот кунед, ки:

а) нуқтаи A_1 ба ҳамвории рӯяи $ABCD$ тааллуқ надорад;

б) хатҳои рости AB_1 ва AC_1 ҳамвории рӯяи $ABCD$-ро мебуранд;

в) ҳамвориҳои $ABCD$, ABB_1A_1, BCC_1B_1 ҷуфт-ҷуфт ҳамдигарро мебуранд;

г) хати рости A_1B_1 ҳамвории $ABCD$- ро намебурад;

д) ҳамвориҳои $ABCD$ ва $A_1B_1C_1D_1$ хамдигарро намебуранд;

е) хати рости A_1C_1 ҳамвории $ABCD$ – ро намебурад;

ж) нуқтаҳои: 1) A,B,C_1; 2) A_1,B_1,C дар як хати рост ҷойгир нестанд;

з) нуқтаҳои: 1) A,B,C,C_1; 2) A,B,C,D_1 дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд;

и) агар K ва M миёнаҷои теғаҳои AB ва BC бошанд, он гоҳ нуқтаҳои K,M,A_1,C_1 дар як ҳамворӣ ҷойгиранд.

42. Буриши параллелепипеди росткунҷаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ро бо ҳамворие, ки аз рӯи нуқтаҳои: 1) A,B_1,D_1; 2) A,C ва миёнаҷои теғаи DD_1 мегузарад, созед.

43. Буриши параллелепипеди росткунҷаро бо ҳамворие, ки аз рӯи ду теғаи паҳлуии ба як рӯя тааллуқ надошта мегузарад созед.

44. Нуқтаи E дар ҳамвории $A_1B_1C_1D_1$, хати рости a дар ҳамвории $ABCD$ ҷойгиранд. Буриши параллелепипеди росткунҷаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ро бо ҳамворие, ки аз рӯи хати рости a ва нуқтаи E мегузарад созед.

45. Нишон диҳед, ки буриши пирамида бо ҳамвориҳое, ки аз қуллаи он мегузаранд, секунҷаҳо мебошанд.

46. Буриши пирамидаро бо ҳамворие, ки аз қуллаи он ва ду нуқтаи додашудаи асос мегузарад созед.

47. Буриши пирамидаи секунҷаро бо ҳамворие, ки аз рӯи тарафи асоси пирамида ва нуқтаи додашудаи теғаи муқобили ин тараф мегузарад созед.

48. Буриши пирамидаи чоркунҷаро бо ҳамворие, ки аз рӯи тарафи асос ва нуқтаи яке аз теғаҳои паҳлуӣ мегузарад созед.

49. Дарозии теғаи куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ба a баробар аст. Масоҳати буриши кубро бо ҳамворие, ки аз миёнаҷои теғаҳои AB, BB_1 ва BC мегузарад ёбед.

50. Дарозии теғаи тетраэдри мунтазам ба *a* баробар аст. Буриши тетраэдрро бо ҳамворие, ки аз миёначои се теғаи аз як қулла фаровардашуда мегузарад созед. Периметр ва масоҳати буришро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

51. Порчаҳои *AB* ва *AC* ҳамвории α-ро мебуранд. Порчаи *BC* ҳамвории α-ро мебурад?

52. Дар давраи радиусаш *8см* хордаҳои ба ҳам перпендикуляри *AB* ва *CD* гузаронида шудаанд. Диаметрҳое, ки аз охирҳои хордаи *AB* гузаронида шудаанд, *CD*-ро ба се ҳиссаи баробар ҷудо менамоянд. Маълум, ки *AB=12см* аст. Дарозии хордаи *CD*-ро ёбед.

53. Маълум, ки диагоналҳои ду квадрат ба ҳамдигар баробаранд. Магар ин квадратҳо бо ҳам баробаранд?

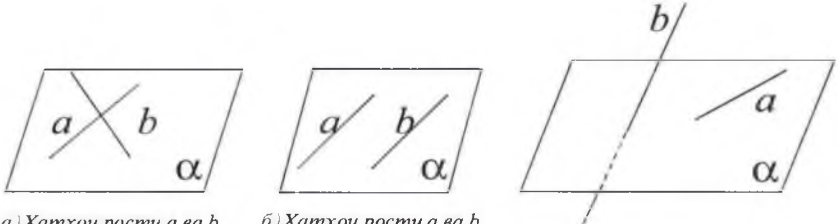
§2. ҶОЙГИРШАВИИ БАЙНИҲАМДИГАРИИ ХАТҲОИ РОСТ ВА ҲАМВОРИҲО

4. Ҷойгиршавии байниҳамдигарии ду хати рост. Хатҳои рости чиликӣ

Дар зерпункти II-и пункти 2 ҳамчун натиҷаҳои аксиомаҳо мо муқаррар намудем, ки дар фазо ду хати рости гуногуни *a* ва *b* ё ҳамдигарро мебуранд (дар як нуқта) ё нуқтаҳои умумӣ надоранд. Дар стереометрия ҳолати дуюм, бар хилофи планиметрия, ки дар он хатҳои рост параллел номида шуда буданд, ба ду зерҳолат ҷудо мешавад: хатҳои рост дар як ҳамворӣ ҷойгиранд ва хатҳои рост дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд.

Дар алоқамандӣ бо ҳамин таърифи зеринро дохил мекунем.

Таъриф. Ду хати рост дар фазо **параллел** номида мешаванд, агар онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир буда, ҳамдигарро набуранд. Хатҳои росте, ки ҳамдигарро намебуранд ва дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд, **чиликӣ** ном доранд. Ҳар се ҳолати ҷойгиршавии хатҳои рост дар расми 21 нишон дода шудааст.



а) Хатҳои рости a ва b ҳамдигаро мебуранд

б) Хатҳои рости a ва b параллел мебошанд

в) Хатҳои рости a ва b чилики мебошанд

Расми 21

Дар муҳити моро иҳота карда мисолҳои бисёре овардан мумкин аст, ки ҳамаи ин ҳолатҳоро онҳо акс мекунанд. Масалан, хатҳои буриши фарш ва шифти хона бо девор доир ба хатҳои параллел тасаввурот медиҳанд. Роҳи аз зери купрук мегузаштагӣ ва роҳи болои купрук тарҳи (шабеҳи) хатҳои чиликианд.

Хатҳои рости параллелро алоҳида дида мебароем. Ҳозир бо хатҳои рости чиликӣ машғул мешавем. Мувофиқи теоремаи 2 мебинем, ки хатҳои рости *a* ва *b* чиликӣ мешаванд, агар онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир набошанд (Дар таърифи хатҳои чиликӣ талаби ҳамдигарро набуридани онҳо зиёдатӣ аст!). Тасдиқи «хатҳои рости *a* ва *b* дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд» маънои онро дорад, ки ҳамворие мавҷуд нест, ки дар он ҳам *a* ва ҳам *b* ҷойгир бошанд.

Дар айни ҳол шумораи беохири ҳамвориҳо мавҷуданд, ки дар алоҳидагӣ ҳар кадоми ин хатҳои рост дар онҳо ҷойгир мебошанд (ниг. ба эзоҳи 1-и қисми II-и пункти 2).

Барои мустаҳкам кардани таърифи хатҳои рости чиликӣ масъалаи содаи зеринро ҳал мекунем:

Масъалаи 1. Исбот мекунем, ки агар хатҳои рости *a* ва *b* ҳамдигарро буранд, он гоҳ ҳар гуна ду хати рости онҳоро мебуридагӣ чиликӣ шуда наметавонанд.

Ҳал. Бигузор A,B аз a ва C,D аз b нуқтаҳои буриши хатҳои ростанд. Мувофиқи теоремаи 2 якто ҳамвории α мавҷуд аст, ки дар он a ва b ҷойгиранд. Пас нуқтаҳои A,B,C,D дар ҳамвории α ҷойгиранд. Аз рӯи аксиомаи C_3 хатҳои рости AC ва BD дар ҳамвории α ҷойгиранд, яъне чиликӣ нестанд.

Эзоҳ. Агар яке аз хатҳои рост аз нуқтаи буриши хатҳои рости *a* ва *b* гузарад, он гоҳ тасдиқи масъалаи 1 нодуруст аст (инро мустақилона исбот кунед).

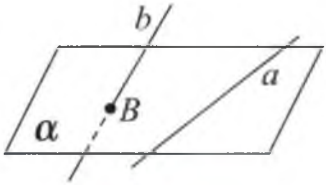
Акнун аломатҳои чиликӣ будани хатҳои ростро дар фазо меорем.

Аломати якум. Агар нуқтаҳои *A,B,C,D* дар як ҳамворӣ ҷойгир набошанд, он гоҳ хатҳои рости *AB* ва *CD* чиликианд.

Дар ҳақиқат, агар хатҳои рост чиликӣ набошанд, он гоҳ онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир мешаванд. Пас нуқтаҳои *A,B,C,D* низ дар як ҳамворӣ ҷойгир мешуданд, ки ин ба шарт зид аст.

Натиҷаи 1. Барои он ки чор нуқта – *A,B,C,D* дар як ҳамворӣ ҷойгир бошанд, зарур ва кифоя аст, ки хатҳои рости *AB* ва *CD* ё ҳамдигарро буранд, ё ки параллел бошанд ва ё ҳамҷоя шаванд.

Аломати дуюм. Агар яке аз ду хатҳои рост дар ҳамворӣ ҷойгир бошаду дигарӣ ҳамвориро дар нуқтае бурад, ки он ба хати рости якум тааллуқ надошта бошад, он гоҳ ин хатҳо чиликианд.



Расми 22

Бугузор *a* хати рости дар ҳамвории *α* ҷойгир буда, *B* нуқтаи буриши хати рости *b* бо ин ҳамворӣ аст ва *B* ба *a* тааллуқ надорад (расми 22).

Фарз мекунем, ки хатҳои рости *a* ва *b* чиликӣ нестанд, яъне ҳамвории дигар *β* вуҷуд дорад, ки ин хатҳоро дар бар мегирад. Пас *a* ва *B* дар *β* ҷойгиранд. Мувофиқи теоремаи 1 ҳамвориҳои *α* ва *β* ҳамҷояанд. Вале *α* хати *b*-ро дар бар намегирад, пас *β* низ ин хатро дар бар гирифта наметавонад. Инак, ҳамворие мавҷуд нест, ки ҳар ду хатҳоро дар бар гирад. Ин аз чиликӣ будани онҳо шаҳодат медиҳад.

Натиҷаи 2. Барои ҳар гуна хати рост дар фазо хати рости ба он чиликӣ вуҷуд дорад.

Барои исботи ин натиҷа нуқтаи *B*-ро берун аз хати рости *a* мегирем ва аз рӯи *a* ва *B* мувофиқи теоремаи 1 ҳамвории *α* мегузаронем. Баъд, берун аз *α* ягон нуқтаи *C*-ро интихоб намуда, хати рости *b*-ро аз рӯи нуқтаҳои *B* ва *C* мегузаронем. Мулоҳизаронии минбаъда мутлақо мисли асоснокkунии аломати дуюми хатҳои чиликӣ, ки дар боло оварда шудааст мебошанд.

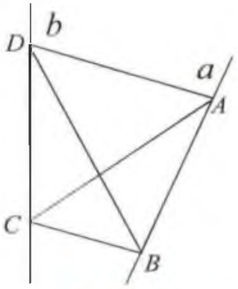
1. Ду хати рост дар фазо байниҳамдигар чӣ тавр ҷойгир шуда метавонанд? **2.** Дар кадом ҳолат хатҳои рост дар фазо параллел номида мешаванд? Чиликӣ- чӣ? **3.** Аломатҳои чиликӣ будани хатҳои ростро дар фазо оред ва онҳоро асоснок намоед. **4.** Барои хати рости додашуда хати рости ба он чиликӣ бударо созед.

54. Исбот кунед, ки агар хатҳои рости AB ва CD чиликӣ бошанд, он гоҳ хатҳои рости AC ва BD низ чиликианд.

55. Магар аз рӯи нуқтаи C, ки ба хатҳои рости чиликии a ва b тааллуқ надорад, ду хати рости гуногун гузаронидан мумкин аст, ки ҳар кадоми онҳо хатҳои рости a ва b-ро буранд?

56. Ду хати рости чиликии a ва b ва нуқтаи C, ки дар ягонтои ин хатҳо ҷойгир нест, дода шудаанд. Оё аз нуқтаи C хати ростеро гузаронидан мумкин аст, ки вай ҳар дуи ин хатҳои рости a ва b-ро бурад?

57. Исбот кунед, ки хатҳои рости тегаҳои муқобилро дар бар гиранда, масалан, AB ва CD-и ҳар гуна тетраэдр чиликианд (расми 23). Боз кадом хатҳои рости чиликиро дар расми 23 нишон додан мумкин аст?



Расми 23

58. Бигузор K ва M миёнаҷои тегаҳои AB ва CD-и тетраэдри $ABCD$ мебошанд. Исбот кунед, ки хатҳои рости AC ва KM чиликианд.

59. Нуқтаҳои K, M, P миёнаҷои тегаҳои AB, BC, CA-и тетраэдри $ABCD$-анд. Исбот кунед, ки хатҳои рости KP ва DM чиликӣ мебошанд.

60. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипеди росткунҷа. Исбот кунед, ки хатҳои рости: 1) AB ва CC_1 ; 2) AB ва B_1C_1; 3) AC ва BB_1; 4) AC ва BD_1; 5) AC ва BC_1; 6) AB_1 ва BC_1 чиликианд.

61. Исбот намоед, ки барои ҳар гуна ду хати рости чиликии a ва b дар фазо хати рости сеюм c вуҷуд дорад, ки ҳам бо a ва ҳам бо b чиликӣ мебошад.

62. Исбот кунед, ки барои ҳар гуна ду хати рости ҳамдигарро мебуридагии a ва b дар фазо хати росте вуҷуд дорад, ки ҳам бо a ва ҳам бо b чиликӣ аст.

Масъалаҳо барои такрор

63. Нишон диҳед, ки ҳар гуна бурриши бисёрруя бо ҳамворӣ бисёркунҷа мебошад.

64. Ду ҳамвории ҳамдигарро намебуридагӣ дода шудаанд. Исбот кунед, ки агар хати рост яке аз ин ҳамвориҳоро бурад, он гоҳ дигариро низ мебурад.

65. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва сатҳи пурраи кубе, ки теғааш *4см* аст, ба чӣ баробар аст?

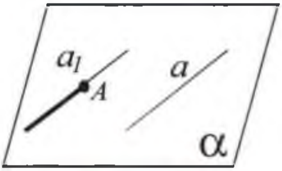
66. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва пурраи параллелепипеди росткунҷаи асосаш квадратро ёбед, агар тарафи квадрати асос *5см* ва баландӣ *10см* бошад.

67. Кунҷҳои α, β ва масоҳати секунҷаи ABC, ки S аст, дода шудаанд. Тарафҳои секунҷаро ёбед.

5. Параллелии хатҳои рост дар фазо

I. Чи тавре дар пункти пешина таъриф дода будем, ду хати рост дар фазо **параллел** номида мешаванд, агар онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир буда, ҳамдигарро набуранд. Натиҷаҳои заруриро аз планиметрия хотирнишон намуда, теоремаи фазогиро доир ба параллелҳо меорем. Дар натиҷа боз як тарзи ҳосил кардани ҳамвориро доро мешавем. Аз планиметрия мо медонем, ки ҷойгиршавии байниҳамдигарии ду хати рост дар ҳамворӣ чунин аст: ё хатҳои рост ҳамдигарро мебуранд, яъне якто нуқтаи умумӣ доранд (аксиомаи P_1), ё онҳо параллеланд, яъне ҳамдигарро намебуранд. Баъд, мувофиқи аксиомаи паралелӣ (хосияти асосии хатҳои рости параллел): **аз нуқтае, ки дар хати рости додашуда ҷойгир нест на зиёда аз як хати рости ба хати рости додашуда параллел гузаронидан мумкин аст.** Дар планиметрия ин аксиомаро истифода карда мо **теоремаро доир ба параллелҳо** исбот карда будем: **Аз нуқтаи** ***A*****, ки дар хати рости** ***a*** **ҷойгир нест, хати рости ба** ***a*** **параллел гузаронидан мумкин аст ва фақат якто**. Дар стереометрия аксиомаи параллелӣ дар ҳар як ҳамворӣ ҷой дорад, бинобар ин **теореми фазогӣ доир ба параллелҳо** дуруст аст. Ин теорема қиёси теоремаи планиметрии дар боло оварда шуда мебошад.

Теоремаи 3. Аз нуқтаи берунаи хати рости додашуда, хати рости ба ин хати рост параллелро гузаронидан мумкин аст ва дар айни ҳол фақат якто.



Расми 24

Исбот. Бигузор a хати рости додашуда ва A нуқтаи дар он ҷойгир набуда аст (расми 24). Аз рӯи хати рости a ва нуқтаи A ҳамвории α-ро мегузаронем (теоремаи 1). Дар ҳамвории α аз нуқтаи A хати рости a_1-ро, ки ба a параллел аст, мегузаронем. Мувофиқи теоремаи планиметрия доир ба хатҳои рости параллел чунин хати рости a_1 ягона мебошад. Теорема исбот шудааст.

Эзоҳ. То ҳол ба мо се тарзи дода шудани ҳамворӣ маълум буд: бо се нуқтаи дар як хати рост ҷойгир набуда (аксиомаи C_2); бо хати рост ва нуқтаи дар он ҷойгир набуда (теоремаи 1); бо ду хати рости ҳамдигарро мебуридагӣ (теоремаи 2). Мо ҳозир тарзи **чоруми** дода шудани ҳамвориро ҳосил кардаем: **ду хати рости параллел ҳамвориро яккимата муайян менамоянд**. Ин бевосита аз таърифи параллелӣ дар фазо бармеояд. Ин эзоҳро баъди таърифи параллелии хатҳои рост дар фазо дар пункти 4 ҳам овардан мумкин буд.

Масъалаи 1. Ду хати рости параллел дода шудаанд. Маълум, ки хати рости сеюм онҳоро мебурад. Нишон медиҳем, ки ҳар се хатҳои рост дар як ҳамворӣ мехобанд.

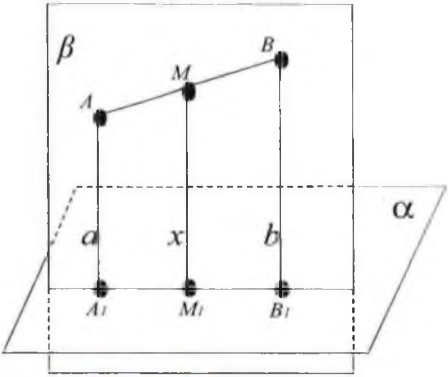
Ҳал. Бигзор α ҳамвориест, ки онро ин ду хати рости параллел яккимата муайян мекунанд. Хати рости ин хатҳоро мебуридагӣ бо α ду нуқтаи умумӣ дорад, ки онҳо нуқтаҳои буришанд. Пас мувофиқи аксиомаи C_3 ҳамвории α ин хати ростро дар бар мегирад.

Хулоса. Агар хатҳои рости a ва b якдигарро буранд, он гоҳ ҳамаи хатҳои росте, ки ба хати рости b параллеланд ва хати рости a-ро мебуранд, дар як ҳамворӣ ҷойгиранд.

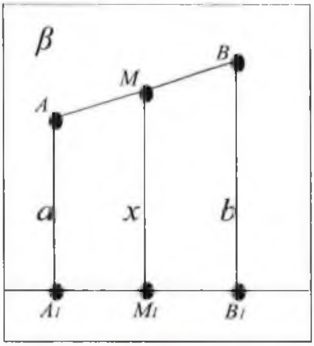
Акнун ду масъаларо ҳал мекунем, ки дар онҳо **услуби умдаи** ҳалли масъалаҳои стереометрӣ – ба масъалаҳои планиметрӣ овардани онҳо истифода карда мешавад.

Масъалаи 2. Аз охирҳои порчаи AB ва миёнаҷои он M хатҳои рости параллел гузаронида шудаанд, ки онҳо ҳамвории α-ро дар нуқтаҳои A_1, B_1 ва M_1 мебуранд. Дарозии порчаи MM_1-ро меёбем, агар маълум бошад, ки порчаи AB ҳамвории α-ро намебурад ва $AA_1=4м$ ва $BB_1=6м$ мебошад.

Ҳал. Мувофиқи хулосаи масъалаи 1 хатҳои рости AA_1, BB_1 ва MM_1 дар як ҳамвории β ҷойгиранд. Барои ҳамин нуқтаҳои A_1, B_1 ва M_1 дар хати рости A_1B_1, ки хати буриши ҳамвориҳои α ва β аст, ҷойгиранд (расми 25).



Расми 25



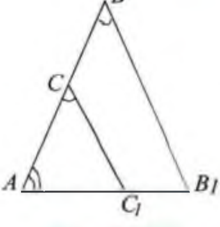
Расми 26

Пас муоинаи нақша дар ҳамвории β кифоя аст (расми 26). Мувофиқи теоремаи Фалес M_1 миёнаҷои порчаи A_1B_1 аст. Яъне, MM_1 хати миёнаи трапетсияи AA_1B_1B мебошад. Пас, дар асоси теорема дар бораи хати миёна, ҳосил мекунем:

$$MM_1 = x = \frac{1}{2}(a+b) = x = \frac{1}{2}(4+6) = 5 \text{ м}.$$

Масъалаи 3. Аз охири A-и порчаи AB ҳамвории α гузаронида шудааст. Аз охири B ва нуқтаи C-и ҳамин порча хатҳои рости параллел гузаронида шудаанд, ки онҳо ҳамвориро дар нуқтаҳои B_1 ва C_1 мебуранд. Дарозии порчаи BB_1-ро меёбем, агар $CC_1= 6см$, $AB:BC=7:4$ бошад.

Ҳал. Ҳамвории β, ки аз рӯи хатҳои рости параллели BB_1 ва CC_1 мегузарад, хати рости AB-ро дар бар мегирад (хулосаи масъалаи 1) ва ҳамвории α-ро аз рӯи хати рости AB_1 мебурад (расми 27).



Расми 27

Дар ҳамвории β ду секунҷаи ACC_1 ва ABB_1-и монанд ҳосил мешавад (кунҷи A умумӣ буда, баробарии кунҷҳои C ва B аз параллелии хатҳои рости CC_1 ва BB_1 бармеояд).

Пас $\frac{BB_1}{CC_1}=\frac{AB}{AC}$, яъне $BB_1=CC_1\cdot\frac{AB}{AC}=6\cdot\frac{7}{4}=10{,}5\,\text{см}$.

II. Аломати параллелии хатҳои ростро дар фазо дида мебароем.

Масъалаи чӣ тавр муқаррар кардани параллелии ду хати ростро дар фазо мегузорем. Албатта дар ин кор таърифро ба асос гирифтан мумкин аст: исбот кардан лозим аст, ки хатҳои рост дар як ҳамворӣ ҷойгиранд ва ҳамдигарро намебуранд. Вале ин тарзи кӯтоҳтарини ҳалли масъала нест.

Масъалаи ҳамдигарро набуридани ду хати рост дар ҳамворӣ дар асоси аломатҳои параллелӣ, яъне теоремаҳое, ки шартҳои кифоягии параллелиро муайян мекарданд, ҳал карда шуда буд. Дар планиметрия мо **се** аломати параллелии хатҳои ростро дар ҳамворӣ доштем: аз рӯи баробарии кунҷҳои дарунии чиликии байни хатҳои рост ва хати рости онҳоро мебуридагӣ; аз рӯи ба 180^0 баробар будани суммаи кунҷҳои дарунии яктарафа; аз рӯи параллелӣ ба хати рости сеюм. Ду аломати параллелии аввала дар фазо ба худ монандро надоранд. Аломати охирин бошад дар фазо ҳам дуруст аст.

Теоремаи 4. Ду хати росте, ки ба хати рости сеюм параллел мебошанд, параллеланд.

Ҳангоми дар як ҳамворӣ ҷойгир будани ҳар сеи ин хатҳои рост ин теорема дар планиметрия исбот карда шуда буд.

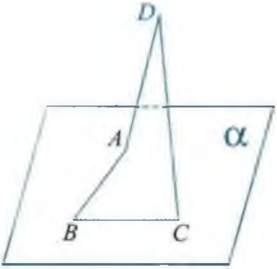
Исботро ҳангоми дар як ҳамворӣ ҷойгир набудани ин хатҳо мувақкатан мавқуф мегузорем (бо мақсади сода карданаш).

Акнун ду масъалаи содаро меорем, ки дар ҳалли онҳо теоремаи 4 истифода мешавад.

Масъалаи 4. Исбот мекунем, ки ба ду хати рости дар як ҳамворӣ ҷойгир набуда, хати рости ба онҳо параллел гузаронидан мумкин нест.

Ҳал. Агар мумкин мебуд, он гоҳ мувофиқи теоремаи 4 ин ду хати рост ба ҳам параллел мебуданд. Пас онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир мешуданд, ки ин ба шарти масъала зид аст.

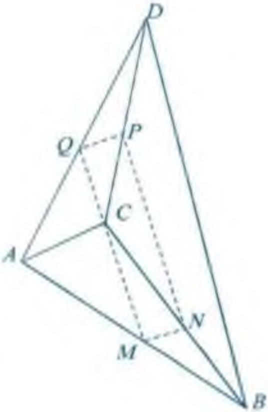
Пеш аз овардани шартҳои масъалаи навбатӣ мафҳуми **чоркунҷаи фазогӣ** ё **чиликиро** дохил мекунем. Бигузор A, B, C се нуқтаи дар як хати рост ҷойгир набуда мебошанд. Онҳо мувофиқи аксиомаи C_2 ҳамвории α-ро муайян мекунанд. Бигузор D нуқтаи дар α ҷойгир набуда аст (аксиомаи C_1) (расми 28). Ин чор нуқта дар як ҳамворӣ намехобанд. Фигураи сарбастае, ки порчаҳои AB, BC, CD ва DA тарафҳои он мебошанд, **чоркунҷаи фазогӣ** ё **чиликӣ** номида мешавад.



Расми 28

Масъалаи 5. Чоркунҷаи фазогии $ABCD$ дода шудааст (расми 29). Нишон медиҳем, ки миёнаҷои тарафҳои он қуллаҳои параллелограмм мебошанд.

Ҳал. Бигузор нуқтаҳои M, N, P, Q мувофиқан миёнаҷои тарафҳои AB, BC, CD ва DA ҳастанд. Дар секунҷаҳои DAC ва BAC, QP ва MN ҳамчун хатҳои миёнаи ин секунҷаҳо ба тарафи AC параллеланд. Пас мувофиқи теоремаи 4 QP ба MN параллел мебошад. Инчунин $QP=\frac{AC}{2}$ ва $MN=\frac{AC}{2}$, яъне $QP=MN$ аст. Агар чунин мулоҳизарониҳоро нисбати секунҷаҳои ABD ва BCD гузаронем, он гоҳ ҳосил мекунем, ки QM ба PN параллел буда, $QP = MN$ мебошад. Параллелограмм будани чоркунҷаи $QPMN$ нишон дода шудааст.



Расми 29

1. Аксиомаро доир ба хатҳои рости параллел ва теоремаро доир ба хатҳои рости параллел дар ҳамворӣ баён кунед. Байни онҳо чӣ гуна фарқият ҳаст? **2.** Теоремаро доир ба хатҳои рости параллел дар фазо баён кунед. Кадом аксиома ва теоремаҳо барои исботи он истифода карда мешаванд? **3.** Параллелии хатҳои рост дар фазо чӣ хел дохил карда мешавад? **4.** Аломати параллелии хатҳои ростро дар фазо баён кунед.

68. Ҳамаи хатҳои рост, ки ду хати рости додашудаи параллелро мебуранд, дар як ҳамворӣ ҷойгиранд. Инро исбот кунед.

69. Агар ҳамворӣ яке аз хатҳои рости параллелро бурад, он гоҳ вай хати рости дигариро ҳам мебурад. Инро исбот кунед.

70. Нуқтаҳои A, B, C, D дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд. Оё хатҳои рости AB ва CD ҳамдигарро бурида метавонанд?

71. Нуқтаи E дар ҳамвории трапетсияи $ABCD$-и асосҳояш AD ва BC ҷойгир нест. Исбот кунед, ки хати рости аз миёнаҷои порчаҳои EB ва EC гузаронидашуда ба хати миёнаи трапетсия параллел аст.

72. Нуқтаи E дар ҳамвории параллелограмми $ABCD$ ҷойгир нест. Исбот кунед, ки хати рости аз миёнаҷои порчаҳои EA ва EB гузаронидашуда ба тарафи CD-и параллелограмм параллел аст.

73. Масъалаи 2-ро (ниг. ба саҳ. 30) бо шарти он, ки порчаи AB ҳамвории α-ро мебурад ва $AA_1 = a$, $BB_1 = b$ аст, ҳал кунед.

74. Аз охири A-и порчаи AB ҳамворӣ гузаронида шудааст. Аз охири B ва нуқтаи C-и ҳамин порча хатҳои рости параллел гузаронида шудааст, ки онҳо ҳамвориро дар нуқтаҳои B_1 ва C_1 мебуранд. Дарозии порчаи BB_1-ро ёбед, агар: 1) $CC_1 = 10см$, $AC : BC = 2:3$; 2) $AC = a$, $DC = b$, $CC_1 = c$ бошад.

75. Нуқтаҳои A, B, C, D дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд. Исбот кунед, ки хатҳои аз миёнаҷои порчаҳои AB ва BC, AD ва CD мегузаштагӣ бо ҳам параллеланд.

76. Параллелограммҳои $ABCD$ ва ABC_1D_1 дар ҳамвориҳои гуногун ҷойгиранд. Исбот кунед, ки чоркунҷаи CDD_1C_1 низ параллелограмм мебошад.

77. Параллелограмми $ABCD$ ва ҳамвории онро намебуридагӣ дода шудаанд. Аз қуллаҳои параллелограмм хатҳои рости параллел гузаронида шудаанд, ки онҳо ҳамвории додашударо дар нуқтаҳои A_1, B_1, C_1, D_1, мебуранд. Дарозии порчаи DD_1-ро ёбед, агар: 1) $AA_1=2м$, $BB_1=3м$, $CC_1=8м$; 2) $AA_1=a$, $BB_1=b$, $CC_1=c$ бошад.

Масъалаҳо барои такрор

78. Куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дода шудааст. Дар кадом рӯяҳои он хатҳои рости ғайрипараллел ва бо хати рости AA_1 бурида намешудагӣ ҷойгир шуда наметавонанд?

79. Хати рости a дар ҳамворӣ ҷойгир аст. Аз нуқтаи дар ин ҳамворӣ гирифташуда чанд дона хатҳои рост, ки бо a чиликианд мегузаранд?

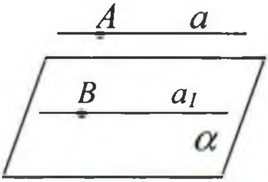
80. Дар ромб яке аз диагоналҳо ба тарафаш баробар аст. Кунҷҳои ромбро ёбед.

81. Асосҳои трапетсия ҳамчун 2:3 нисбат доранд. Хати миёнааш $5см$ аст. Асосҳои трапетсияро ёбед.

82. Дар секунҷаи баробарпаҳлуи ABC ($AB=BC$) медианаи AD ва биссектрисаи CE перпендикуляранд. Кунҷи ADB-ро ёбед.

6. Ҷойгиршавии байниҳамдигарии хати рост ва ҳамворӣ. Параллелии онҳо

Ҷойгиршавии байниҳамдигарии хати рост ва ҳамвориро дар фазо дида мебароем. Мувофиқи натиҷаи пункти 2 ҳамворӣ ва хати рости дар он ҷойгирнабуда ё дар як нуқта бурида мешаванд, ё бурида намешаванд (ба расми 12 ниг.). Ҳамин тариқ, барои хати рости a ва ҳамвории α се имконият мавҷуд аст: 1) a дар α ҷойгир аст (ки дар планиметрия ҳамеша ҷой дошт); 2) a бо α буриш дорад (расо дар як нуқта); 3) a бо α буриш надорад (яъне a ва α нуқтаҳои умумӣ надоранд). Чи тавре аллакай мо дидем ду имконияти аввала амалишавандаанд. Пурсида мешавад, имконияти сеюм ҳам амалӣ мешавад ё не?



Расми 30

Исбот мекунем, ки барои ҳар гуна ҳамвории α хати рости a мавҷуд аст, ки бо α нуқтаҳои умумӣ надорад.

Дар ҳамвории α ду нуқтаро интихоб карда хати рости a_1-ро мегузаронем. Баъд, берун аз α нуқтаи A-ро гирифта, аз рӯи он хати рости a-ро, ки ба хати рости a_1 параллел аст мегузаронем (расми 30). Мувофиқи теоремаи

3 ин мумкин аст. Нишон медиҳем, ки хати рости a ҳамвории α-ро намебурад. Дар ҳақиқат, хатҳои рости a ва a_1 дар як ҳамвории β ҷойгиранд ва дар айни ҳол α ва β гуногунанд ва аз рӯи хати рости a_1 бурида мешаванд. Агар дар хати рости a нуқтаи B, ки дар α ҷойгир аст, мавҷуд мебуд, он гоҳ B ба a_1 тааллуқ медошт, чунки нуқтаи B ба ҳар ду ҳамворӣ тааллуқ дорад. Пас хатҳои рости a ва a_1 ҳамдигарро мебуранд, ки ин ба созиш зид аст ($a||a_1$).

Монанди хатҳои рост дар ҳамворӣ вазъ дар ҳолати сеюм параллелии хати рост ва ҳамворӣ ном дорад. Инак, дорем:

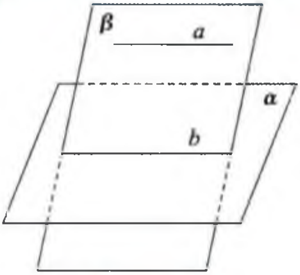
Таъриф. Хати рост ва ҳамворӣ **параллел** номида мешаванд, агар онҳо бурида нашаванд.

Эзоҳ. Хати росте, ки дар ҳамворӣ ҷойгир аст ба ҳамворӣ параллел ҳисоб карда намешавад.

Дар боло мо мавҷудияти хатҳои рост ва ҳамвориҳои параллелро исбот намудем. Акнун ба муайян кардани **аломати параллелии** онҳо машғул мешавем.

Теремаи 5. Агар хати рости дар ҳамворӣ ҷойгир иабуда, бо ягон хати рости ин ҳамворӣ параллел бошад, он гоҳ вай ба худи ҳамворӣ ҳам параллел мешавад.

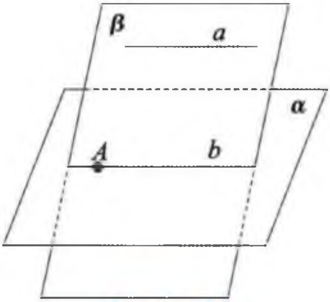
Исбот. Бигузор a хати ростест, ки ба хати рости дигари b, ки дар ҳамвории α ҷойгир аст, параллел мебошад. Аз сабаби параллелӣ хатҳои a ва b дар як ҳамворӣ воқеъанд. Бигузор ин ҳамворӣ β аст (расми 31). Ҳамвориҳои α ва β аз рӯи хати рости b бурида мешаванд. Биноан агар a ва α ҳамдигарро буранд, нуқтаи буриш дар хати b ҷойгир аст. Ин номумкин аст, чунки хатҳои a ва b мувофиқи шарти теорема параллеланд. Инак, хати рости a ва ҳамвории α нуқтаи умумӣ надоранд, яъне параллеланд. Теорема исбот шуд.



Расми 31

Теоремаи баръакс ҳам дуруст аст: **Агар хати рост ба ҳамворӣ параллел бошад, он гоҳ дар ҳамворӣ хати росте вуҷуд дорад, ки ба хати рости додашуда параллел аст.**

Исбот. Бигузор a хати ростест, ки ба ҳамвории додашудаи α параллел аст ва A нуқтаи дилхоҳест дар α. Хати рости a ва нуқтаи A ҳамвории β-ро муайян мекунанд (рами 32). Ҳамвориҳои α ва β дорои нуқтаи умумии A мебошанд. Пас мувофиқи аксиомаи C_4 онҳо аз рӯи хати рост бурида мешаванд. Агар ин хати рост b бошад, он гоҳ хатҳои a ва b дар як ҳамвории β ҷойгиранд. Хати рости a бо α нуқтаи умумӣ надорад, бинобар ин вай хати рости b-ро бурида наметавонад. Инак, хатҳои рости a ва b дар як ҳамворӣ ҷойгир буда, нуқтаи умумӣ надоранд, яъне параллеланд.



Расми 32

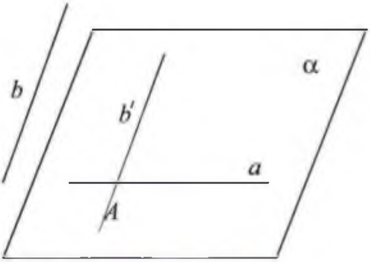
Аз теоремаи 5 ва теоремаи баръакси он чунин **аломати параллелии** хати рост ва ҳамворӣ бармеояд: **Хати рост ба ҳамворӣ ҳамон вақт ва фақат ҳамон вақт параллел аст, агар вай дар ҳамворӣ ҷойгир набошад ва ба ягон хате, ки дар ҳамворӣ ҷойгир аст, параллел бошад.**

Хулоса. Агар хати рост ба ҳамворӣ параллел бошад, он гоҳ дар ин ҳамворӣ микдори беохири (беҳад зиёди) хатҳои рост мавҷуданд, ки ҳам ба хати рости додашуда ва ҳам байни худ параллеланд.

Дурустии ин хулоса аз аломати параллелӣ ва теоремаи 4 бармеояд.

Акнун се масъаларо меорем, ки ҳалли онҳо ба истифодаи аломати параллелии хати рост ва ҳамворӣ асос карда шудааст.

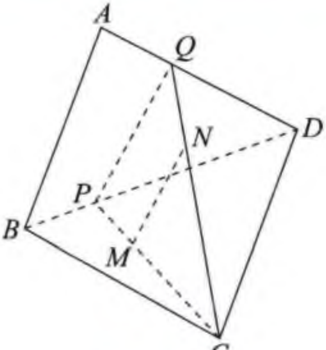
Масъалаи 1. Хатҳои рости чиликӣ дода шудаанд. Исбот мекунем, ки аз рӯи якеи онҳо ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст, ки он ба хати рости дигарӣ параллел аст.



Расми 33

Ҳал. Бигузор хати рости a ва b чиликианд ва нуқтаи A дар хати a воқеъ аст (расми 33). Аз болои нуқтаи A хати рости b'-ро, ки ба b параллел аст мегузаронем. Мувофиқи аксиомаи C_4 хати b' ва a ҳамвории α-ро муайян мекунанд. Мувофиқи теоремаи 5 ҳамвории α ба хати рости b параллел аст.

Масъалаи 2. Дар тетраэдри $ABCD$ нуқтаҳои M ва N маркази вазнинии секунҷаҳои BCD ва ACD мебошанд. Муайян мекунем, ки магар хати рости MN ба ҳамвории ABD параллел аст ё на.



Расми 34

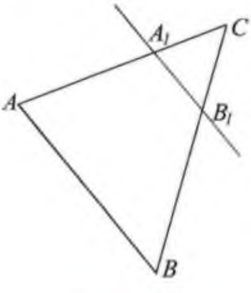
Ҳал. Бигузор P нуқтаи буриши хатҳои CM ва BD, Q нуқтаи буриши хатҳои CN ва AD аст (расми 34). Аз сабаби маркази вазнинӣ будани нуқтаҳои M ва N дорем

Р $$\frac{CM}{CP}=\frac{CN}{CQ}=\frac{2}{3}.$$

Барои ҳамин секунҷаи CMN ба секунҷаи CPQ монанд аст ва MN ба PQ параллел аст. Азбаски PQ дар ҳамвории ABD ҷойгир аст, пас мувофиқи аломати параллелӣ хати рости MN ба ҳамвории ABD параллел аст.

Масъалаи 3. Секунҷаи ABC дода шудааст. Ҳамвории ба хати рости AB параллел буда, тарафи AC-и секунҷаро дар нуқтаи A_1, тарафи BC-ро дар нуқтаи B_1 мебурад. Дарозии порчаи A_1B_1-ро меёбем, агар $AB = 18$см, $AA_1{:}AC = 4{:}5$ бошад.

Ҳал. Услуби ба масъалаи планиметрӣ оварданро татбиқ намуда хати буриши ҳамвориро, хати A_1B_1-ро тасвир мекунем (расми 35). Мувофиқи аломати параллелӣ хати рости A_1B_1 ба AB параллел аст ва дар ҳамвории ABC секунҷаҳои монанди ABC ва $A_1B_1C_1$-ро ҳосил мекунем. Мувофиқи монандии секунҷаҳо $\frac{A_1C}{AC}=\frac{A_1B_1}{AB}$. Вале

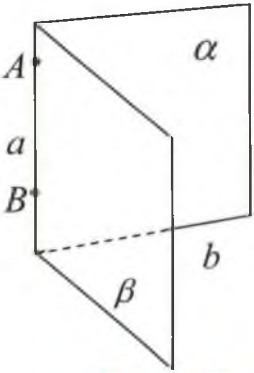


Расми 35

$$\frac{A_1C}{AC}=\frac{AC-AA_1}{AC}=1-\frac{AA_1}{AC}=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5},$$

бинобар ин $A_1B_1 = AB\cdot\frac{A_1C}{AC}=18\cdot\frac{1}{5}=3{,}6$ см.

II. Исботи теоремаи 4-ро, ки аломати параллелии хатҳои ростро дар фазо медод, бо мақсади сода карданаш мавқуф гузашта будем. Акнун бо истифодаи аломати параллелии хати рост ва ҳамворӣ исботи онро меорем.



Расми 36

Ин теорема тасдиқ мекард, ки ду хати рости ба хати рости сеюм параллел байни худ параллеланд (ниг. ба саҳ. 31). Ҳолатеро дида мебароем, ки ҳар се хати рост дар як ҳамворӣ ҷойгир намебошанд. Барои исбот фарз мекунем, ки хатҳои рости *a* ва *b* ба хати рости *c* параллеланд (расми 36).

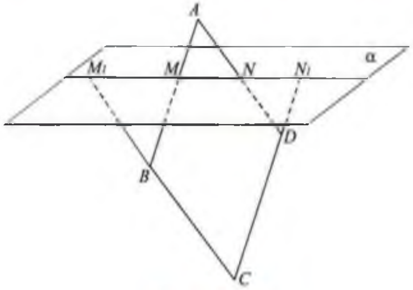
Нишон медиҳем, ки *a* ва *b* параллел мебошанд. Дар хати рости *a* нуқтаи дилхоҳи *A*-ро мегирем ва аз рӯи *A* ва хати рости *c* ҳамвории *α*, баъд аз рӯи *A* ва хати рости *b* ҳамвории *β*-ро мегузаронем. *A* нуқтаи умумии ин ҳамвориҳост, пас онҳо ҳамдигарро аз рӯи хати рост мебуранд (аксиомаи С4).

Нишон медиҳем, ки ин хати буриш ба хати рости *b* параллел аст. Мувофиқи аломати параллелии хати рост ва ҳамворӣ хати рости *b* ба ҳамвории *α* параллел аст. Хати буриш ва хати рости *b* дар ҳамвории *β* ҷойгиранд. Онҳо ҳамдигарро бурида наметавонанд, вагарна хати рости *b* ҳамвории *α*-ро мебурид. Яъне, хати буриш ба хати рости *b* параллел аст. Аз рӯи нуқтаи додашудаи *A* ду хати рости гуногуни ба *b* параллелро гузаронидан мумкин нест. Барои ҳамин хати буриш хати *a* аст. Ба хати рости *b* параллел будани хати *a* нишон дода шудааст.

Теоремаи 6. Агар яке аз хатҳои рости параллел ҳамвориро бурад, он гоҳ дигарӣ низ ин ҳамвориро мебурад.

Исбот. Бигузор *a* ва *b* ду хати рости параллел буда, хати рости *a* ҳамвории *α*-ро мебурад. Барои хати рости *b* се ҳолат имконпазир аст: 1) вай дар *α* ҷойгир аст; 2) вай ба *α* параллел аст; 3) вай *α*-ро мебурад. Агар *b* дар *α* ҷойгир бошад, он гоҳ мувофиқи аломати параллелии хати рост ва ҳамворӣ хати *a* ба *α* параллел аст, ки ин номумкин мебошад. Рафту агар b ба α параллел бошад, он гоҳ дар α хати росте, вуҷуд дорад, ки ба b параллел мебошад, масалан, хати рости c. Аз параллели a бар b ва b бар c бармеояд, ки a бар c параллел аст (теоремаи 4). Аз ин ҷо, боз мувофиқи аломати параллелӣ параллелии a ба α бармеояд, ки ин номумкин аст. Пас танҳо ҳолати 3)-ум имконпазир асту халос. Теорема исбот шуд.

Масъалаи 4. Тарафи ромби $ABCD$ $4см$ аст. Тарафҳои AB ва AD ҳамвории α-ро мувофиқан дар нуқтаҳои M ва N мебуранд. Маълум, ки $AM=1см$, $AN=3см$ аст. а) Нишон медиҳем, ки хатҳои рости CB ва CD ҳамвории α-ро мебуранд. б) Дарозии порчаҳои CM_1 ва CN_1-ро меёбем, ки дар ин ҷо мувофиқан M_1 ва N_1 нуқтаҳои буриши хатҳои CB ва CD бо ҳамвории α мебошанд.



Расми 37

Ҳал. а) Дар ромб тарафҳои муқобил параллеланд, яъне $AB||CD$ ва $AD||BC$ аст (расми 37). Мувофиқи шарти масъала AB ва AD ҳамвориро мебуранд. Мувофиқи теоремаи 6 хатҳои ба онҳо параллели CD ва BC низ ҳамвории α-ро мебуранд.

б) Нуқтаҳои M_1, N_1, M ва N нуқтаҳои буриши ҳамвории α бо ҳамвории ABC мебошанд. Барои ҳамин онҳо дар як хати рост меҳобанд. Аз сабаби параллелии хатҳои рости AN ба M_1B секунҷаҳои AMN ва BMM_1 монанданд. Барои ҳамин $\frac{BM_1}{BM}=\frac{AN}{AM}$ ё

$$BM_1=\frac{AN}{AM}\cdot BM,\quad BM_1=\frac{3}{1}\cdot 3=9см.$$

Пас $CM_1=CB+BM_1=4+9=13см.$

Аз тарафи дигар, аз сабаби параллелии хатҳои рости AM ва DN_1 секунҷаҳои AMN ва DN_1N монанданд. Пас

$\dfrac{DN_1}{DN} = \dfrac{AM}{AN}$, $\quad DN_1 = \dfrac{AM}{AN} \cdot DN$, $\quad DN_1 = \dfrac{1}{3} \cdot 1 = \dfrac{1}{3}$ см. Ҳамин тариқ, $CN_1 = CD + DN_1 = 4 + \dfrac{1}{3} = 4\dfrac{1}{3}$ см.

---

1. Ҷойгиршавии байниҳамдигарии хати рост ва ҳамвориро дар фазо тасвир намоед. **2.** Дар кадом ҳолат хати рост ва ҳамворӣ параллел номида мешаванд? Дар кадом ҳолат онҳо ҳамдигарро мебуранд. **3.** Чӣ тавр аз нуқтаи додашуда хати рости ба ҳамвории додашуда параллелро гузаронидан мумкин аст? **4.** Аломати параллелии хати рост ва ҳамвориро дар фазо баён карда онро шарҳ диҳед. **5.** Яке аз хатҳои рости параллел ҳамвориро мебурад. Нисбати хати рости дуюм ва ҳамворӣ чӣ гуфтан мумкин аст?

---

83. Исбот кунед, ки аз рӯи нуқтаи додашуда хати ростеро гузаронидан мумкин аст, ки ба ҳар як ду ҳамвории ҳамдигарро мебуридагӣ параллел аст.

84. Маълум, ки ду ҳамворӣ ҳамдигарро мебуранд. Магар ҳамеша ҳамвории ба онҳо параллелро гузаронидан мумкин аст? Агар мумкин бошад чунин ҳамвориро гузаронед.

85. Маълум, ки ду ҳамворӣ аз рӯи хати рости a бурида мешаванд ва ҳамвории α-ро аз рӯи хатҳои рости параллел мебуранд. Исбот кунед, ки хати рости a ба ҳамвории α параллел аст.

86. Исбот намоед, ки агар ҳамворӣ яке аз ду ҳамвориҳои параллелро бурад, он гоҳ дигарашро низ мебурад.

87. Масъалаи 3-ро (ниг. ба саҳ. 37) ҳал кунед, агар: 1) $AB=10см$, $AA_1:A_1C= 5:3$; 2) $AA_1= a$, $AB=b$, $A_1C=c$ бошад.

88. Асоси пирамидаи чоркунҷаи $SABCD$ параллелограмм мебошад. Ҷойгиршавии байниҳамдигарии хати росте, ки буриши ҳамвориҳои рӯяҳои SAB ва SCD аст, бо ҳамвории асос $ABCD$ чӣ гуна аст?

89. Ду чоркунҷаи ҳамвори $ABCD$ ва $CDEF$, ки ҳамвориҳояшон бурида мешаванд, дода шудаанд. Аз рӯи хати рости AB ҳамворӣ гузаронида шудааст, ки он ҳамвории

$CДEF$-ро мебурад. Дар кадом ҳолат хати буриши ин ҳамвориҳо ба хати рости AB параллел аст?

90. Исбот кунед, ки агар хати рости a ба хати рости b ва ҳамвории α параллел бошад он гоҳ хати рости b ё ба ҳамвории α параллел аст, ё дар он ҷойгир мебошад.

91. Исбот кунед, ки агар ҳар яке аз ду ҳамвориҳои ҳамдигарро мебуридагӣ ба хати рости додашуда параллел бошанд, он гоҳ хати рости буриши ин ҳамвориҳо низ ба хати рости додашуда параллел аст.

92.* Исбот кунед, ки ҳар гуна буриши тетраэдр бо ҳамвории ба ду тегаи бо ҳам чиликии он параллелбуда, параллелограмм мебошад.

93.* Чор нуқтаи A, B, C, D-и дар як ҳамворӣ ҷойгир набуда дода шудааст. Исбот кунед, ки ҳар гуна ҳамвории ба хатҳои рости AB ва CD параллелнабуда хатҳои рости AC, AD, BD, BC-ро дар қуллаҳои параллелограмм мебурад.

Масъалаҳо барои такрор

94. Кадом хусусияти ду хати рости ҳамдигарро мебуридагӣ ва ду хати рости параллелбударо ду хати рости чилликӣ надорад?

95. Чор нуқтаи A, B, C, D-и дар як ҳамворӣ ҷойгир набуда дода шудаанд. Исбот кунед, ки хатҳои росте, ки миёнаҷои порчаҳои AB ва CD, AC ва BD, AD ва BC пайваст мекунанд, дар як нуқта бурида мешаванд.

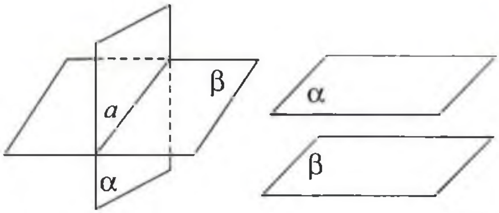
96. Трапетсияи $ABCD$ бо диагонали AC ба ду секунҷаи монанд ҷудо мешавад. Диагонали AC бо асос кунҷи 45^0-ро ташкил мекунад, тарафҳои паҳлуӣ $AD=1$ ва $BC=\sqrt{2}$ мебошанд. Кунҷҳои трапетсияро ёбед.

97. Дар секунҷаи ABC BE - медиана, BD - баландӣ ва $\angle A=30^0$, $\angle C=45^0$ аст. $\angle DBE$-ро ёбед.

7. Ҷойгиршавии байниҳамдигарии ду ҳамворӣ. Параллелии онҳо

I. Мувофиқи аксиомаи C_4 (пункти 2) агар ду ҳамвории гуногун ақаллан як нуқтаи умумӣ дошта бошанд, он гоҳ онҳо аз рӯи хати рост бурида мешаванд. Дар ин ҳолат, чи тавре ки мо аллакай медонем, ин ҳамвориҳоро **буридашаванда** меноманд. Мантиқан ҳолати дигар низ имконпазир аст, ки мо онро ҳамчун таъриф меорем.

Таъриф. Ду ҳамворӣ **параллел** номида мешаванд, агар онҳо ҳамдигарро набуранд, яъне нуқтаҳои умумӣ надошта бошанд.



а) Ҳамвориҳои α ва β аз рӯи хати рости a бурида мешаванд

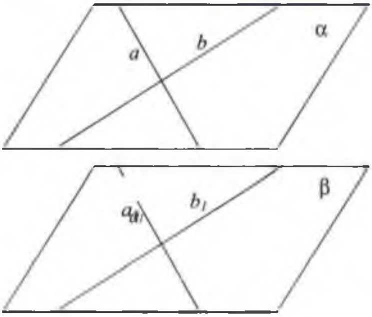
а) Ҳамвориҳои α ва β параллеланд

Расми 38

Ҳар ду имконияти ҷойгиршавии ду ҳамворӣ дар расми 38 нишон дода шудааст. Дар аввал аломати параллелии ҳамвориҳоро дида баромада, баъд ба масъалаи мавҷудияти ҳамвориҳои параллел машғул мешавем.

Теоремаи 7. (аломати 1-уми параллелии ҳамвориҳо). **Агар ду хати рости ҳамдигарро мебуридагии як ҳамворӣ мувофиқан ба ду хати рости ҳамвории дигар параллел бошад, он гоҳ ин ҳамвориҳо параллеланд.**

Исбот. Бигузор a ва b хатҳои рости ҳамдигарро мебуридагии ҳамвории α буда, a_1 ва b_1 хатҳои рости ба онҳо параллели ҳамвории β мебошанд (расми 39).



Расми 39

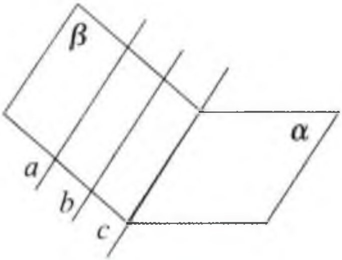
Исбот кардан зарур аст, ки α ва β бо ҳам параллеланд, яъне нуқтаи умумӣ надоранд. Теоремаро аз баръаксаш исбот мекунем, яъне фарз мекунем, ки ҳамвориҳои α ва β параллел нестанд. Дар ин ҳолат онҳо нуқтаҳои умумӣ доранд ва мувофиқи аксиомаи C_4 аз рӯи хати рост бурида мешаванд. Бигузор c хати бурриш аст. Азбаски a ва b мувофиқан ба a_1 ва b_1 параллеланду a_1, b_1 дар β ҷойгиранд, пас мувофиқи аломати параллелии хати рост ва ҳамворӣ ҳосил мекунем, ки a ва b ба β параллеланд.

Яъне, на хати a ва на хати b хати рости c-ро мебуранд. Аз ин ҷо ва аз сабаби он ки хатҳои a, b ва c дар як ҳамвории α ҷойгиранд, бармеояд, ки a ва b ба c параллеланд. Ин танҳо дар ҳолате мумкин аст, агар a ва b ҳамҷоя шаванд ё параллел бошанд. Вале мувофиқи шарти теорема ин хатҳо ҳамдигарро мебуранд. Зиддияти ҳосилшуда нишон медиҳад, ки фарзи кардашуда нодуруст аст, яъне ҳамвориҳо параллеланд. Теорема исбот шуд.

Теоремаи 8. (аломати 2-уми параллелии ҳамвориҳо). **Агар ҳамворӣ ба ду хати рости ҳамдигарро мебуридагии ҳамвории дигар параллел бошад, он гоҳ ин ду ҳамворӣ параллеланд.**

Исбот. Фарз мекунем, ки хатҳои рости a ва b ҳамдигарро мебуранд, онҳо дар ҳамвории α ҷойгиранд ва ба ҳамвории β параллеланд. Нишон медиҳем, ки α ва β параллел мебошанд. Агар ин тавр намебуд, онҳо аз рӯи хати рости c бурида мешуданд. Мувофиқи аксиома доир ба хатҳои рости параллел a ё b бо хати рости c нуқтаи умумӣ дорад. Яъне, a ё b ҳамвории β-ро мебурад, ки ин ба параллел будани онҳо ба ӯ зид аст. Дурустии тасдиқ нишон дода шудааст.

Эзоҳ. Дар аломатҳои параллелии ҳамвориҳо ҳамдигарро буридани хатҳои рост муҳим аст. Вагарна ду хати рости a ва b-ро, ки ба хати рости c параллеланд (расми 40) гирифта, ҳосил мекунем, ки a ва b ба ҳамвории α параллел буда, вале ҳамвории β ба ҳамвории α параллел нест.



Расми 40

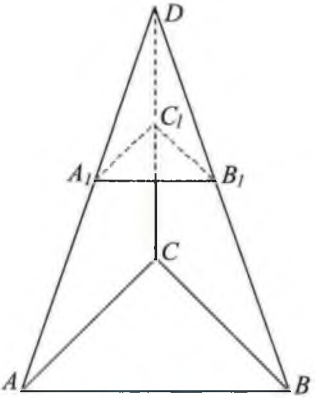
Масъалаи 1. Маълум, ки тарафҳои AB ва BC-и секунчаи ABC ба ҳамвории α параллеланд. Нишон медиҳем, ки ҳамвории ABC ба α параллел аст.

Ҳал. Дар ҳамвории ABC хатҳои рости AB ва BC ду хати ҳамдигарро мебуридагӣ мебошанд. Онҳо ба ҳамвории α параллеланд. Пас мувофиқи теоремаи 8 ҳамвориҳои ABC ва α параллеланд.

Масълаи 2. Маълум, ки хати рости a дар ҳамвории α ҷойгир аст ва α ба ҳамвории β параллел аст. Нишон медиҳем, ки a ба β параллел аст.

Ҳал. Дар ҳақиқат, агар хати рости a ба ҳамвории β параллел набошад, он гоҳ онҳо нуқтаи умумӣ доранд. Ин нуқта нуқтаи умумии α ва β низ ҳаст. Вале онҳо параллеланд. Пас чунин нуқта вуҷуд надорад, яъне a ва β параллел мебошанд.

Масъалаи 3. Дар тетраэдри $ABCD$ $\frac{DB_1}{DB}=\frac{A_1C_1}{AC}$ ва хати рости A_1C_1 ба хати AC параллел аст (расми 41). Нишон медиҳем, ки ҳамвориҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ параллеланд.



Расми 41

Ҳал. Аз сабаби параллелии A_1C_1 ва AC секунҷаҳои DA_1C_1 ва DAC монананд. Барои ҳамин $\frac{DC_1}{DC}=\frac{A_1C_1}{AC}$. Аз ин ҷо ва аз шарти масъала ҳосил мекунем: $\frac{DC_1}{DC}=\frac{DB_1}{DB}$. Ин нишон медиҳад, ки секунҷаҳои DC_1B_1 ва DCB монананд. Пас C_1B_1 ба CB параллел аст. Инак, ду хати рости ҳамдигарро мебуридагии ҳамвории ABC (хатҳои AC ва CB) ба ду хати рости ҳамдигарро мебуридагии ҳамвории $A_1B_1C_1$ параллел мебошад. Пас мувофиқи теоремаи 7 ин ҳамвориҳо параллеланд.

Масъалаи 4. Маълум, ки хатҳои рости a ва b чиликианд. Нишон медиҳем, ки агар ҳар дуи онҳо ба ҳамвориҳои α ва β параллел бошанд, он гоҳ ин ҳамвориҳо параллеланд.

Ҳал. Аз сабаби параллелии a ба α ва ба β мувофиқи аломати параллелии хати рост ва ҳамворӣ, хатҳои рости a_1-ро дар α ва a_2-ро дар β ёфтан мумкин аст, ки онҳо ба a параллеланд. Мувофиқан, аз рӯи параллелии b ба α ва ба β хати рости b_1-ро дар α ва b_2-ро дар β, ки онҳо ба b параллелланд. Мувофиқи аломати параллелии хатҳои рост a_1 ба a_2 ва b_1 ба b_2 параллел мебошанд. Мувофиқи шарти масъала хатҳои a ва b чиликианд. Бинобар ин a_1 ва b_1 параллел шуда наметавонанд. Пас онҳо ҳамдигарро мебуранд, чунки дар як ҳамворӣ ҷойгиранд. Айнан ҳамин мулоҳизарониро нисбати хатҳои a_2 ва b_2 такрор карда, ҳосил мекунем, ки ин хатҳо низ ҳамдигарро мебуранд. Аз ин ҷо ва аз параллелии a_1 ба a_2 ва b_1 ба b_2 мувофиқи теоремаи 7 параллелии ҳамвориҳои α ва β бармеояд.

II. Ба масъалаи мавҷудияти ҳамвориҳои параллел бармегардем. Пурсида мешавад, ки оё аз рӯи нуқта, ки дар ҳамвории додашуда ҷойгир нест, ба ин ҳамворӣ ҳамвории параллел гузаронидан мумкин аст ё на. Ба ин савол тасдиқи зерин ҷавоб медиҳад.

Теоремаи 9. Аз нуқтаи аз ҳамвории додашуда берун ҳамвории ба ҳамвории додашуда параллел гузаронидан мумкин аст ва дар айни ҳол фақат якто.

Исбот. Бигузор α ҳамворӣ ва A нуқтаи дар он воқеъ набуда аст. Исботро ба ду қисм ҷудо мекунем:

а) **Мавҷудияти ҳамворӣ**. Бигузор a ва b ду хати рости дар ҳамвории α ҳамдигарро мебуридагӣ мебошанд. Аз рӯи нуқтаи A хатхои рости a_1 ва b_1-ро, ки ба хатҳои рости a ва b параллеланд мегузаронем. (Барои ин кифоя аст, масалан, аз рӯи A ва хати a ҳамворӣ гузаронида, дар ин ҳамворӣ хати a_1-ро созем.) Хатҳои рости a_1 ва b_1 ҳамдигарро мебуранд, барои ҳамин онҳо ҳамвории β-ро муайян мекунанд (аксиомаи C_4). Мувофиқи теоремаи 7 ин ҳамвориҳо параллеланд.

б) **Ягонагии ҳамворӣ.** Фарз мекунем, ки ҳамвории дигари β_1 вуҷуд дорад, ки нуқтаи A-ро дар бар гирифта ба α параллел аст. β_1 ҳам a_1 ва ҳам b_1-ро дар бар гирифта наметавонад. Вагарна бо β ҳамҷоя мешуд. Барои ҳамин ақаллан яке аз онҳо, a_1 ё b_1 ҳамвории β_1-ро мебурад. Бигузор чунин хат хати a_1 аст. Аз параллелии a ва a_1 бармеояд, ки a низ ҳамвории β_1-ро мебурад. Ин бошад ба параллелии α ва β_1 зид аст. Инак, ҳамвории β ба таври ягона муайян карда мешавад.

Аз теорема чунин хулосаҳо бармеоянд:

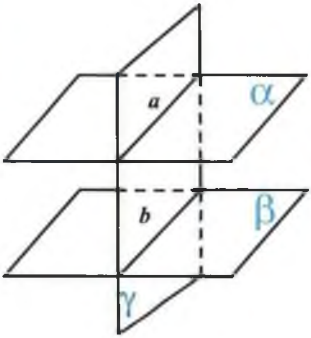
1. **Хатҳои рости ба ҳамвории додашуда параллел, ки аз рӯи нуқтаи додашудаи берун аз ҳамворӣ мегузаранд, дар ҳамворие ҷойгиранд, ки он ба ҳамвории додашуда параллел буда, ин нуқтаро дар бар мегирад.**
2. **Аз рӯи хати росте, ки ба ҳамвории додашуда параллел аст, ҳамвории ба ин ҳамворӣ параллел гузаронидан мумкин аст ва дар айни ҳол фақат якто.**
3. **Ҳар гуна хати рости дар яке аз ҳамвориҳои параллел ҷойгирбуда, ба ҳамвории дуюм параллел аст.**
4. **Ҳар гуна ҳамворие, ки бо яке аз ду ҳамвориҳои параллел буриш дорад, ҳамвории дуюмро низ мебурад.**
5. **Ҳар гуна ду ҳамворие, ки ба ҳамвории сеюм параллеланд, байни худ параллел мебошанд.**

Эзоҳ. Теоремаи 9 ба теоремаи стереометрии доир ба хатҳои рости параллел дар фазо (теоремаи 3) монанд аст.

Аз панҷ хосияти дар боло овардашуда танҳо охиринашро исбот мекунем. Фарз мекунем, ки ҳамвориҳои α ва β ба ҳамвории γ параллеланд. Нишон медиҳем, ки α ва β ҳамдигарро намебуранд.

Фарз мекунем, ки ҳамвориҳои α ва β ҳамдигарро мебуранд, яъне онҳо нуқтаи умумӣ доранд. Пас аз рӯи ин нуқта ду ҳамвории гуногуни α ва β-и ба ҳамвории γ параллел мегузарад. Ин бошад ба теоремаи 9 зиддият мекунад. Инак, ҳамвориҳои α ва β ҳамдигарро намебуранд, яъне онҳо байни худ параллел мебошанд.

III. Пурсида мешавад: ҳангоми ду ҳамвории параллелро буридани ҳамвории сеюм чӣ ҳосил мешавад? Албатта, ҷуфти хатҳои рост ҳосил мешавад.



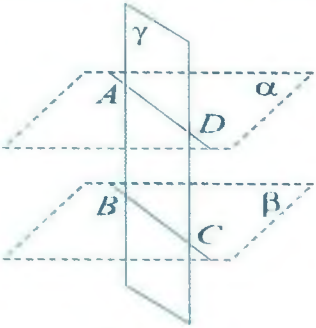
Расми 42

Теоремаи 10. Агар ду ҳамвории параллел бо ҳамвории сеюм бурида шаванд, он гоҳ хатҳои рости буриш параллел мебошанд (расми 42).

Исбот. Бигузор ва β ҳамвориҳои параллеланд ва хамвории γ онҳоро мебурад. Мувофиқан, хатҳои a ва b буриши γ бо α ва бо β мебошанд (расми 42). Хатҳои рости a ва b дар як ҳамворӣ ҷойгиранд. Агар онҳо параллел набошанд, пас нуқтаи умумӣ доранд. Ин нуқта ба ҳар ду ҳамвориҳои α ва β тааллуқ дорад. Ин номумкин аст, чунки онҳо параллеланд. Пас хатҳои рости a ва b параллеланд.

Татбиқи ин теоремаро дар ҳалли ду масъала нишон медиҳем.

Масъалаи 5. Маълум, ки нӯгҳои порчаҳои параллел дар ду ҳамвории бо ҳам параллел ҷойгиранд. Нишон медиҳем, ки онҳо бо ҳам баробаранд.

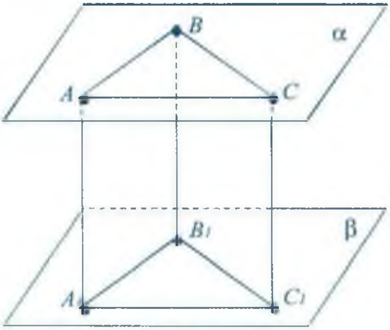


Расми 43

Ҳал. Бигузор α ва β ду ҳамвории параллел мебошанд, AB ва DC ду порчаи параллел, ки нуқтаҳои A,D ба α ва нуқтаҳои B,C ба β мутааллиқанд (расми 43). Хатҳои AB ва DC ҳамчун хатҳои параллел ҳамвории γ-ро муайян мекунанд. A ва D нуқтаҳои умумии ҳамвориҳои α ва γ ҳастанд. Барои ҳамин хати рости AD буриши ин ҳамвориҳост.

Чунин мулоҳизарониҳоро нисбати γ ва β такрор карда ҳосил мекунем, ки хати рости BC буриши γ ва β аст. Мувофиқи теоремаи 10 AD ба BC параллел мебошад, чунки α ба β параллел аст. Бар зами ин, мувофиқи шарт AB ба DC параллел аст. Пас $ABCD$ параллелограмм мебошад, яъне $AB=DC$.

Масъалаи 6. Аз қуллаи секунҷаи ABC, ки дар яке аз ду ҳамвории бо ҳам параллел ҷойгир аст, хатҳои рости параллел гузаронида шудаанд, ки онҳо ҳамвории дуюмро дар нуқтаҳои A_1, B_1, C_1 мебуранд. Нишон медиҳем, ки секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ баробаранд.



Расми 44

Ҳал. Шарти масъала ва теоремаи 10-ро истифода карда, чи тавре ҳангоми ҳалли масъалаи 5 амал карда будем рафтор намуда, параллелограмм будани чоркунҷаҳои ABB_1A_1 ва ACC_1A_1-ро муқаррар мекунем (расми 44). Барои ҳамин $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$. Баробар будани секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ аз аломати баробарии секунҷаҳо аз рӯи се тараф бармеояд.

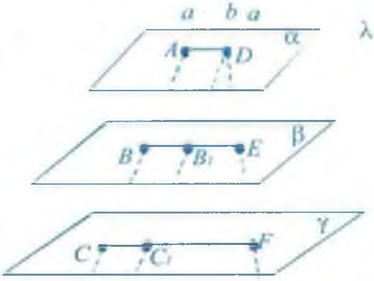
IV. Дар планиметрия теоремаи Фалесро нисбати хатҳои рости параллел ва хатҳои рости онҳоро мебуридагӣ дида баромада будем. Акнун теоремаи ба он монандро нисбати ҳамвориҳои параллел ва хатҳои рости онҳоро мебуридагӣ меорем.

Теоремаи 11. (Теоремаи Фалес дар фазо). **Агар ду хати рост бо ҳамвориҳои параллел бурида шаванд, он гоҳ порчаҳои дар байни ҳамвориҳо буда байни худ мутаносибанд.**

Исбот. Бигузор α, β, γ се ҳамвории байни худ параллел мебошанд. Хати рости a онҳоро мувофиқан дар нуқтаҳои A, B, C ва хати рости b дар нуқтаҳои D, E, F мебурад (расми 45).

Исбот кардан лозим, ки

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF} \qquad (1)$$



Расми 45

Расми 45

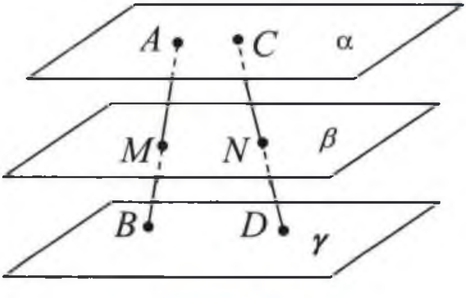
мебошад. Аз рӯи нуқтаи D хати рости a_1-ро, ки ба a параллел аст мегузаронем. Хати рости a ҳамвориҳои β ва γ-ро мебурад. Мувофиқи теоремаи 6 хати рости a_1 низ ин ҳамвориҳоро мебурад. Бигузор B_1 ва C_1 нуқтаҳои буришанд. Аз сабаби параллел будани α, β, γ ва инчунин параллелии a ва a_1 дорем (ниг. ба ҳалли масъалаи 5)

$$AB=DB_1, \qquad BC=B_1C_1. \qquad (2)$$

Хатҳои рости b ва a_1 ҳамдигарро мебуранд, биноан онҳо ҳамвории λ-ро муайян мекунанд. Аз сабаби параллелии β ва γ хати буриши λ бо β бо хати буриши λ бо γ параллел аст (теоремаи 10). Яъне, B_1E ба C_1F параллел буда, секунҷаҳои DB_1E ва DC_1F монанданд. Барои ҳамин

$$\frac{DB_1}{B_1C_1}=\frac{DE}{EF}.$$

Аз ин ҷо ва аз (2) баробарии (1) ҳосил мешавад. Теорема исбот шуд.



Расми 46

Масъалаи 7. Ҳамвориҳои α, β ва γ параллеланд. Онҳо бо ду хати ҳамдигарро мебуридагӣ мувофиқан дар нуқтаҳои A, M, B ва C, N, D бурида мешаванд (расми 46). Маълум, ки $AM=3см$, $AB=8см$ ва $ND=12см$ аст. Дарозии CN-ро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи теоремаи Фалес дорем $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}$.

Аз ин ҷо $CN=\frac{AM}{MB}\cdot ND=\frac{3}{5}\cdot 12=\frac{36}{5}=7{,}2см.$

1. Дар кадом ҳолат ду ҳамворӣ параллел номида мешаванд? Ҳамдигарро мебуридагӣ – чӣ? 2. Аломатҳои параллелии ҳамвориҳоро баён кунед. Дар айни ҳол ҳамдигарро буридани хатҳои рост дар онҳо магар муҳим аст? 3. Теоремаро дар бораи мавҷудият ва ягона будани ҳамвории параллел баён кунед. Хулосаҳои онро шарҳ дода, нақшаҳои заруриро кашед. 4. Доир ба буриши ҳамворӣ бо ҳамвориҳои параллел чӣ гуфтан мумкин аст? 5. Теоремаи Фалесро дар фазо шарҳ диҳед.

98. Исбот кунед, ки агар хати рост яке аз ду ҳамвориҳои параллелро бурад, он гоҳ дигарашро ҳам мебурад.

99. Ҳамвориҳои α ва β ҳамдигарро мебуранд. Исбот кунед, ки ҳар гуна ҳамвории γ ақаллан яке аз ин ҳамвориҳоро мебурад.

100. Аз рӯи қуллаҳои параллелограмми $ABCD$, ки дар яке аз ду ҳамвориҳои параллел ҷойгир аст, хатҳои рости параллел гузаронида шадааст. Ин хатҳои рост ҳамвории дуюмро дар нуқтаҳои A_1, B_1, C_1, D_1 мебуранд. Исбот кунед, ки чоркунҷаи $A_1B_1C_1D_1$ низ параллелограмм мебошад.

101. Исбот кунед, ки агар чор хати рост, ки аз рӯи нуқтаи A мегузаранд, ҳамвории α-ро дар қуллаҳои параллелограмм буранд, он гоҳ онҳо ҳар гуна ҳамвории ба α параллел буда ва аз нуқтаи A намегузаштагиро низ дар қуллаҳои параллелограмм мебуранд.

102. Ду ҳамвории параллел дода шудааст. Аз рӯи нуқтаҳои A ва B-и яке аз ин ҳамвориҳои параллел хатҳои рости параллел гузаронида шудаанд, ки онҳо ҳамвории дуюмро дар нуқтаҳои A_1 ва B_1 мебуранд. Дарозии порчаи A_1B_1 чанд аст, агар AB=4*см* бошад?

103. Се хати рост, ки аз рӯи як нуқта мегузаранд, ҳамвории додашударо дар нуқтаҳои A, B, C ва ҳамвории ба он параллелро дар нуқтаҳои A_1, B_1, C_1 мебуранд. Монандии секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$–ро исбот кунед.

104*. Се ҳамвории бо ҳам параллели α_1, α_2, α_3 дода шудаанд. Бигузор X_1, X_2, X_3 нуқтаҳои буриши ин ҳамвориҳо бо хати рости дилхоҳ аст. Исбот кунед, ки нисбати дарозии порчаҳо X_1X_2:X_2X_3 аз хати рост вобаста нест, яъне барои ҳар гуна ду хати рост якхела аст.

105. Ду ҳамвории бо ҳам параллел ва нуқтаи P-и дар байни онҳо ҷойгир буда дода шудаанд. Ду хати рости аз нуқтаи P мегузаштагӣ ҳамвории ба P наздиктар бударо дар нуқтаҳои A_1 ва A_2, ҳамвории дуртар бударо дар нуқтаҳои B_1 ва B_2 мебурад. Дарозии порчаи B_1B_2-ро ёбед, агар: 1) $A_1A_2=6\text{см}$ ва $PA_1:A_1B_1=3:2$; 2) $A_1A_2=10\text{см}$ ва $PA_1:A_1B_1=2:3$ бошад.

106. Бигузор $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеди росткунҷа аст (расми 47). Исбот намоед, ки нуқтаҳои A,C,B_1,D_1 дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд.

107. Исбот кунед, ки дар параллелепипеди росткунҷаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ҳамвориҳои A_1BD ва CB_1D_1 бо ҳам параллеланд.

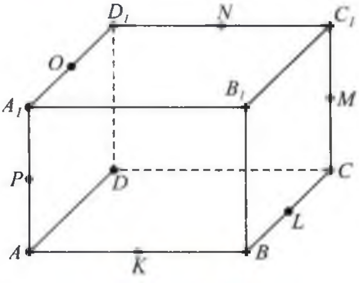
108. Исбот кунед, ки дар параллелепипеди росткунҷа диагонали AC_1 бо ҳамвориҳои A_1BD ва CB_1D_1 ба се порчаи баробар ҷудо карда мешавад.

109*. Бигузор K,L,M,N,O,P миёнаҷои тегаҳои дар расми 47 нишон додашудаи параллелепипед мебошанд. Исбот кунед, ки ин нуқтаҳо дар як ҳамворӣ ҷойгиранд.

Масъалаҳо барои такрор

110. Исбот кунед, ки хати рости AB ба ҳамвории CDA_1 параллел аст (расми 47).

111. Нуқтаҳои A,B,C,D дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд. Нуқтаҳои K,M,P миёнаҷои порчаҳои AB, BC, BD мебошанд. Исбот кунед, ки ҳамвории KMP ба хатҳои рости AC ва BD параллел аст.



Расми 47

112. Дар тарафи BC-и квадрати $ABCD$ нуқтаи дилхоҳи M гирифта шудааст. Биссектрисаи кунҷи DAM тарафи CD-ро дар нуқтаи N мебурад. Исбот кунед, ки $AM=BM+DN$ аст.

113. Дар секунҷаи ABC тарафи $BC=a$, $\angle B=\beta$, m_a – медианаи ба тарафи BC фаровардашуда маълуманд. Тарафҳои дигар ва кунҷҳои секунҷа ёфта шаванд.

§3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРИИ ХАТҲОИ РОСТ ВА ҲАМВОРИҲО ДАР ФАЗО

8. Перпендикулярии ду хати рост, хати рост ва ҳамворӣ. Перпендикуляр ба ҳамворӣ

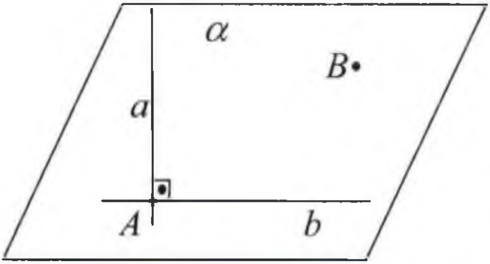
I. Дар қатори муносибати параллелӣ, дар геометрия *муносибати перпендикулярӣ* дорои мавқеи муҳим мебошад. Бар хилофи ҳолати ҳамворӣ, ки танҳо доир ба перпендикулярии ду хати рост сухан рондан мумкин буд, дар фазо се имконият ҳаст: перпендикулярии: а) ду хати рост; б) хати рост ва ҳамворӣ; в) ду ҳамворӣ. Инро дар мисоли параллелепипеди росткунҷа бараалло пайхас кардан мумкин аст. Мо акнун ин муносибатҳоро пай дар пай, аз перпендикулярии ду хати рост сар карда меомӯзем.

Чи тавре медонем, дар ҳамворӣ агар ҳангоми бурида шудани ду хати рост кунҷҳои рост ҳосил шаванд, он гоҳ онҳоро перпендикуляр меноманд. Баъд, дар ҳамворӣ аз нуқтаи додашуда, новобаста ба он ки вай дар хати рост ҷойгир аст ё на, ба хати рост перпендикуляр гузаронидан мумкин аст ва дар айни ҳол фақат якто. Чун дар ҳамворӣ таърифи зеринро дохил мекунем.

Таърифи 1. Ду хати рост дар фазо *перпендикуляр* номида мешаванд, агар онҳо дар зери кунҷи рост бурида шаванд.

Қайд мекунем, ки бурида шудани хатҳои рост дар ин таъриф ниҳоят муҳим аст.

Масъалаи мавҷудият ва ягона будани перпендикулярро ба хати рости *a* дар фазо, ки аз рӯи нуқтаи додашудаи *A* мегузарад меомӯзем.



Расми 48

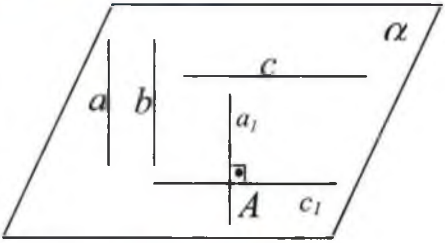
а) Бигузор нуқтаи *A* дар хати рости *a* ҷойгир аст (расми 48). Нуқтаи аз хати рости *a* беруни *B*-ро гирифта аз рӯи ин нуқта ва хати рости *a* ҳамвории α-ро мегузаронем (теоремаи 1) Дар ҳамвории α аз рӯи нуқтаи *A*, мувофиқи теоремаи планиметрӣ хати рости b-ро, ки ба a перпендикуляр аст, гузаронидан мумкин аст. Мо дида будем, ки аз рӯи як хати рост миқдори беохири ҳамвориҳоро гузаронидан мумкин аст (ниг. ба пункти 2). Дар ҳар яки ин ҳамвориҳо аз рӯи нуқтаи A ба хати рости a перпендикулярро гузаронидан мумкин аст. Онҳо гуногунанд, чунки дар ҳолати якхела будани онҳо ҳамвориҳо ҳамҷоя мешаванд, ки вазъ ин тавр нест. Ин перпендикулярҳо хатҳои ростанд, ки аз атрофи нуқтаи A мисли сихҳои чархи велосипед ҳамчун марказ сар мешаванд ва миқдорашон беҳисоб (беҳад бисёр) аст. Тавофути ҳолати фазогӣ аз ҳолати ҳамворӣ маҳз дар ҳамин аст.

б) Бигузор нуқтаи A берун аз хати рости a ҷойгир аст. Мувофиқи теоремаи 1 ягона ҳамвории α вуҷуд дорад, ки аз рӯи нуқтаи A ва хати рости a мегузарад. Дар ҳамвории α аз рӯи теоремаи планиметрӣ аз нуқтаи A ба хати рости a якто перпендикуляр гузаронидан мумкин аст. Мебинем, ки вазъ дар ин ҷо айнан бо вазъ дар ҳамворӣ якхела аст. Яъне, дар фазо ҳам аз нуқтаи берун аз хати рост ба он танҳо якто перпендикуляр гузаронидан мумкин аст.

Тасдиқи зерин хосияти хатҳои рости параллелро нисбати перпендикулярӣ муайян мекунад.

Теоремаи 12. Агар яке аз ду хатҳои рости параллел ба хати рости сеюм перпендикуляр бошад, он гоҳ хати рости дигарӣ ҳам ба ин хат перпендикуляр аст.

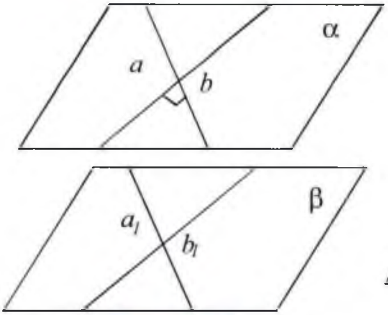
Исбот. Фарз мекунем, ки хатҳои рости a ва b параллеланд ва a ба хати рости c перпендикуляр мебошад (расми 49). Аз нуқтаи дилхоҳи фазо A хатҳои рости a_1 ва c_1-ро мегузаронем, ки онҳо ба a ва c мувофиқан параллеланд. Аз параллелии a_1 ва a, инчунин a ва b мувофиқи теоремаи 4 бармеояд, ки хатҳои рости a_1 ва b параллеланд. Яъне, кунҷи байни b ва c ба кунҷи байни a_1 ва c_1 баробар аст. Перпендикулярии хатҳои рости b ва c нишон дода шудааст.



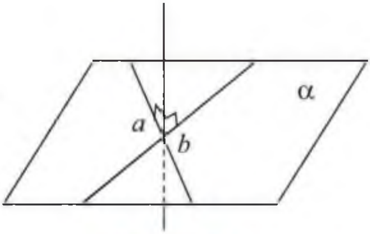
Расми 49

Хосияти зерини муҳими хатҳои рости перпендикулярро дар фазо **беисбот** меорем, гарчанде исботаш на он қадар мураккаб аст. Вай хосияти маълумро аз планиметрия дар фазо умумият мебахшад.

Теоремаи 13. Агар ду хати рости ҳамдигарро мебуридагӣ ба ду хати рости перпендикуляр мувофиқан параллел бошанд, он гоҳ онҳо низ перпендикуляранд (расми 50). Яъне, агар $a \perp b$, $a \| a_1$, $b \| b_1$ бошад, он гоҳ $a_1 \perp b_1$ аст.



Расми 50



Расми 51

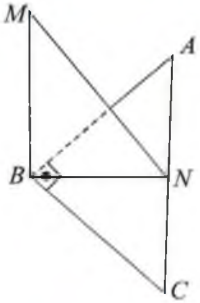
II. Акнун ба перпендикулярии хати рост ва ҳамворӣ машғул мешавем.

Таърифи 2. Хати росте, ки ҳамвориро мебурад, ба ин ҳамворӣ *перпендикуляр* номида мешавад, агар вай ба ҳар як хати росте, ки дар ин ҳамворӣ ҷойгир аст ва аз нуқтаи буриш мегузарад, перпендикуляр бошад (расми 51).

Расми 52

Чунин масъала мегузорем: чӣ тавр дар амалия перпендикулярии хати ростро ба ҳамворӣ муайян кардан мумкин аст? Барои ин ду санҷиш - гузоштани хаткашаки секунҷавӣ, чи тавре, ки дар расми 52 нишон дода шудааст, кифоя аст. Ин тарзи санҷиш ба чунин аломати перпендикулярии хати рост ва ҳамворӣ меорад, ки мо онро бе исбот қабул мекунем:

Теоремаи 14. Агар хати рост ба ду хати рости ҳамдигарро мебуридагии ҳамворӣ перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ба ҳамворӣ перпендикуляр аст.



Расми 53

Масъалаи 1. Дар секунҷаи росткунҷаи баробарпаҳлӯи ABC, $AB=BC=4см$ аст. Нуқтаи M дар ҳамвории ABC ҷойгир нест ва нуқтаи N миёнаҷои тарафи AC аст. Маълум, ки порчаи MB ба тарафҳои AB ва BC перпендикуляр буда, $MB = 2\sqrt{2}$ *см* мебошад (расми 53). Дарозии порчаи MN-ро меёбем.

Ҳал. Тарафи AC гипотенуза аст. Барои ҳамин мувофиқи теоремаи Пифагор

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\ см.$$

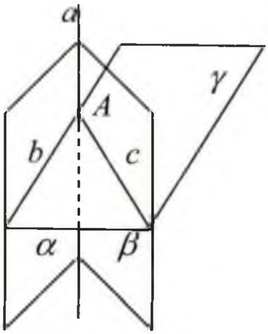
Аз сабаби он ки BN медиана мебошад дорем

$$BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{4^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{16-8} = 2\sqrt{2}\ см.$$

MB ба BC ва AB перпендикуляр мебошанд, барои ҳамин мувофиқи теоремаи 14 MB ба ҳамвории ABC перпендикуляр аст, яъне MB ба BN ҳам. Боз аз рӯи теоремаи Пифагор

$MN^2=MB^2+BN^2=8+8=16$. Аз ин ҷо $MN=4см$.

III. Акнун ба сохтани ҳамвории ба хати рост перпендикуляр, ки он аз нуқтаи додашуда мегузарад, машғул мешавем.

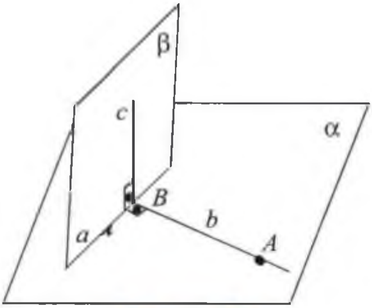


Расми 54

Масъалаи 2. Исбот мекунем, ки аз нуқтаи дилхоҳи фазо ягона ҳамвории ба хати рости додашуда перпендикуляр гузаронидан мумкин аст.

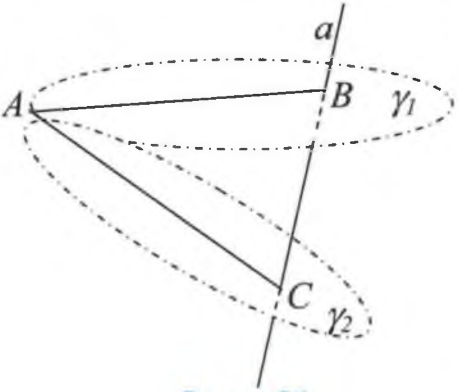
Ҳал. Мисли қисми I ду ҳолатро дида мебароем.

а) *Нуқта дар хати рост ҷойгир аст.* Бигузор хати рости *а* дода шудааст ва нуқтаи *А* дар он ҷойгир аст (расми 54). Ду ҳамвории гуногуни α ва β-ро мегирем, ки хати *а* хати буриши онҳо аст. Мисли қисми I хати рости *b*-ро дар ҳамвории α месозем, ки низ ба a перпендикуляр буда, аз нуқтаи A мегузарад. Мувофиқан, хати рости c-ро дар β месозем, ки низ ба a перпендикуляр буда, аз нуқтаи A мегузарад. Мувофиқи аксиомаи C_4 аз болои хатҳои рости b ва c ягона ҳамвории γ-ро гузаронидан мумкин аст. Инак, хати рости a ба ду хати рости ҳамдигарро мебуридагии b ва c-и ҳамвории γ перпендикуляр аст. Пас мувофиқи теоремаи 14 ҳамвории γ ва хати рости a байни худ перпендикуляранд.



Расми 55

б) *Нуқта дар хати рост ҷойгир нест.* Бигузор a хати додашуда ва A нуқтаи дар он ҷойгир набуда мебошанд (расми 55). Хати рости a ва нуқтаи A ҳамвории α-ро муайян мекунанд. Дар ҳамвории α хати рости b-ро месозем, ки аз рӯи нуқтаи A гузашта ба хати a перпендикуляр аст ва онро дар нуқтаи B мебурад (қисми I). Бигузор β ҳамвории дигарест, ки хати a-ро дар бар мегирад. Хати рости c-ро дар β месозем, ки a-ро дар нуқтаи B бурида, ба он перпендикуляр аст. Хатҳои рости b ва c ҳамдигарро дар нуқтаи B мебуранд, пас онҳо мувофиқи аксиомаи C_4 ҳамвории γ-ро яккимата муайян мекунанд. Аз сабаби перпендикулярии a ба ду хати b ва c-и ҳамдигарро мебуридагии ҳамвории γ, мувофиқи теоремаи 14 хати рости a ба ҳамвории γ перпендикуляр аст.



Расми 56

Акнун ягона будани чунин ҳамвориро нишон медиҳем. Баръаксашро фарз мекунем. Яъне фарз мекунем, ки чунин ҳамвориҳо ақаллан дутоанд. Онҳоро бо γ_1 ва γ_2 ишорат менамоем (расми 56). Бигузор B нуқтаи буриши хати рости a бо γ_1 ва C нуқтаи буриши ин хат бо γ_2 аст. Ҳамин тариқ, дар ҳамвории α ба хати рости a ду перпендикуляри гуногуни AB ва AC-ро ҳосил мекунем, ки ин ба теоремаи планиметрии оид ба ягона будани перпендикуляр дар як ҳамворӣ зиддият мекунад.

Масъала пурра ҳал карда шуд. Акнун ҳақ дорем, ки *далели умдаро* баён намоем:

Теоремаи 15. Аз нуқтаи дилхоҳи фазо ҳамвории ба хати рости додашуда перпендикулярро гузаронидан мумкин аст ва дар айни ҳол фақат якто.

Эзоҳ. Дар қисми I-и ҳамин пункт чи тавр ба хати рости додашуда сохтани хати рости перпендикулярро, ки аз нуқтаи додашуда мегузарад, нишон дода будем. Айнан ҳамин тавр масъалаи аз нуқтаи додашуда ба ҳамворӣ сохтани хати рости перпендикуляр ва ягона будани онро муоина кардан мумкин аст. Мо тарзи ин созишро намеорем, вале аз ин натиҷаи умда, яъне аз дурустии он, дар оянда истифода мекунем, масалан, дар қисми II-и пункти баъдина ва дар пункти 10.

1. Байни перпендикулярии хатҳои рост дар фазо ва дар ҳамворӣ чӣ фарқият ҳаст? **2.** Теоремаи умумиро доир ба мавҷудият ва ягонагии перпендикуляри ба хати рости додашуда аз нуқтаи додашуда гузаронидашударо баён кунед. Тасдиқот доир ба мавҷудият ва ягонагӣ оё дуруст аст, агар хатҳои рост дар фазо муоина шаванд? **3.** Дар теоремаи доир ба хатҳои росте, ки ба хатҳои рости перпендикуляр параллеланд, чӣ тасдиқ карда мешавад? **4.** Таъриф ва аломати перпендикулярии хати рост ва ҳамвориро дар фазо оред. Бартарии аломат (теоремаи 14) нисбати таъриф дар чӣ ҳозир мегардад? **5.** Мавҷудият ва ягонагии ҳамвориеро, ки аз нуқтаи додашуда гузашта ба хати рост перпендикуляр аст, исбот намоед.

114. Оё тасдиқ кардан мумкин аст, ки хати росте, ки доирaро дар марказ мебурад ва ба: а) диаметр; б) ду диаметр; в) радиус; г) ду радиус перпендикуляр аст, ба ҳамвории доира перпендикуляр мебошад?

115. Аз нуқтаи A-и хати рости a ҳамвории β ва хати рости b гузаронида шудаанд, ки ҳар дуи онҳо ба a перпендикуляранд. Исбот кунед, ки хати рости b дар ҳамвории β ҷойгир аст.

116. Дар фазо се хати ростеро созед, ки онҳо аз рӯи як нуқта гузашта, ҷуфт-ҷуфт перпендикуляр бошанд.

117. Нуқтаҳои K ва M миёнаҷои тегаҳои AB ва DC-и тетраэдри рости $ABCD$ мебошанд. Исбот кунед, ки хати рости KM ба хатҳои рости AB ва CD перпендикуляр аст.

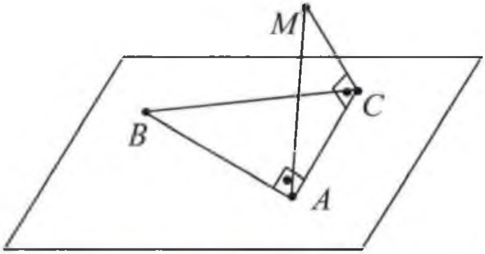
118. Секунҷаи росткунҷаи ABC дода шудааст. Нуқтаи M берун аз ҳамвории секунҷа ҳамин тавр ҷойгир аст, ки хати рости MA ба AB ва хати рости MC ба AC перпендикуляранд. Исбот кунед, ки ҳамвории секунҷаи ABC ба MC перпендикуляр аст (расми 57).

Масъалаҳо барои такрор

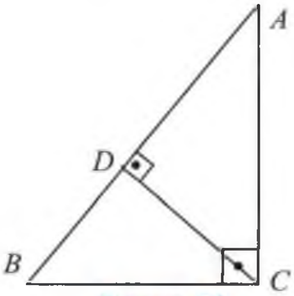
119. Чор хати рости параллел дода шудааст. Исбот кунед, ки агар ягон ҳамворӣ ин хатҳои ростро дар қуллаҳои параллелограмм бурад, он гоҳ ҳамворие, ки ба ин хатҳои рост параллел нест, ин хатҳоро дар нуқтаҳои ягон параллелограмм мебурад.

120. Яке аз катетҳои секунҷаи росткунҷаи ABC ба 15см ва BD - проектсияи катети дигар ба гипотенузаи AB ба 16*см* баробар аст (расми 58). Радиуси давраи дарункашидаи секунҷаро ёбед.

121. Баландии ромб ба 10*см*, кунҷи тезаш ба 30^0 баробар аст. Масоҳати ромбро ёбед.



Расми 57

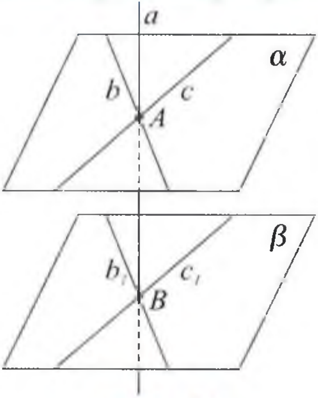


Расми 58

9. Теоремаҳо дар бораи ду перпендикуляр. Перпендикуляр ва моил ба ҳамворӣ

I. Ба ду савол ҷавоб медиҳем: 1) доир ба хати росте, ки ба яке аз ҳамвориҳои параллел перпендикуляр аст, чӣ гуфтан мумкин аст? 2) доир ба перпендикулярҳо ба як ҳамворӣ чӣ гуфтан мумкин аст? Ҷавобҳо ва тарзи асосноккунии онҳо ба ин ду савол дар теоремаҳои зерин омадааст, ки онҳо ҳамчун теоремаҳо дар бораи ду перпендикуляр маъмуланд.

Теоремаи 16. Агар хати рост ба яке аз ду ҳамвориҳои бо ҳам параллел перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ба дигараш ҳам перпендикуляр аст.



Расми 59

Исбот. Фарз мекунем, ки α ва β ду ҳамвории параллел буда, хати рости a ба α перпендикуляр аст (расми 59). Нишон медиҳем, ки a ба β ҳам перпендикуляр мебошад. Аз сабаби перпендикулярии хати рости a ба α вай α-ро дар нуқтаи A мебурад. Мувофиқи хулосаи 4-и теоремаи 9 хати рости a бо ҳамвории параллел β дар нуқтаи B буриш дорад.

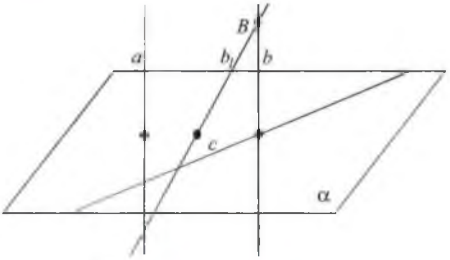
Дар ҳамвории α хатҳои рости b ва c-ро, ки дар нуқтаи A ҳамдигарро мебуранд мегирем. Бигузор b_1 хати буриши ҳамвории β бо ҳамворие, ки онро хатҳои a ва b муайян мекунанд мебошад. Мувофиқан, бигузор c_1 хати буриши β бо ҳамворие, ки аз рӯи хатҳои рости a ва c муайян мешавад аст. Мувофиқи теоремаи 10 агар ҳамвориҳои пераллел бо ҳамвории сеюм бурида шаванд, он гоҳ хатҳои буриш параллеланд, яъне b_1 ба b ва c_1 ба c параллел мебошанд. Азбаски хати a ба α перпендикуляр аст, пас мувофиқи таъриф вай ба хатҳои b ва c перпендикуляр мебошад. Аз ин бармеояд, ки хати рости a ба хати рости ба онҳо параллели b_1 ва c_1 низ перпендикуляр аст. Инак, хати рости a ба ду хати рости ҳамдигарро мебуридагии ҳамвории β перпендикуляр мебошад. Аз ин ҷо мувофиқи теоремаи 14 a ба β перпендикуляр аст. Теорема пурра исбот шуд.

Теорема 17. Агар яке аз хатҳои рости параллел ба ҳамворӣ перпендикуляр бошад, он гоҳ хати рости дигарӣ ҳам ба ин ҳамворӣ перпендикуляр аст.

Исбот. Бигузор хатҳои рости a ва b бо ҳам паралеланд, α ҳамвориест, ки хати рости a ба он перпендикуляр мебошад. Нишон додан даркор, ки хати рости b ба α низ перпендикуляр мебошад.

Аз сабаби он ки a ба α перпендикуляр мебошад, a ба ҳар як хати дар α ҷойгирбуда перпендикуляр мебошад. Мувофиқи теоремаи 12 хати рости b низ ба ҳар як хати рости дар α ҷойгир буда перпендикуляр аст. Мувофиқи таърифи перпендикулярии хати рост ба ҳамворӣ хати b ба α перпендикуляр мебошад. Теорема исбот шуд.

Теоремаи 18. Ду хати росте, ки ба ҳамон як ҳамворӣ перпендикуляранд, параллел мебошанд.



Расми 60

Исбот. Бигузор a ва b ду хати росте мебошанд, ки ба ҳамвории α перпендикуляранд (расми 60). Фарз мекунем, ки тасдиқи теорема нодуруст аст, яъне a ва b параллел нестанд. Дар хати b нуқтаи B-ро, ки ба α тааллуқ надорад мегирем ва аз рӯи он хати рости b_1-и ба a параллелро мегузаронем. Агар хатҳои b_1 ва b ҳамҷоя нашаванд, он гоҳ аз рӯи онҳо ягона ҳамвории β-ро гузаронида метавонем. Бигузор хати рости c буриши ҳамвориҳои α ва β мебошад. Азбаски b_1 ба a параллел ва a ба α перпендикуляр аст, пас мувофиқи теоремаи 17 b_1 ба α перпендикуляр аст, яъне b_1 ба c перпендикуляр аст. Вале b ба α перпендикуляр аст, мувофиқи шарт. Ҳамин тариқ, аз нуқтаи B ба ҳамвории α дуто перпендикуляр (b ва b_1) мегузарад, ки ин номумкин аст. Пас b_1 бо b ҳамҷоя мешаванд. Ин параллелии a ва b-ро нишон медиҳад. Теорема исбот шуд.

Масъалаи 1. Нишон медиҳем, ки агар ҳамвориҳои α ва β ба хати рости a перпендикуляр бошанд, он гоҳ онҳо параллеланд.

Ҳал. Аз сабаби перпендикулярии хати a ба α ва β ин хат онҳоро мебурад. Бигузор A ва B нуқтаҳои буришанд. Фарз мекунем, ки α ва β параллел нестанд, яъне нуқтаи умумии M-ро доранд. Хати AM дар α ҷойгир аст, барои ҳамин a ба AM перпендикуляр аст. Мисли ҳамин, BM дар β буда, a ба BM перпендикуляр мебошад. Ҳамин тариқ, секунҷаи ABM дорои ду кунҷи рост аст, ки ин имконнопазир аст. Инак, ҳамвориҳои α ва β нуқтаи умумӣ надоранд, яъне онҳо параллеланд.

Эзоҳ. Амалан бо ҳалли масъалаи 1 нишон додаем, ки теоремаи 18 дуруст аст, агар дар он ба ҷои ду хати рост ду ҳамворӣ ва ба ҷои ҳамворӣ хати рост муоина карда шавад. Ҳаминро нисбати теоремаҳои 16 ва 17 ҳам гуфтан ҷоиз аст.

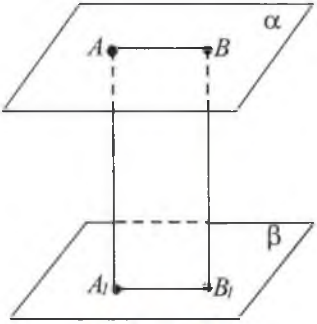
II. Мафҳуми *масофаро дар фазо* муайян мекунем. Чи тавре медонем масофа аз нуқтаи A то хати рости a дар ҳамворӣ дарозии перпендикуляри AB, ки аз нуқтаи A ба нуқтаи B-и хати рости a гузаронида шудааст мебошад. Айнан ҳамин тавр мафҳуми масофа аз нуқта то ҳамворӣ дар фазо дохил карда мешавад.

Таърифи 1. *Перпендикуляр* гуфта порчаеро меноманд, ки аз нуқтаи додашуда ба ҳамвории додашуда гузаронида шуда, дар хати росте ҷойгир аст, ки ба ҳамворӣ перпендикуляр мебошад. Охири ин порча, ки дар ҳамворӣ ҷойргир аст, *асоси перпендикуляр* ном дорад. *Масофа аз нуқта то ҳамворӣ* гуфта дарозии перпендикуляри аз ин нуқта ба ҳамворӣ гузаронидашударо меноманд.

Таърифи мазкур ба натиҷаи умдае, ки дар эзоҳи қисми III-и пункти 8 беисбот оварда шудааст, такя менамояд. Аз он ва аз сабаби ягона будани перпендикуляр, бармеояд, ки масофа *якқимата* муайян карда мешавад.

Баъд, аз теоремаи 18 бармеояд, ки масофа аз ду нуқтаи гуногуни хати рост то ҳамвории ба вай параллел аз интихоби нуқтаҳо вобаста набуда якхела аст. Барои ҳамин табиӣ аст, агар *масофаро аз хати рост то ҳамвории ба вай параллел* ҳамчун масофаи нуқтаи дилхоҳи хати ростро то ҳамворӣ қабул намоем. Масалан, вақте мегӯянд, ки симҳои троллейбус аз замин 5 метр аст, ин маънои онро дорад, ки масофаи байни хатҳои рост (сим) ва ҳамворӣ (сатҳи замин), ки ба он параллел аст, 5 метр мебошад.

Масофаи байни ду хати рости параллел ҳам айнан ҳамин хел, ҳамчун масофа аз нуқтаи дилхоҳи як хати рост то хати рости дигар дохил карда мешавад. Дар ин ҷо ҳам масофа аз интихоби нуқта дар яке аз ин хатҳои рост вобастагӣ надорад. Чунки аз рӯи ин ду хати рост мувофиқи аксиомаи C_2 танҳо якто ҳамворӣ мегузарад ва дар ин ҳамворӣ масъалаи ёфтани масофаи ду хати рости параллел масъалаи планиметрӣ аст.

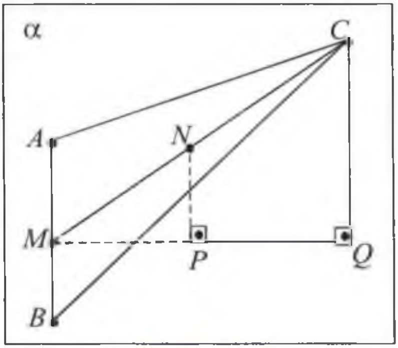


Расми 61

Акнун мафҳуми *масофаи байни ду ҳамвориҳои параллелро* дохил мекунем. Дар ҳамвориҳои бо ҳам параллели α ва β мувофиқан нуқтаҳои дилхоҳи A, B ва A_1, B_1-ро чунон интихоб мекунем, ки хатҳои AA_1 ва BB_1 ба β перпендикуляр бошанд (расми 61). Мувофиқи теоремаи 18 ин хатҳо параллеланд, пас мувофиқи аксиомаи C_2 аз болои онҳо ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст. Ин ҳамворӣ ҳамвориҳои α ва β-ро аз рӯи хатҳои рости параллели AB ва A_1B_1 мебурад. Яъне ABB_1A_1 росткунҷа аст. Пас $AA_1=BB_1$. Аз сабаби дилхоҳ будани нуқтаҳо аз ин ҷо бармеояд, ки масофа аз ягон нуқтаи α ё β то ҳамвории дигар бузургии доимӣ мебошад. Ин далел имконият медиҳад, ки масофаи байни ду ҳамвории параллел ҳамчун масофаи нуқтаи дилхоҳи якеи онҳо то ҳамвории дигарӣ дохил карда шавад.

Мисоли ҳамвориҳои параллел, масалан, ҳамвориҳои фарш ва шифти хона мебошад. Ҳар як нуқтаи шифт дар масофаи баробар аз фарш ҷойгир аст. Ин масофа баландии хона аст.

Масъалаи 2. Тарафи AB-и секунҷаи ABC дар ҳамвории α ҷойгир аст. Масофаи маркази секунҷа то ҳамвории α 4см аст. Масофаро аз нуқтаи C то ҳамвории α меёбем.

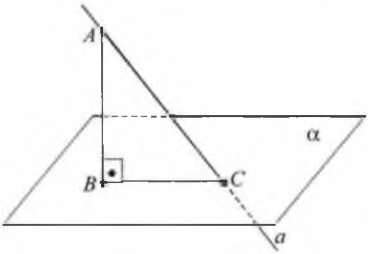


Расми 62

Ҳал. Бо M миёначои тарафи AB, бо N маркази секунча, бо P ва Q асоси перпендикулярҳои аз нуқтаҳои N ва C ба α фаровардашударо ишорат мекунем (расми 62). Нуқтаҳои C, M ва N дар як хати рост ҷойгиранд. Хатҳои рости NP ва CQ ҳамчун хатҳои ба α перпендикуляр параллеланд (теоремаи 18), яъне дар як ҳамворӣ ҷойгиранд. Ин бошад монандии секунҷаҳои MNP ва MCQ-ро нишон медиҳад, яъне $\frac{NP}{CQ}=\frac{MN}{MC}$ ва аз ин ҷо $CQ=\frac{MC}{MN}\cdot NP$. Мувофиқи хосияти медиана $\frac{MN}{MC}=\frac{1}{3}$ ё $\frac{MC}{MN}=3$. Ин баробарӣ ва шарти масъаларо истифода карда меёбем *CQ=3·4=12см.*

III. Якчанд мафҳуми навро дохил мекунем.

Таърифи 2. Хати росте, ки ҳамвориро бурида ба он перпендикуляр нест, *хати рости моил* ном дорад. Ҳар гуна порчаи ин хат, ки яке аз охирҳояш (нӯгҳояш) дар ҳамворӣ ҷойгир аст, *моил* номида мешавад. Порчае, ки нуқтаҳои асосҳои перпендикуляр ва моили аз худи ҳамон як нуқта гузаронидашударо пайваст мекунад, *проектсияи моил* ном дорад. Дар расми 63 аз нуқтаи A ба ҳамвории α перпендикуляри AB ва моили AC гузаронида шудааст. Нуқтаи B асоси перпендикуляр, нуқтаи C асоси моил, BC проектсияи моили AC дар ҳамвории α аст. Баъзан BC-ро проектсияи *ортогоналии моил* ҳам меноманд, чунки ҳар гуна



Расми 63

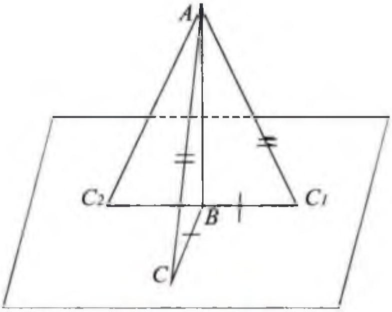
нуқтаи порчаи BC нуқтаи буриши перпендикуляри аз нуқтаи порчаи AC ба ҳамвории α гузаронидашудагӣ мебошад.

Мисли планиметрия дар фазо ҳам теоремаи зерин ҷой дорад:

Теоремаи 19. Бигузор аз нуқтае, ки дар ҳамворӣ ҷойгир нест, перпендикуляр ва моилҳо ба ҳамворӣ гузаронида шудаанд. Он гоҳ: 1) моилҳое, ки проектсияи баробар доранд, баробаранд; 2) аз ду моил ҳамонаш калон аст, ки дорои проектсияи калон аст; 3) перпендикуляр аз ҳар гуна моил хурд аст.

Исбот. Аз нуқтаи A-и берун аз ҳамворӣ перпендикуляри AB, моилҳои AC, AC_1 ва AC_2-ро мегузаронем. Моил, проектсияи он ва перпендикуляр дар як ҳамворӣ ҷойгиранд ва секунҷаи росткунҷаи ABC-ро ташкил медиҳанд (расми 64), бинобар ин онҳо байни худ бо теоремаи Пифагор алоқаманданд:

$$AC^2=BC^2+AB^2;$$
$$AC_1^2=BC_1^2+AB^2;$$
$$AC_2^2=BC_2^2+AB^2.$$

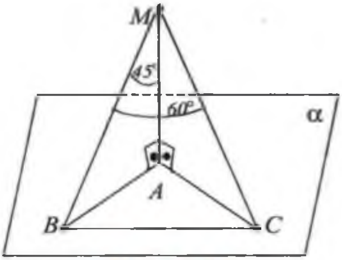


Расми 64

Аз ин ҷо, агар $BC=BC_1$ бошад, пас $AC=AC_1$.

Баъд, агар $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}<BC_2=\sqrt{AC_2^2-AB^2}$ бошад, он гоҳ $AC<AC_2$. Дар охир, аз баробарии $AC^2=BC^2+AB^2$, бармеояд ки $AB<AC$ аст. Теорема исбот шудааст.

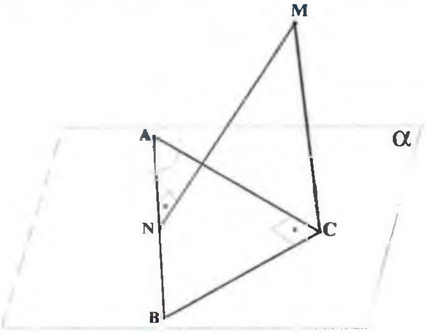
Масъалаи 3. Секунҷаи баробарпаҳлуи ABC $(AB=AC)$ дар ҳамвории α ҷойгир аст. Нуқтаи A асоси перпендикуляри аз нуқтаи M ба α гузаронидашуда мебошад. Маълум, ки дарозии перпендикуляр $3\sqrt{2}$ *см* буда, кунҷҳои BMA ва BMC мувофиқан ба 45^0 ва 60^0 баробаранд. Дарозии BC-ро меёбем.



Расми 65

Ҳал. Моилҳои MB ва MC-ро мегузаронем (расми 65). Аз баробарии тарафҳои AB ва AC ва инчунин теоремаи 19 бармеояд, ки ин моилҳо бо ҳам баробаранд. Кунҷи BMC 60^0 аст, пас секунҷаи MBC баробартараф мебошад, яъне $BC=BM=MC$. Аз секунҷаи росткунҷаи ABM дорем $\frac{AM}{BM}=\cos 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $BM=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot AM=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot 3\sqrt{2}=6$ см. Ҳамин тариқ, $BC=BM=6$*см*.

Масъалаи 4. Аз нуқтаи M ба қуллаи кунҷи рости C ва миёнаҷои тарафи AB-и секунҷаи росткунҷаи ABC, ки дар ҳамвории α воқеъ аст, перпендикулярҳо гузаронида шудаанд. Кунҷи A-ро меёбем.

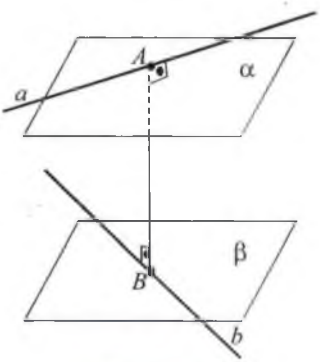


Расми 66

Ҳал. Бигузор N миёнаҷои тарафи AB-и секунҷаи росткунҷаи ABC аст (расми 66). Азбаски $AN=NB$ мебошад, пас мувофиқи теоремаи 19 $MA=MB$. Аз перпендикулярии MC ба α бармеояд, ки MC ба CA ва CB перпендикуляр аст. Мувофиқи теоремаи Пифагор $CA=\sqrt{MA^2-MC^2}$, $CB=\sqrt{MB^2-MC^2}$. Вале $MA=MB$, пас $CA=CB$. Инак, ABC секунҷаи росткунҷаи баробарпаҳлӯ мебошад. Аз ин ҷо $\angle A=45^0$.

IV. Аз мафҳумҳои имконпазири масофаҳо дар фазо (масофа аз нуқта то хати рост ё то ҳамворӣ, масофаи байни хатҳои рости параллел ё ҳамвориҳои параллел) дохил кардани мафҳуми масофаи байни хатҳои чиликӣ монда аст.

Таърифи 3. *Перпендикуляри умумии* ду ҳамвории параллел гуфта порчаеро меноманд, ки охирҳояш (нӯгҳояш) дар ин ҳамвориҳо ҷойгир буда, ба ҳар кадоми ин ҳамвориҳо перпендикуляр аст. Аз ин ҷо ва аз таърифи масофаи байни ду ҳамвориҳои параллел бармеояд, ки ин масофа ба дарозии перпендикуляри умумии ин ду ҳамворӣ баробар аст.



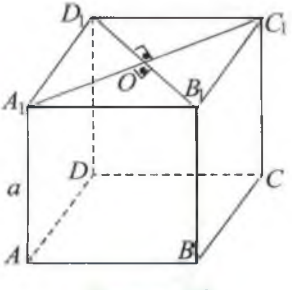
Расми 67

Бигузор a ва b ду хати рости чиликӣ мебошанд (расми 67). Нишон додан мумкин аст, ки аз рӯи онҳо ягона ҷуфти ҳамвориҳои параллели α ва β-ро гузаронидан мумкин аст (натиҷаҳои пункти 7-ро истифода карда). Масофаи байни ин ду ҳамвории параллел ҳамчун масофаи байни хатҳои рости чиликӣ қабул карда мешавад. Чи тавре ки ҳоло ҳозир гуфта шуд, вай ба дарозии перпендикуляри умумии ин ҳамвориҳо баробар аст. Агар охирҳои перпендикуляри умумии ин ҳамвориҳо дар ин хатхои рост ҷойгир бошанд, он гоҳ вай *перпендикуляри умумии ду хати рости чиликӣ номида мешавад.*

Инак, *масофаи байни ду хати рости чиликӣ* ба дарозии перпендикуляри умумии онҳо баробар аст. Дар расми 67 масофаи байни хатҳои рости чиликии a ва b ба дарозии порчаи AB, ки ба ҳамвориҳои α ва β перпендикуляр буда, охирҳояш дар хатҳои a ва b ҷойгиранд, баробар мебошад.

Исбот кардан мумкин аст, ки **ду хати рости чиликӣ перпенндикуляри умумӣ доранд ва дар айни ҳол фақат якто**. Мо исботи ин тасдиқотро наоварда, фақат ҳаминро қайд мекунем, ки аз он яккимата будани масофаи байни ду хати рости чиликӣ бармеояд.

Масъалаи 5. Теғаи куб ба a баробар аст. Масофаи байни хатҳои рости CC_1 ва B_1D_1-ро меёбем (расми 68).



Расми 68

Ҳал. Диагонали A_1C_1-и рӯяи $A_1B_1C_1D_1$-ро мегузаронем. Хати рости A_1C_1 ба хатҳои рости C_1C ва B_1D_1, ки низ аз рӯи диагонали рӯя мегузарад, перпендикуляр мебошад.

Перпендикуляри умумӣ барои ин ду хати рост порчаи C_1O мешавад. Секунҷаи OB_1C_1 росткунҷа ва баробарпаҳлӯ аст. Барои ҳамин кунҷҳои назди асоси B_1C_1 ба 45^0 баробар мебошанд. Пас $OC_1 = B_1C_1 \cdot \sin 45^0 = \frac{a}{2}$.

1. Теоремаҳоро дар бораи ду перпендпикуляр баён кунед. Ҷавоби кадом масъалаҳо дар онҳо мавҷуд аст? **2.** Масофа аз нуқта то ҳамворӣ, аз хати рост то ҳамвории ба он параллел, байни ду ҳамвории бо ҳам параллел чӣ тавр муайян карда мешавад? **3.** Перпендикуляр ва моил ба ҳамворӣ чӣ аст? Асоси онҳо – чӣ? Проектсияи моил – чӣ? **4.** Дарозиҳои перпенгдикуляр, моил ва працтсияи он бо ҳамдигар чӣ гуна алоқамандӣ доранд? **5.** Байни дарозии ду моил, ки аз як нуқта гузаронида шудаанд ва дарозии проектсияи онҳо чӣ хел алоқамандӣ вуҷуд дорад? **6.** Перпендикуляри умумии ду хати рости чиликӣ чӣ тавр муайян карда мешавад? Масофаи байни ин хатҳои рост – чӣ?

122. Исбот кунед, ки агар хати рост ба ҳамворӣ параллел бошад, он гоҳ ҳамаи нуқтаҳои он аз ҳамворӣ дар як хел масофа ҷойгиранд.

123. Исбот кунед, ки масофа аз ҳар як нуқтаи ҳамворӣ то ҳамвории ба он параллел якхела аст.

124. Исбот кунед, ки агар хати рост ва ҳамворӣ параллел бошанд, он гоҳ онҳо перпендикуляри умумӣ доранд.

125. Магар ду тарафи секунҷа ба як ҳамворӣ перпендикуляр шуда метавонад? Ду тарафи трапетсия – чӣ?

126. Охирҳои порчаи додашуда, ки ҳамвориро намебурад, аз ҳамворӣ дар масофаи 0,3*м* ва 0,5*м* ҷойгиранд. Нуқтае, ки ин порчаро бо нисбати 3:7 мебурад, дар кадом масофа ҷойгир аст?

127. Аз миёнаҷои порча ҳамворӣ гузаронида шудааст. Исбот кунед, ки охирҳои ин порча аз ин ҳамворӣ дар масофаи якхела ҷойгиранд.

128. Масофаро аз миёнаҷои порчаи AB то ҳамворӣ, ки ин порчаро намебурад ёбед, агар масофа аз нуқтаҳои A ва B то ҳамворӣ ба: 1) 3*м* ва 5*м* ; 2) a ва b баробар бошад.

129. Аз рӯи тарафи параллелограмм ҳамворӣ гузаронида шудааст, ки вай аз тарафи муқобил хобидаи параллелограмм дар масофаи *a* ҷойгир аст. Масофаро аз нуқтаи буриши диагоналҳои параллелограмм то ин ҳамворӣ ёбед.

130. Сими телефон, ки дарозиаш 15*м* аст, аз симчуб то боми хона кашида шудааст. Сим дар симчуб дар баландии 8*м* ва дар бом дар баландии 20*м* баста шудааст. Масофаи байни симчуб ва боми хонаро ҳисоб кунед, агар маълум бошад, ки сим хам намезанад.

131. Масофа аз нуқтаи *A* то қуллаи квадрат ба *a* баробар аст. Масофаро аз нуқтаи *A* то ҳамвории квадрат ёбед, агар тарафи квадрат ба *b* баробар бошад.

132. Аз нуқта ба ҳамворӣ ду моил, ки яке аз дигараш 26*см* калон аст, гузаронида шудааст. Проектсияи моилҳо ба 12*см* ва 40*см* баробаранд. Дарозии моилҳо ёфта шавад.

133. Аз нуқта ба ҳамворӣ ду моил гузаронида шудааст. Дарозии моилҳоро ёбед, агар онҳо ҳамчун 1:2 нисбат дошта, проектсияи моилҳо 1*см* ва 7*см* бошад.

134. Аз нуқтаи додашуда ба ҳамворӣ ду хати рости моили дарозиашон 2*м* гузаронида шудааст. Масофаро аз нуқта то ҳамворӣ ёбед, агар моилҳо байни худ кунҷи 60^0-ро ташкил дода, проектсияашон бо ҳам перпендикуляр бошанд.

135.* Аз рӯи як тарафи ромб дар масофаи 4*м* аз тарафи муқобил ҳамворӣ гузаронида шудааст. Проектсияи диагоналҳои ромб ба ин ҳамворӣ ба 8*м* ва 2*м* баробар аст. Проектсияи тарафҳоро ёбед.

136.* Дар секунҷаи баробарпаҳлу асос ва баландӣ ба 4*м* баробаранд. Нуқтаи додашуда дар масофаи 6м аз ҳамвории секунҷа ва аз қуллаҳои секунҷа дар масофаҳои баробар ҷойгир аст. Ин масофаҳоро ёбед.

137. Тегаи куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ 2*м* аст. Масофаи байни хатҳои рости: 1) AB ва CC_1; 2) CC_1 ва BD-ро ёбед.

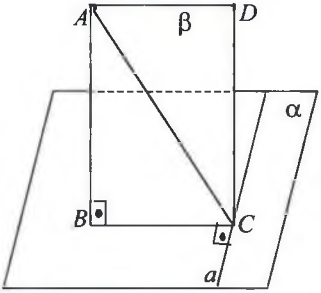
Масъалаҳо барои такрор

138. Дар тарафҳои AB=6*см* ва BC=8*см*-и росткунҷаи $ABCD$ нуқтаҳои M ва N тавре гирифта шудаанд, ки порчаи MN ба порчаи AC параллел мебошад. Маълум, ки периметри бисёркунҷаи $AMNCD$ ба периметри секунҷаи MBN ҳамчун 7:3 нисбат дорад. Дарозии порчаи MN-ро ёбед.

139. Тарафҳои секунҷа a,b,c дода шудаанд. Кунҷҳои онро ёбед.

10. Теорема дар бораи се перпендикуляр

Теоремаи 20. Барои он ки хати рости дар ҳамворӣ ҷойгир ва аз асоси моил мегузаштагӣ ба моил перпендикуляр бошад, зарур ва кифоя аст, ки вай ба проектсияи ҳамин моил перпендикуляр шавад.



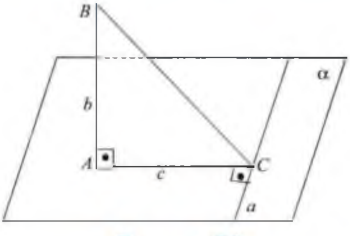
Расми 69

Исбот. а) *Шарти кифоягӣ.* Исбот кардан лозим, ки агар хати рост аз асоси моил гузашта ба проектсияи ҳамин моил перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ба худи моил низ перпендикуляр мебошад. Яъне, агар AB – перпендикуляр ба ҳамвории α бошад, AC – моил , BC – проектсияи моил ва a хати ростест, ки дар ҳамвории α ҷойгир буда, аз асоси моил C мегузарад (расми 69) бошанд, он гоҳ нишон додан лозим аст, ки ҳангоми $a \perp CB$ будан, $a \perp AC$ аст. Аз нуқтаи C-и ҳамвории α хати рости CD-ро, ки ба α перпендикуляр аст мегузаронем (ниг. ба эзоҳи қисми III-и п.8). Мувофиқи теоремаи 18 вай ба хати рости AB параллел аст. Аз рӯи ин ду хати рости параллел ҳамвории β-ро мегузаронем. Хати рости a ба хати рости CD перпендикуляр аст, зеро аз нуқтаи буриши CD бо ҳамвории α гузашта дар он ҷойгир аст. Ҳамин тариқ, хати рости a бо ду хати рости ҳамдигарро мебуридагии ҳамвории β (CB ва CD) перпендикуляр аст. Пас мувофиқи теоремаи 14 хати рости a ба ҳамвории β перпендикуляр аст. Аз сабаби дар ҳамвории β ҷойгир будани моили AC ва хати рости a-ро буриданаш, моил ва ин хат перпендикуляранд. Шарти кифоягӣ исбот шуд.

б) *Шарти зарурӣ.* Исбот кардан лозим, ки агар хати рост аз асоси моил гузашта ба моил перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ба проектсияи моил низ перпендикуляр мебошад. Яъне, агар $a \perp AC$ бошад, он гоҳ $a \perp BC$ мешавад. Боз ҳосил мекунем, ки хати рости a ба ду хати рости AC ва CD-и ҳамвории β, ки ҳамдигарро дар нуқтаи C мебуранд, перпендикуляр аст. Яъне, мувофиқи теоремаи 14 хати рости a ба ҳамвории β перпендикуляр мебошад. Бинобар ин хати рости a ба проектсияи моил BC, ки дар β ҷойгир аст, перпендикуляр мешавад. Шарти зарурӣ ва бо он теорема пурра исбот карда шуд.

Акнун масъалаеро муоина мекунем, ки дар ҳалли он теорема дар бораи се перпендикуляр истифода мешавад.

Масъала. Аз охири A-и порчаи AB, ки дарозиаш b аст, ҳамвории бо порча перпендикуляр ва дар ин ҳамворӣ хати рости a гузаронида шудааст. Масофаро аз нуқтаи B то хати рост меёбем, агар масофа аз нуқтаи A то хати рост ба c баробар бошад.



Расми 70

Ҳал. Хати рости BC-ро, ки ба a перпендикуляр аст мегузаронем (расми 70). AC – проектсияи моили BC мувофиқи теорема дар бораи се перпендикуляр низ ба a перпендикуляр мебошад, барои ҳамин $AC = c$ аст. Баъд, азбаски BA ба ҳамвории α перпендикуляр аст, пас кунҷи BAC рост мебошад ва аз рӯи теоремаи Пифагор

$$BC^2 = AB^2 + CA^2.$$

Ҳамин тариқ, масофаи матлуб ба $BC = \; b^2 + c^2$ баробар аст, чунки $AB=b$ ва $CA=c$ мебошанд.

1. Теоремаро дар бораи се перпендикуляр баён намоед. 2. Дар исботи ин теорема дар куҷо ва чӣ тавр теоремаҳо дар бораи ду перпендикуляр (теоремаи 18) ва аломати перпендикулярии хати рост ва ҳамворӣ (теоремаи 14) истифода карда мешаванд? Дар айни ҳол теоремаи 14 чанд маротиба истифода мешавад?

140. Аз маркази давраи дарункашидаи секунҷа ба ҳамвории секунҷа перпендикуляри дарозиаш 2,4*м* гузаронида шудааст. Радиуси давра 0,7*м* аст. Масофаро аз охири ин перпендикуляр то тарафи наздиктарини секунҷа ёбед.

141. Аз қуллаи *A*-и росткунҷаи *ABCD* ба ҳамвории он перпендикуляри *AK* барқарор карда шудааст. Масофаҳо аз нуқтаи охири *K*-и ин перпендикуляр то қуллаҳои дигар ба 6*м*, 7*м* ва 9*м* баробаранд. Дарозии *AK*-ро ёбед.

142. Нуқтаи *M*, ки берун аз ҳамвории кунҷи рости додашуда ҷойгир аст, аз қуллаи кунҷ дар масофаи *a* ва аз тарафҳои кунҷ дар масофаи *b* мехобад. Масофаро аз нуқтаи *M* то ҳамвории кунҷ ёбед.

143. Масофа аз нуқтаи додашуда то ҳамвории секунҷа 1,1*м* ва то ҳар як тарафи он 6,1*м* аст. Радиуси давраи дарункашидаи ин секунҷаро ёбед.

144. Аз қуллаи секунҷаи баробартарафи *ABC* перпендикуляри *AD* ба ҳамвории секунҷа барқарор карда шудааст. Масофаро аз нуқтаи *D* то тарафи *BC* ёбед, агар *AD*=13*см*, *BC*=6*см* бошад.

145. Масофа аз нуқтаи *A* то ҳар яки тарафи квадрат ба *a* баробар аст. Масофаро аз нуқтаи *A* то ҳамвории квадрат ёбед, агар диагонали квадрат ба *d* баробар бошад.

Масъалаҳо барои такрор

146. Аз ду нуқтаи гуногуни дар ҳамворӣ ҷойгирнабуда ба ин ҳамворӣ ду моили баробар фароварда шудааст. Магар гуфтан мумкин аст, ки проексияи онҳо низ баробар мешаванд?

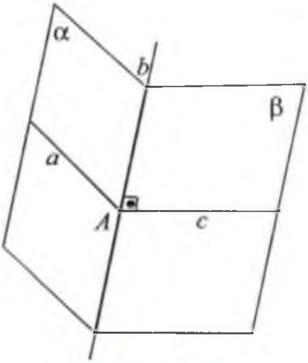
147. Масоҳати секунҷаи росткунҷа ба *S*, гипотенузааш ба *c* баробар аст. Радиуси давраи дарункашидаро ёбед.

148*. Дар девори амудӣ дар баландии 5*м* плакат овехта шудааст, ки дарозиаш 2*м* аст. Мушоҳидачӣ аз девор дар кадом масофа бояд истад, то ки кунҷе, ки зери он плакат дида мешавад, калонтарин шавад?

11. Перпендикулярии ду ҳамворӣ

I. Мафҳуми перпендикулярии ду ҳамвориро дида мебароем.

Таъриф. Агар ҳамворӣ хати рости ба дигар ҳамворӣ перпендикулярро дошта бошад, он гоҳ вай ба дигарӣ *перпендикуляр* номида мешавад.



Расми 71

Фарз мекунем, ки ҳамвории α ба ҳамвории β перпендикуляр аст, яъне хати рости a-и он ба β перпендикуляр мебошад (расми 71). Мувофиқи таърифи перпендикулярии хати рост ва ҳамворӣ (пункти 8) хати рости a ҳамвории β-ро мебурад. Бигузор нуқтаи буриши ин хат A аст. Аз сабаби нуқтаи умумӣ доштан ҳамвориҳои α ва β ҳамдигарро аз рӯи хати рости b мебуранд, ва нуқтаи A ба b тааллуқ дорад. Аз нуқтаи A дар ҳамвории β хати рости c-ро, ки ба хати b перпендикуляр аст мегузаронем. Дар натиҷа хати рости c ба ду хати рости ҳамдигарро мебуридагии a ва b, ки перпендикулярanд ва дар ҳамвории α ҷойгиранд, перпендикуляр мешавад (теоремаи 14). Натиҷаи зерин ҳосил шудааст, ки онро дар шакли теорема меорем.

Теоремаи 21. Агар яке аз ҳамвориҳо ба дигараш перпендикуляр бошад, он гоҳ дигарӣ ҳам ба аввалааш перпендикуляр аст.

Акнун бо созишҳо, ки бо ҳамвориҳои перпендикуяр алоқаманданд, машғул мешавем.

Масъалаи 1. Бигузор ҳамвориҳои α ва β перпендикулярanд. Нишон медиҳем, ки аз рӯи нуқтаи дилхоҳи якеи онҳо ба дигарӣ хати рости перпендикулярро гузаронидан мумкин аст.

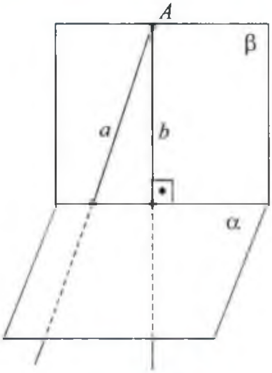
Ҳал. Фарз мекунем, ки хати рости a дар ҳамвории α ҷойгир буда, ба ҳамвории β перпендикуляр аст. Хати рости a ба хати буриши онҳо b перпендикуляр аст. Аз нуқтаи дилхоҳи ҳамвории α хати рости ба a параллелро гузаронида, мебинем, ки мувофиқи теоремаи 12 ин хат низ ба хати буриш b перпендикуляр аст. Боз аз нуқтаи буриши ин хат дар ҳамвории β хати рости ба b перпендикулярро сохта, мисли исботи теоремаи 21 мулоҳиза ронда, перпендикулярии хати ба a параллел бударо бо ҳамвории β нишон медиҳем. Масъала ҳал шуд.

Масъалаи 2. Хати рости a ва ҳамвории α дода шудаанд. Аз рӯи хати рости a ҳамвории ба ҳамвории α перпендикуляр месозем.

Ҳал. Аз рӯи нуқтаи дилхоҳи хати рости a хати рости b-ро мегузаронем (расми 72), ки ба ҳамвории α перпендикуляр аст (ниг. ба эзоҳи қисми III-и пункти 8).

Аз рӯи хатҳои рости a ва b ҳамвории β-ро мегузаронем. Мувофиқи таъриф ҳамвории β ба ҳамвории α перпендикуляр мебошад.

Аз созишҳои дар исботи теоремаи 21 ва ҳалли масъалаи 1 иҷро кардаамон дурустии ҷумлаи зерин бармеояд, ки он ҳангоми ҳалли масъалаҳо бисёртар (нисбати таърифи ҳамин пункт) истифода карда мешавад.

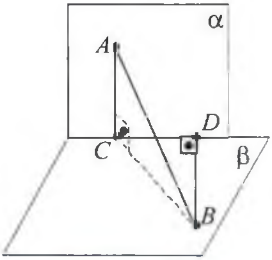


Расми 72

Теоремаи 22. Агар хати рост дар яке аз ду ҳамвориҳои перпендикуляр ҷойгир буда, ба хати буриши онҳо перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ба дигар ҳамворӣ ҳам перпендикуляр аст.

Ин натиҷа як аломати дигари перпендикулярии хати рост ба ҳамворӣ мебошад. Истифодаи онро дар ҳалли масъалаи зерин муоина мекунем.

Масъалаи 3. Аз нуқтаҳои A ва B, ки дар ду ҳамвориҳои бо ҳам перпендикуляр ҷойгиранд, ба хати рости буриши ҳамвориҳо перпендикулярҳои AC ва BD гузаронида шудааст. Дарозии порчаи CD-ро меёбем, агар $AB=11$м, $AC=6$м, $BD=7$м бошад.



Расми 73

Ҳал. Азбаски хатҳои рости AC ва CD, инчунин ҳамвориҳои α ва β бо ҳам перпендикуляранд (расми 73), пас мувофиқи теоремаи 22 хати рости AC ба ҳамвории β ва ба хати рости CB перпендикуляр мебошад. Яъне, секунҷаи ABC росткунҷа аст. Аз он мувофиқи теоремаи Пифагор дорем $AB^2=AC^2+CB^2$. Секунҷаи CBD низ росткунҷа аст. Аз он $CB^2=BD^2+CD^2$ ва $AB^2=AC^2+BD^2+CD^2$, ё ки $CD^2=AB^2-BD^2-AC^2=11^2-7^2-6^2=121-49-36=36$. Инак, $CD=6$*м*.

Эзоҳи 1. Аз исботи теоремаи 21 ва сохтаҳо бармеояд, ки таърифи перпендикулярии ду ҳамворӣ ба *таърифи зерин баробарқувва* аст:

Ду ҳамвории ҳамдигарро мебуридагӣ *перпендикуляр* номида мешаванд, агар ҳамвории ба хати рости буриши ин ҳамвориҳо перпендикуляр буда, онҳоро аз рӯи хатҳои рости бо ҳам перпендикуляр бурад.

Дар ҳақиқат, агар ҳамвории γ ба хати рости b – хати буриши ҳамвориҳои α ва β перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ҳамвориҳои α ва β-ро аз рӯи хатҳои рости бо ҳам перпендикуляри a ва c мебурад (расми 71). Аз перпендикулярии a бар b ва c, перпендикулярии α бар β бармеояд. Баръакс, агар α бар β перпендикуляр бошад, он гоҳ созишҳои дар нақшаи 71 иҷро кардаамонро гузаронида, аз болои хатҳои a ва c ҳамвории γ-ро мегузаронем. Вай ба хати буриш b перпендикуляр мебошад (теоремаи 14).

Эзоҳи 2. Пурсида мешавад, ки чӣ тавр перпендикуляр будани ҳамвории β-ро ба ҳамвории додашудаи α санҷидан мумкин аст? Бо ибораи дигар, барои ҳамвории α чӣ тавр ҳамвории ба он перпендикуляри β-ро сохтан мумкин аст? Дар амалия бо ёрии шоқул амудӣ будани девор муайян карда мешавад. Таърифи дар аввали пункт овarда шуда дарки ҳамин чиз аст (ниг. инчунин ба масъалаи 2).

II. Алоқамандии перпендикулярии ҳамвориро бо ҳамвориҳои параллел муқаррар менамоем.

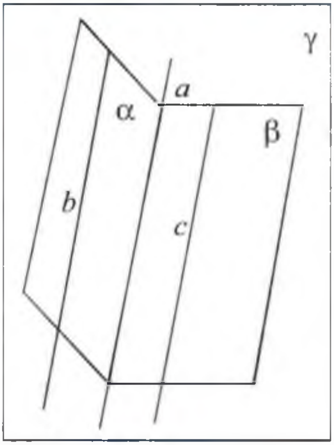
Теоремаи 23. Агар ҳамворӣ ба яке аз ҳамвориҳои параллел перпендикуляр бошад, он гоҳ ба дигараш ҳам перпендикуляр мебошад.

Исбот. Бигузор ҳамвориҳои α ва β параллеланд ва ҳамвории γ ба α перпендикуляр мебошад. Мувофиқи таъриф дар γ хати росте мавҷуд аст, ки он ба α перпендикуляр аст. Мувофиқи теоремаи 16 ин хат ба ҳамвории β ҳам перпендикуляр мебошад. Ин бошад ба перпендикулярии γ бар β меорад.

Теоремаи 24. Агар хати рост ба яке аз ҳамвориҳо перпендикуляр ва ба ҳамвории дигар параллел бошад, он гоҳ ин ҳамвориҳо перпендикуляранд.

Исбот. Дар ҳамвории ба хати рост параллел мувофиқи теоремаи 5 хати рости ба вай параллел вуҷуд дорад. Аз рӯи теоремаи 17 ин хати рост ба ҳамвории ба хати рост перпендикуляр буда, перпендикуляр аст. Барои ҳамин ҳамвориҳо мувофиқи таъриф перпендикуляранд.

Масъалаи 4. Маълум, ки ду ҳамвории ҳамдигарро мебуридагии α ва β ба ҳамвории додашудаи γ перпендикуляранд. Нишон медиҳем, ки хати рости буриши α ва β ба γ перпендикуляр аст.



Расми 74

Ҳал. Фарз мекунем, ки хати рости буриши ҳамвориҳо a мебошад. Аз сабаби перпендикулярии α бар γ, дар α хати рости b-ро ёфтан мумкин аст, ки вай ба γ перпендикуляр аст. Мувофиқан, аз сабаби перпендикулярии β ва γ, дар β хати рости c мавҷуд аст, ки вай ба γ перпендикуляр мебошад (расми 74). Аз рӯи теоремаи 18 ду хати рости b ва c-и ба ҳамвории γ перпендикуляр байни худ параллел мешаванд, яъне хатҳои b ва c параллел мебошанд. Аз ин сабаб ва аз сабаби он ки онҳо дар ҳамвориҳои гуногун ҷойгиранд, бармеояд, ки ин хатҳои рост ба хати рости буриши ин ҳамвориҳо a параллеланд. Аз ин ҷо ва аз перпендикулярии хатҳои рости b ва c бар γ, мувофиқи теоремаи 17, бармеояд, ки хати рости a ба ҳамвории γ перпендикуляр мебошад.

1. Дар кадом ҳолат ду ҳамворӣ дар фазо перпендикуляр номида мешаванд? **2.** Нишон диҳед, ки агар як ҳамворӣ ба дигараш перпендикуляр бошад, он гоҳ дигарӣ ҳам ба ҳамвории аввала перпендикуляр аст. **3.** Аломати перпендикулярии хати рост ба ҳамворӣ (теоремаи 22) аз аломатҳои пешовардашуда чӣ фарқият дорад? **4.** Доир ба алоқамандии перпендикулярии ҳамворӣ бо ҳамвориҳои параллел чӣ гуфтан мумкин аст?

149. Ҳамвориҳои бо ҳам перпендикуляри α ва β дода шудаанд. Аз рӯи нуқтаи A-и ҳамвории α хати рости a гузаронида шудааст, ки ба ҳамвории α перпендикуляр мебошад. Исбот кунед, ки хати рости a дар ҳамвории β ҷойгир аст.

150. Ҳамвориҳои α ва β перпендикуляранд. Дар ҳамвории α нуқтаи A гирифта шудааст, ки масофа аз он то хати рости c (хати рости буриши ҳамвориҳо) ба 0,5*м* баробар аст. Дар ҳамвории β хати рости b, ки ба хати рости c параллел аст ва аз он дар масофаи 1,2*м* меистад, гузаронида шудааст. Масофаро аз нуқтаи A то хати рости b ёбед.

151. Ҳамвории α ва хати рости a дода шудаанд. Исбот кунед, ки ҳамаи хатҳои росте, ки ба ҳамвории α перпендикуляранд ва хати рости a-ро мебуранд, дар ҳамвории ба ҳамвории α перпендикуляр ҷойгиранд.

152. Аз нуқтаҳои A ва B, ки дар ду ҳамвориҳои перпендикуляр ҷойгиранд, перпендикулярҳои AC ва BD ба хати рости буриши ин ҳамвориҳо фароварда шудааст. Дарозии порчаи AB-ро ёбед, агар: 1) $AC=a$, $BD=b$, $CD=c$; 2) $AD=a$, $BC=b$, $CD=c$ бошад.

153. Нуқта аз ду ҳамвории перпендикуляр мувофиқан дар масофаи a ва b ҷойгир аст. Масофаро аз ин нуқта то хати рости буриши ин ҳамвориҳо ёбед.

154. Ҳамвориҳои перпендикуляри α ва β аз рӯи хати рости c бурида мешаванд. Дар ҳамвории α хати рости a, дар ҳамвории β хати рости b, ки ба хати рости c ҳар ду параллеланд, гузаронида шудаанд. Масофаи байни хатҳои рости a ва b-ро ёбед, агар масофаи байни хатҳои рости a ва c ба 1,5*м* ва масофаи байни хатхои рости b ва c ба 0,8*м* баробар бошад.

Масъалаҳо барои такрор

155. Аз қуллаи кунҷи рости C-и секунҷаи ABC ба ҳамвории секунҷа перпендикуляри CD гузаронида шудааст. Масофаро аз нуқтаи D то гипотенузаи секунҷа ёбед, агар $AB=5см$, $BC=4см$, $CD=6см$ бошад.

156. Аз охирҳои порчаи AB, ки ба ҳамворӣ параллел аст, перпендикуляри AC ва моили BD-и ба порчаи AB перпендикуляр гузаронида шудааст. Масофаи байни нуқтаҳои C ва D ба чӣ баробар аст, агар $AB=a$, $AC=b$ ва $BD=c$ бошад?

157. Дар давраи радиусаш $R=5см$ трапетсия кашида шудааст, ки тарафи паҳлуӣ ва диагоналаш мувофиқан ба $6см$ ва $9см$ баробаранд. Масоҳати трапетсияро муайян намоед.

158. Бигузор α ва β кунҷҳои секунҷаи ABC мебошанд. Исбот кунед, ки агар $\sin 2\beta=\sin\alpha$ бошад, он гоҳ секунҷаи ABC баробарпаҳлӯ аст.

§4. КУНҶИ БАЙНИ ХАТҲОИ РОСТ ВА ҲАМВОРИҲО ДАР ФАЗО

12. Кунҷи байни ду хати рост дар фазо. Кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ

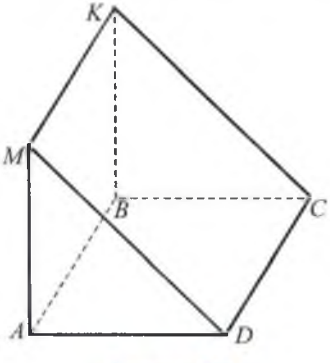
I. Ҳангоми ҳамдигарро буридани ду хати рост 4 кунҷ ҳосил мешавад. Дар айни ҳол кунҷҳои амудӣ ба ҳам баробаранд, кунҷҳои ҳамсоя ҳамдигарро то 180^0 пурра менамоянд.

Таърифи 1. Кунҷи байни хатҳои рости ҳамдигарро мебуридагӣ гуфта *ченаки кунҷии* кунҷи хурдтаринро, ки ҳангоми буриш ҳосил мешавад меноманд.

Кунҷи байни хатҳои рости пепендикуяр мувофиқи таъриф 90^0 аст, кунҷи байни хатҳои рости параллел бошад ба нул баробар ҳисоб карда мешавад.

Ҳамин тариқ, кунҷи байни ду хати рост, ки дар як ҳамворӣ ҷойгиранд, фигураи геометрӣ набуда *ченак (андоза)* мебошад, яъне бузургиест, ки дар байни 0^0 ва 90^0 ҷойгир аст.

Барои дохил кардани мафҳуми кунҷи байни хатҳои рости чиликӣ ба мо теоремаи дар поён овардашуда лозим мешавад. Исботи ин теорема ба леммаи зерин, ки ҳамчун лемма дар бораи се параллелограмм маъмул аст, такя мекунад.



Расми 75

Лемма. Агар *ABCD* ва *ABKM* параллелограммҳои дар як ҳамвориӣ ҷойгирнабуда бошанд (расми 75), он гоҳ чоркунҷаи *CDMK* ҳам параллелограмм мебошад.

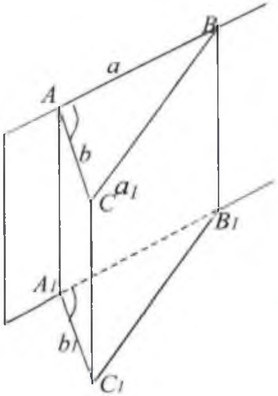
Исбот. Мувофиқи шарти лемма $MK=AB$ ва $CD=AB$ аст, бинобар ин $MK=CD$ аст. Инчунин MK ва CD ба AB параллеланд, пас мувофиқи теоремаи 4 MK ба CD параллел мебошад. Ҳамин тариқ, дар чоркунҷаи $CDMK$ ду тарафи муқобил параллел ва баробаранд. Барои ҳамин ҳам вай параллелограмм мебошад.

Хотиррасон мекунем, ки бо исботи лемма мо масъалаи 76-ро (ниг.ба пункти 5) ҳал кардаем.

Теоремаи 25. Агар ду хати ҳамдигарро мебуридагӣ ба ду-то хати рости дигари ҳамдигарро низ мебуридагӣ параллел бошанд, он гоҳ кунҷҳои байни онҳо бо ҳам баробаранд.

Исбот. Фарз мекунем, ки хатҳои рости ҳамдигарро мебуридагии a ва b мувофиқан ба хатҳои рости a_1 ва b_1 параллеланд. Ҳисоб мекунем, ки хатҳои рост дар ҳамвориҳои гуногун ҷойгиранд. Аз рӯи нуқтаҳои буриши онҳо A ва A_1 хати рости AA_1-ро мегузаронем. Баъд, дар хати рости a нуқтаи B ва дар хати рости b нуқтаи C-ро гирифта аз рӯи онҳо хатҳои рости ба хати рости AA_1 параллелро мегузаронем. Бигузор нуқтаҳои буриши ин хатҳои рост бо хатҳои рости a_1 ва b_1 нуқтаҳои B_1 ва C_1 мебошанд (расми 76). Чоркунҷаҳои AA_1B_1B ва AA_1C_1C параллелограмманд. Нуқтаи B-ро бо нуқтаи C ва нуқтаи B_1-ро бо нуқтаи C_1 пайваст намуда чоркунҷаи дигари BCC_1B_1-ро ҳосил мекунем. Мувофиқи лемма вай параллелограмм мебошад. Пас $BC=B_1C_1$ аст.

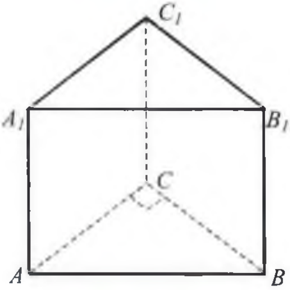
Секунчаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$-ро дида мебароем. Аз баробарии тарафҳои муқобили параллелограммҳо бармеояд, ки $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$ ва $AB=A_1B_1$ аст. Аз ин ҷо, мувофиқи аломати сеюми баробарии секунҷаҳо $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$. Пас $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$. Теорема исбот шуд.



Расми 76

Масъалаи 1. Тарафҳои секунҷаи ABC ба тарафҳои секунҷаи $A_1B_1C_1$ ҷуфт-ҷуфт параллеланд.

Тарафҳои секунҷаи $A_1B_1C_1$ дода шудаанд: $A_1B_1=4\sqrt{2}$*см*, $A_1B_1=\sqrt{137}$ *см*, $B_1C_1=7$*см*. Кунҷи ACB-ро (кунҷи байни тарафҳои AC ва CB) меёбем (расми 77).



Расми 77

Ҳал. Кунҷи ACB мувофиқи теорема ба кунҷи $A_1C_1B_1$ баробар аст. Дар секунҷаи $A_1B_1C_1$ мувофиқи теоремаи косинусҳо дорем $A_1B_1^2=A_1C_1^2+B_1C_1^2-2A_1C_1\cdot B_1C_1\cdot\cos C_1$. Қиматҳои тарафҳоро гузошта ҳосил мекунем:

$$\left(\sqrt{137}\right)^2=\left(4\cdot\sqrt{2}\right)^2+7^2-2\cdot 4\sqrt{2}\cdot 7\cos C_1$$

ё $137=32+49-56\ \ 2\cos C_1$. Аз ин ҷо

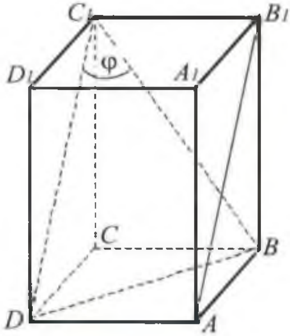
$\cos C_1=\frac{1}{2}$, яъне $\angle C_1=45^0$.

II. Акнун мафҳуми кунҷи байни хатҳои рости чиликиро дохил мекунем.

Таърифи 2. *Кунҷи байни хатҳои рости чиликӣ* гуфта кунҷеро меноманд, ки он ба кунҷи байни хатҳои рости ҳамдигарро мебуридагии ба хатҳои рости чиликӣ ҷуфт-ҷуфт параллел баробар аст.

Аз теоремаи 25 бармеояд, ки кунҷи (бузургӣ аст!) ҳамин тавр дохил карда шуда, аз он ки кадом хатҳои ҳамдигарро мебуридагии ба хатҳои рости чиликӣ параллел буда, гирифта шудаанд, вобаста нест. Аз ин теорема инчунин бармеояд, ки барои ёфтани кунҷи байни хатҳои рости чиликии a ва b, масалан, агар аз рӯи ягон нуқтаи A-и хати рости a ба хати рости b хати рости b_1-ро параллел гузаронем, он гоҳ кунҷи байни хатҳои рости a ва b ба кунҷи байни хатҳои рости a ва b_1 баробар мешавад.

Пеш мо ду хати ростро перпендикуляр номида будем, агар онҳо дар зери кунҷи рост ҳамдигарро мебуриданд. Айнан мисли ҳамин, *хатҳои рости чиликӣ перпендикуляр* номида мешаванд, агар кунҷи байни онхо 90^0 бошад. Савол ба миён меояд, ки чаро кунҷи байни ду хати рост дар фазо на ҳамчун фигура, балки ҳамчун бузургӣ муайян карда мешавад. Гап дар сари он аст, ки ҳангоми дода шудани ду хати рост, масалан, хатҳои рости чиликӣ на ҳамеша ошкоро ба кунҷи байни онҳо ҳамчун фигураи геометрӣ ишора кардан мумкин аст.



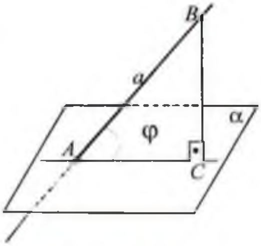
Расми 78

Масъалаи 2. Куби $ABCD$ $A_1B_1C_1D_1$ дода шудааст (расми 78). Кунҷи байни хатҳои рости AB_1 ва BC_1-ро меёбем.

Ҳал. Ҳалли масъала ба гузаронидани хати рости параллел ба якеи ин хатҳои рост аз нуқтаи дигариаш асос карда мешавад. Аз нуқтаи C_1 диагонали C_1D-ро, ки ба хати рости AB_1 параллел аст мегузаронем. Кунҷи матлуб ба кунҷи BC_1D баробар аст. Секунҷаи BC_1D-ро дида мебароем. Тарафҳои ин секунҷа диагонали рӯяҳои кубанд, яъне ин секунҷа баробартараф аст. Пас $\varphi=\angle BC_1D=60^0$.

II. Дигар мафҳуми муҳиме ҳаст, ки бо ёрии мафҳуми перпендикуляр дохил карда мешавад. Ин мафҳуми *кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ* мебошад. Бигузор дар нуқтаи A хати рости a бо ҳамвории α бурида мешавад (расми 79). Дар хати рости a нуқтаи дилхоҳи B-ро гирифта, аз он ба ҳамвории α перпендикуляри BC-ро мегузаронем. Дар ҳамвории α хати рости AC-ро месозем. Ин хати рост *проектсияи хати рости a дар ҳамвории α* номида мешавад.

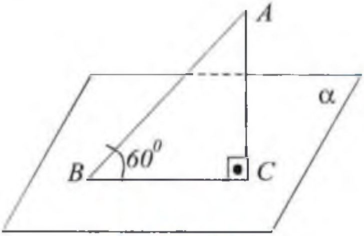
Таърифи 3. Кунҷи байни хати рости a ва ҳамвории α гуфта *кунҷи байни хати рости а ва проектсияи онро* дар ҳамвории α меноманд.



Расми 79

Дар расми 79 кунҷи кунҷи байни хати рости a ва ҳамвории α аст. Агар хати рости a ҳамвориро бурад ва ба он перпендикуляр набошад, он гоҳ $0^0<\varphi<90^0$ аст. Агар хати рости a ба ҳамвории α параллел бошад ё дар он ҷойгир бошад, он гоҳ кунҷи φ ба нул баробар ҳисоб карда мешавад. Кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ, ки бо ҳам перпендикуляранд, 90^0 ҳисоб карда мешавад.

Азбаски хати рости a, проектсияи вай дар ҳамвории α ва перпендикуляр ба α дар нуқтаи A-и буриши он бо хати рости a дар як ҳамворӣ ҷойгиранд, пас *кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ кунҷи байни ин хати рост ва перпендикулярро бо ҳамворӣ то 90^0 пурра мекунад.*



Расми 80

Масъалаи 2. Масофаи байни нуқтаи A ва ҳамворӣ ба 3*см* баробар аст. Дарозии моилро, ки аз ин нуқта ба ҳамворӣ дар зери кунҷи 60^0 фароварда шудааст, меёбем.

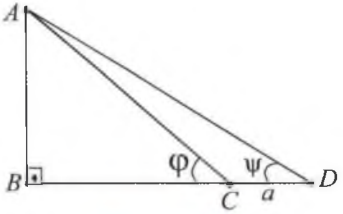
Ҳал. Ба ҳамворӣ аз нуқтаи A перпендикуляри AC-ро мегузаронем (расми 80). Секунҷаи ABC росткунҷа аст. Кунҷи росташ дар қуллаи C ҷойгир мебошад. Кунҷи тези ин секунҷа, ки муқобили катети AC воқеъ аст, ба 60^0 баробар мебошад. Бинобар ин

$AC : AB = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Аз ин ҷо $AB = \frac{2}{\sqrt{3}} AC = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 3 = 2\sqrt{3}$ см.

Масъалаи 3. Порчаи AB ба ҳамворӣ перпендикуляр буда, аз нуқтаҳои C ва D-и ҳамворӣ мувофиқан нӯги A-и он дар зери кунҷҳои φ ва ψ дида мешавад. Маълум, ки масофаи нуқтаҳои C ва D ба a баробар аст. Дарозии почаи AB-ро меёбем.

Ҳал. Усули ба масъалаи планиметрӣ овардани масъалаи стереометриро татбиқ менамоем (ниг. ба пункти 5). Аз рӯи хати рости CD ва нуқтаи A ҳамворӣ гузаронида дар он масъаларо ҳал мекунем (расми 81). Ба секунҷаи ACD теоремаи синусҳоро татбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$\frac{AC}{\sin\psi}=\frac{CD}{\sin\angle CAD}.$$

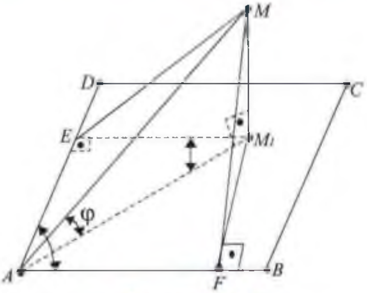


Расми 81

Вале $CD=a$, $\angle CAD=180^0-(180^0-\varphi)-\psi=\varphi-\psi$, пас $AC=\frac{a\cdot\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}$. Аз секунҷаи росткунҷаи ABC дорем $AB=AC\cdot\sin\varphi=\frac{a\cdot\sin\varphi\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}$.

Эзоҳ. Дар амалия ҳалли ин масъала барои ёфтани дарозии предметҳое, ки бевосита чен кардани онҳо имконнопазир аст, васеъ истифода карда мешавад. Масалан, барои чен кардани баландии хонаҳо ё қуллаҳо. Барои ин чӣ хеле ки дидем, кифоя аст, аз ду нуқтаи масофаашон муайян нуқтаи баландтарини предметро назорат намуда, кунҷҳои назораро донем.

Масъалаи 4. Аз рӯи қуллаи A-и росткунҷаи $ABCD$ ва нуқтаи M-и дар ҳамвории росткунҷа ҷойгир набуда хати рости AM гузаронида шудааст. Маълум, ки ин хати рост бо тарафҳои AD ва AB-и росткунҷа кунҷи 60^0-ро ташкил медиҳад. Кунҷи байни моили AM ва ҳамвории росткунҷаро меёбем.



Расми 82

Ҳал. Перпендикуляри MM_1-ро мегузаронем. Нишон медиҳем, ки нуқтаи M_1 дар бисектрисаи кунҷи A-и ҷойгир аст. Дар ҳақиқат, агар аз нуқтаи M_1 ба тарафҳои AD ва AB перпендикулярҳои M_1E ва M_1F-ро гузаронем (расми 82), он гоҳ мувофиқи теорема дар бораи се перпендикуляр (ниг. ба пункти 10) кунҷҳои AEM_1 ва AFM_1 кунҷҳои рост мебошанд.

Мувофиқи шарти масъала $\angle MAD = \angle MAB = 60^0$. Пас секунчаҳои росткунчаи AEM ва AFM дорои ду кунҷи баробар мебошанд, яъне онҳо монананд. Аз сабаби умумӣ будани гипотенузаи AM, онҳо ба ҳамдигар баробаранд. Яъне $ME = MF$. Порчаҳои M_1E ва M_1F проектсияи моилҳои ME ва MF дар ҳамвории росткунча мебошанд. Баробарии моилҳо ба баробароии проектсияҳо баробарқувва аст. Пас $EM_1 = M_1F$. Аз ин ҷо ва аз рост будани кунҷҳои M_1EA ва M_1FA бармеояд, ки AFM_1E квадрат аст, пас AM_1 бисектрисаи кунҷи DAB мебошад, яъне $\angle AM_1E = \angle AM_1F = 45^0$. Кунҷи матлуб $\phi = \angle MAM_1$ аст. Бигзор $AM = a$. Аз секунчаи AME: $AE = AM \cdot \cos\angle MAD = AM\cos 60^0 = \frac{a}{2}$. Аз секунчаи AEM_1:

$$AE = AM_1 \cos\angle AM_1E = AM_1 \cdot \cos 45^0 = AM_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$ Аз ин ҷо

$$AM_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot AE = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$ Аз секунчаи AM_1M:

$$\cos\phi = \frac{AM_1}{AM} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$ Ҳамин тариқ, $\varphi = \angle MAM_1 = 45^0$.

1. Кунҷи байни хатҳои рости ҳамдигарро мебуридагӣ дар фазо чӣ тавр муайян карда мешавад? Кунҷи байни хатҳои рости чиликӣ – чӣ? **2.** Барои чӣ кунҷи байни хатҳои рости чиликӣ аз интихоби хатҳои рости ба онҳо параллел вобаста нест? **3.** Барои чӣ кунҷи байни хатҳои рост дар фазо танҳо бузургӣ буда, фигураи геометрӣ нест? **4.** Дар кадом ҳолат хатҳои рости чиликӣ бо ҳам перпендикуляр номида мешаванд? **5.** Кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ чӣ тавр муайян карда мешавад? Кунҷи байни моил ва ҳамвориро чӣ тавр муайян кардан мумкин аст?

159. Хати рости a ба ҳамвории α перпендикуляр аст. Исбот кунед, ки вай ба ҳар гуна хати рости b, ки дар ҳамворӣ ҷойгир аст, перпендикуляр мебошад.

160. Бигузор $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб аст. Кунҷи байни хатҳои рости: 1) AB_1 ва CC_1; 2) AB_1 ва CD_1; 3) AB_1 ва DA_1 –ро ёбед.

161. Нуқтаи A аз ҳамворӣ дар масофаи h ҷойгир аст. Дарозии моилҳоеро, ки ба ҳамворӣ дар зери кунҷ-ҳои: 1) 30^0; 2) 45^0; 3) 60^0 гузаронида шуданд, ёбед.

162. Аз нуқтае, ки аз ҳамворӣ дар масофаи a ҷойгир аст ду моили бо ҳамворӣ кунҷҳои 45^0 ва 30^0 ташкил мекардагӣ гузаронида шудааст. Дар навбати худ ин моилҳо байни худ перпендикуляр мебошанд. Масофаи байни охирҳои моилҳоро ёбед.

163. Дарозии моил a аст. Проектсияи ин моил ба ҳамворӣ ба чӣ баробар аст, агар кунҷи байни моил ва ҳамворӣ ба: 1) 30^0; 2) 45^0; 3) 60^0 баробар бошад?

164. Охирҳои порчаи дарозиаш 10*м* аз ҳамворӣ дар масофаи 2*м* ва 3*м* ҷойгиранд. Порча ҳамвориро мебурад. Кунҷи байни порча ва ҳамвориро ёбед.

165. Тарафи AB-и квадрати $ABCD$ дар ҳамвории α ҷойгир аст. Тарафи BC бо ҳамворӣ кунҷи 60^0-ро ташкил медиҳад. Кунҷи байни хати рости AC ва ҳамвории α-ро ёбед.

166. Тарафи AB-и секунҷаи мунтазам дар ҳамвории α ҷойгир аст. Тарафҳои AC ва BC ба ҳамворӣ дар зери кунҷи 45^0 моиланд. Кунҷҳои байни медианаҳои секунҷаи ABC ва ҳамвории α -ро ёбед.

167. Аз нуқтаи аз ҳамворӣ дар масофаи a ҷойгир буда, ду моил ба ҳамворӣ гузаронида шудааст, ки онҳо бо ҳамворӣ кунҷҳои 45^0-ро ташкил мекунанд. Кунҷи байни моилҳо 60^0 аст. Масофаи байни нуқтаҳои охири моилҳоро ёбед.

168. Аз нуқтаи аз ҳамворӣ дар масофаи a ҷойгирбуда, ба ҳамворӣ дар зери кунҷи 30^0 ду моил гузаронида шудааст. Дар айни ҳол проектсияи ин моилҳо кунҷи 120^0- ро ташкил медиҳад. Масофаи байни нуқтаҳои охири моилҳоро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

169. Аз нуқта ба ҳамворӣ ду моил гузаронида шудааст, ки дарозиашон 17*см* ва 15*см* аст. Проектсияи якеи онҳо аз проектсияи дигараш 4*см* зиёд аст. Проектсияи моилҳоро ёбед.

170. Исбот кунед, ки суммаи квадратҳои диагоналҳои параллелограмм ба суммаи квадратҳои тарафҳои он баробар аст.

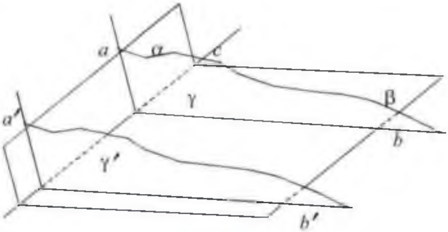
172. Медианаҳои секунҷаи ABC дода шудаанд. Тарафҳои он ёфта шавад.

13. Кунҷи байни ду ҳамворӣ. Масоҳати проектсияи перпендикулярии бисёркунҷа

I. Мафҳуми нав – *кунҷи байни ду ҳамвориро* дохил мекунем. Агар ин ҳамвориҳо параллел бошанд, ин кунҷ ба нул баробар ҳисоб карда мешавад.

Бигузор ҳамвориҳои α ва β аз рӯи хати рости c бурида мешаванд.

Таърифи 1. *Кунҷи байни ду ҳамвории ҳамдигарро мебуридагии* α *ва* β гуфта, кунҷи байни хатҳои рости a ва b-ро, ки ҳангоми бо ҳамвории дилхоҳи γ бурида шудани α ва β хосил мешавад меноманд. Дар айни ҳол пиндошта мешавад, ки ҳамвории γ ба хати рости c, ки аз рӯи он ҳамвориҳои α ва β бурида мешаванд, перпендикуляр мебошад (расми 83).

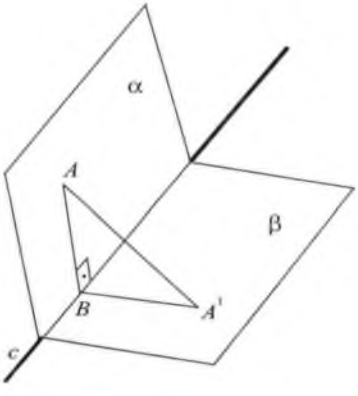


Расми 83

Нишон медиҳем, ки кунҷи ин тавр муайян карда мешудагӣ аз интихоби ҳамвории бурандаи γ вобаста нест. Дар ҳақиқат, бигузор φ_γ ва $\varphi_{\gamma'}$ кунҷҳоеанд, ки ҳангоми интихоби ҳамвориҳои бурандаи γ ва γ' хосил мешаванд. Азбаски ҳамвориҳои γ ва γ' ба хати рости c перпендикуляранд, пас онҳо бо ҳам параллел мебошанд (ниг. ба пункти 9, ба теоремаҳо дар бораи ду перпендикуляр). Барои ҳамин хатҳои рости буриши онҳо бо ҳамвориҳои α ва β хатҳоеанд, ки бо ҳамдигар параллел мебошанд. Пас мувофиқи теоремаи 25 $\varphi_\gamma = \varphi_{\gamma'}$ мебошад.

Инак, бо дода шудани ду ҳамвории ҳамдигарро мебуридагӣ кунҷи байни онҳо яккимата муайян карда мешавад.

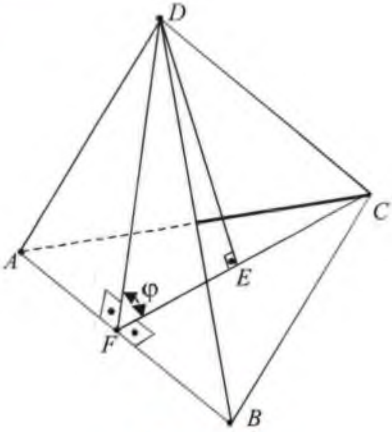
Барои сохтани кунҷи байни ҳамвориҳои α ва β ин тавр амал мекунанд: 1) Ё нуқтаи C-ро аз хати рости буриши ин ҳамвориҳо c гирифта, аз рӯи нуқтаи C дар ин ҳамвориҳо хатҳои рости a ва b-ро, ки бо хати рости c перпендикуляранд мегузаронанд. Кунҷи байни хатҳои рости a ва b ба кунҷи байни ҳамвориҳои α ва β баробар аст, чунки аз рӯи аломати перпендикулярии хатҳои рост ва ҳамворӣ (аз рӯи теоремаи 14) ҳамвории аз рӯи хатҳои рости a ва b мегузаштагӣ ба хати рости c перпендикуляр аст. 2) Ё ки созиши бисёр вомехӯрдаи зеринро истифода мекунанд: нуқтаи A-ро аз ҳамвории α, ки ба хати рости c тааллуқ надорад, мегиранд ва аз он ба хати рости c перпендикуляри AB, баъд ба ҳамвории дуюми β перпендикуляри AA^1-ро мегузаронанд (расми 84). Дар ин вақт кунҷи ABA^1 кунҷи байни ҳамвориҳои α ва β мешавад. Дар ҳақиқат, мувофиқи созиш AB ба c перпендикуляр аст. Аз рӯи теорема дар бораи се перпендикуляр (теоремаи 20) A^1B низ ба c перпендикуляр мебошад. Барои ҳамин ба хатҳои рости BA ва BA^1 мулоҳизарониҳои дар созиши 1) овардаро татбиқ намудан мумкин аст.



Расми 84

Хотирнишон мекунем, ки айнан мисли ҳолати хатҳои рост, кунҷи байни ду ҳамворӣ ин ченаки кунҷии дар байни 0^0 ва 90^0 маҳдудбуда аст, на фигураи геометрӣ.

Масъалаи 1. Секунҷаи баробартарафи *ABC*, ки тарафаш 8*см* аст, дода шудааст. Аз нуқтаи *D*-и берун аз ҳамвории секунҷа ба маркази секунҷа *E* перпендикуляр фаровarда шудааст, ки дарозиаш 4*см* аст. Кунҷи байни ҳамвориҳои секунҷаҳои *ABC* ва *ABD*-ро меёбем.



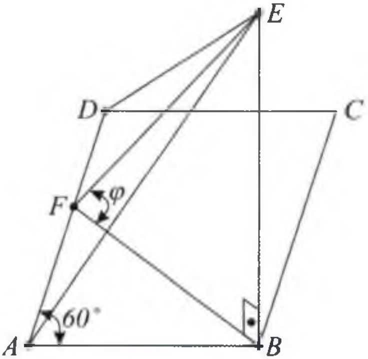
Расми 85

Ҳал. Кунҷи байни ин ҳамвориҳоро, мисли созиши 1) амал карда месозем (расми 85). Маркази секунҷа аз сабаби баробартараф буданаш дар баландии *CF* ҷойгир аст. Нуқтаи *D*-ро бо нуқтаҳои *A*,*B* ва *F* пайваст мекунем. Аз рӯи теорема дар бораи се перпендикуляр (теоремаи 20) *DF* ба *AB* перпендикуляр мешавад. Ҳамин тариқ, кунҷи байни ҳамвориҳои секунҷаҳои *ABC* ва *ABD* кунҷи *DFC* аст. Бузургии ин кунҷро меёбем. Аз секунҷаи *ACF*:

$CF = AC \cdot sin\angle A = AC \cdot sin 60^0 = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}см.$ Мувофиқи хосияти медиана $EF = \frac{1}{3}CF = \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ см. Агар $\varphi=\angle DFE$ гузорем, он гоҳ $tg\varphi = \frac{DE}{EF} = \frac{4}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$. Инак, $\varphi=60^0$.

Масъалаи 2. Тарафи ромби *ABCD* 6см ва кунҷи *A*-и он 60^0 аст. Аз нуқтаи *E*-и берун аз ҳамвории секунҷаи *ABC* перпендикуляри *BE*, ки дарозиаш $3\sqrt{3}$ *см* аст гузаронида шудааст. Кунҷи байни ҳамвориҳои секунҷаҳои *ABC* ва *AED*-ро меёбем.

Ҳал. Дар аввал кунҷи байни ин ҳамвориҳоро сохтан лозим аст. Аз қуллаи *B* ба тарафи *AD* перпендикуляри *BF*-ро мегузаронем (расми 86). Хати *EF*-ро гузаронида мебинем, ки вай мувофиқи теорема дар бораи се перпендикуляр ба тарафи *AD* перпендикуляр мешавад. Кунҷи *EFB* кунҷи матлуб мебошад.



Расми 86

Аз секунҷаи AFB:

$$BF = AB\sin 60^0 = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ см}.$$

Мувофиқи шарти масъала $EB = 3\sqrt{3}$ см аст, пас $EB = BF$ мебошад, яъне секунҷаи EFB секунҷаи баробарпаҳлуи росткунҷа аст.

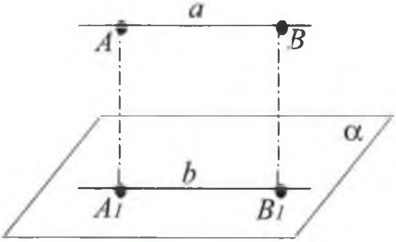
Аз ин ҷо $\varphi = \angle EFB = 45^0$.

II. Дар ин қисм боз якчанд мафҳумҳои дигарро дохил мекунем. Дар пункти 9 мо чунин мафҳумҳо ба монанди *моил, асоси моил ва проектсияи (ортогоналии) моилро* дар ҳамворӣ дохил карда будем. Дар айни замон муҳим аст, ки моил (порчаи хати рост) ҳамвориро дар зери кунҷе бурад.

Фарз мекунем, ки нуқтаи берун аз ҳамворӣ дода шудааст. Асоси перпендикуляре, ки аз ин нуқта ба ҳамворӣ гузаронида шудааст, *проектсияи перпендикулярӣ* ё *ортогоналии нуқта* дар ҳамворӣ ё кӯтоҳ *проектсияи нуқта* ном дорад. Агар нуқта дар ҳамворӣ ҷойгир бошад, он гоҳ проектсияаш худаш аст.

Бигузор хати рости a ва ҳамвории α дода шудаанд ва хати рост ба ҳамворӣ перпендикуляр нест. Ҳар як нуқтаи чунин хати ростро дар ҳамворӣ проектсия карда, хати ростро ҳосил мекунем, ки онро *проектсияи перпендикулярии (проектсияи) хати рости a* дар ҳамвории α меноманд.

Дурустии ин тасдиқро нишон медиҳем. Яъне, нишон медиҳем, ки проектсияи хати рост дар ҳамворӣ хати рост аст. Ду ҳолатро дида мебароем: а) хати рост ба ҳамворӣ параллел аст (расми 87). Ду нуқтаи дилхоҳи он A ва B-ро ба ҳамвории α проектсия карда (аз онҳо перпендикуляр фароварда), аз рӯи проектсияи онҳо (нуқтаҳои A_1 ва B_1) дар

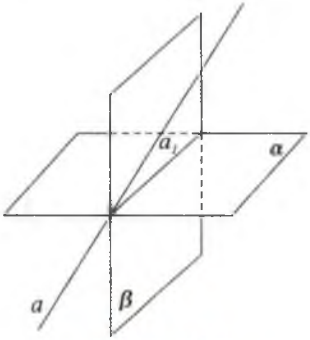


Расми 87

ҳамворӣ хати рости b-ро мегузаронем. Проектсияи ҳар гуна нуқтаи a дар α дар хати рости b ҷойгир аст, чунки масофаи байни нуқта ва проектсияаш ба масофаи байни хати рост ва ҳамворӣ баробар аст, яъне ба бузургии доимӣ. Дар ин ҳолат хати рост ба проектсияаш параллел мебошад.

б) хати рост ҳамвориро мебурад (расми 88).

Ҳамаи перпендикулярҳои аз хати рости a ба ҳамвории α гузаронидашуда байни худ параллеланд (теоремаи 18). Бигузор β ҳамвориест, ки аз рӯи ин хат ва яке аз ин перпендикулярҳо гузаронида шудааст. Ҳамаи перпендикулярҳо, ки аз хати рост ба ҳамворӣ гузаронида шудаанд, дар ҳамвории β ҷойгиранд. Барои ҳамин асоси ин перпендикулярҳо дар буриши ҳамвориҳо ҷойгир аст. Ин буриш бошад хати рост аст. Тасдиқ исбот шуд.



Расми 88

Эзоҳи 1. Агар хати рост ба ҳамворӣ перпендикуляр бошад, он гоҳ проектсияаш дар ҳамворӣ аз нуқта иборат аст (нуқтаи буриши хат бо ҳамворӣ).

Эзоҳи 2. Амалан мафҳуми проектсияи хати рост дар ҳамвориро дар қисми III-и пункти 12 дохил карда будем. Дар ин ҷо бо мақсади асоснок кардани мафҳуми проектсияи фигураи геометрӣ (таърифи 2) онро васеътар муоина намудем.

Бигузор фигураи геометрӣ ва ҳамворӣ дода шудаанд.

Таърифи 2. Проектсияи перпендикулярии (ортогоналии) фигура дар ҳамворӣ гуфта фигураеро меноманд, ки ҳар як нуқтаи он проектсияи ягон нуқтаи фигураи додашуда мебошад.

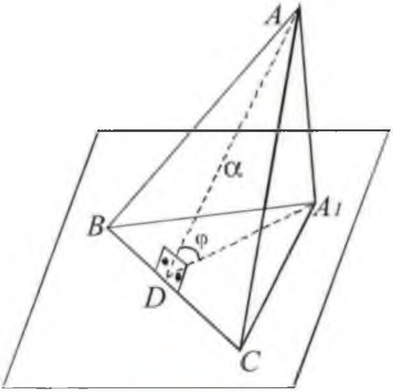
Баъзан проектсияи фигура аз худи фигура фарқ карданаш мумкин аст. Масалан, проектсияи давра метавонад порча бошад. Вале аз мулоҳизаронии боло бармеояд, ки проектсияи порча ҳамеша порча аст. Бар замми ин нишон додан мумкин аст, ки порчаҳои баробар дорои проектсияҳои баробаранд, проектсияи хатҳои рости параллели ба ҳамворӣ перпендикуляр набуда параллеланд ва ғайра.

Далели муҳимаш он аст, ки проектсияи бисёркунҷа дар ҳамворӣ *ҳатман* бисёркунҷа аст, агар бисёркунҷа дар ҳамворӣ ба ҳамвории аввала перпендикуляр ҷойгир набошад (вагарна проектсияаш порча мебошад).

Теоремаи 26. Масоҳати проектсияи перпендикулярии бисёркунҷа дар ҳамворӣ ба ҳосили зарби масоҳати он ба косинуси кунҷи байни ҳамвории бисёркунҷа ва ҳамвории проектсия баробар аст.

Исбот. Исботро танҳо дар ҳолати секунҷа будани бисёркунҷа меорем ва онро ҳам дар ҳолати хусусӣ. Фарз мекунем, ки секунҷаи ABC ва ҳамвории α дода шудаанд. Се ҳолати имконпазир мавҷуд аст: 1) яке аз тарафҳои секунҷаи ABC дар ҳамвории α ҷойгир аст; 2) яке аз тарафҳои секунҷаи ABC ба ҳамвории α параллел аст; 3) секунҷаи ABC дар ҳамвории α ҷойгир набуда, ягон тарафи он ба ҳамвории α параллел нест.

Ҳолати 1)-ро дида мебароем. Фарз мекунем, ки тарафи BC-и секунҷаи ABC дар хамвории α ҷойгир аст (расми 89). Проектсияи секунҷаи ABC дар ҳамвории аз рӯи тарафи BC мегузаштагии ҳамвории α, секунҷаи A_1BC аст, ки нуқтаи A_1 асоси перпендикуляри аз нуқтаи A фаровардашуда мебошад.



Расми 89

Аз A ба тарафи BC перпендикуляри AD-ро мегузаронем. Мувофиқи теорема дар бораи се перпендикуляр (теоремаи 20) A_1D ба BC перпендикуляр аст. Барои ҳамин $\varphi=\angle ADA_1$ кунҷи байни ҳамвории секунчаи ABC ва ҳамвории α аст.

Дорем $S_{\Delta A_1BC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot A_1D$. Аз секунҷаи $AA_1D: \cos\varphi=\frac{A_1D}{AD}$.

Яъне, $A_1D=AD\cdot\cos\varphi$ ва $S_{\Delta A_1BC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD\cdot\cos\varphi$. Вале $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot A\ D$, пас $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta A_1BC}\cdot\cos\varphi$.

Инак, теорема дар ҳолати хусусие, ки мо дида баромадаем, дуруст аст. Ба ин монанд, теоремаро дар ҳолатҳои 2) ва 3) ҳам исбот кардан мумкин мебошад.

Дар ҳолати умумӣ, масоҳати проектсияи бисёркунҷаро дар ҳамворӣ бо тарзи ба секунҷаҳо ҷудо кардани ин бисёркунҷа ва бо роҳи ёфтани суммаи масоҳатҳои проектсияҳои ҳар як секунҷа дар ин ҳамворӣ бо осонӣ ҳисоб кардан мумкин аст. Бо ҳамин мулоҳиза теоремаро исботшуда мешуморем.

Ду масъалаи нисбатан содаро, ки ҳаллашон бо истифодаи теорема ҳосил мешавад, дида мебароем.

Масъалаи 1. Масоҳати секунҷаи ABC $30 см^2$ аст. Тарафҳои проектсияи ин секунҷа дар ҳамворӣ, ки секунҷаи $A_1B_1C_1$ аст, мувофиқан ба $6 см$, $10 см$ ва $14 см$ баробар мебошанд. Кунҷи байни ҳамвориҳои ин секунҷаҳоро меёбем.

Ҳал. Агар кунҷи байни ҳамвориҳои секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ φ бошад, он гоҳ мувофиқи теорема $S_{\Delta A_1B_1C_1}=S_{\Delta ABC}\cdot\cos\varphi$. Барои ёфтани φ бояд $S_{\Delta A_1B_1C_1}$-ро донем. Ҳар се тарафи секунҷаи $A_1B_1C_1$ дода шудааст, барои ҳамин формулаи Геронро истифода мекунем:

$$p=\frac{6+10+14}{2}=15 \text{ см},\quad S_{\Delta A_1B_1C_1}=\sqrt{15(15-6)(15-10)(15-14)}=15\sqrt{3}\ см^2.$$

Пас $\cos\varphi=\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{15\sqrt{3}}{30}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Аз ин ҷо $\varphi=30^0$.

Масъалаи 2. Ҳамвориҳои α ва β дода шудаанд. Секунҷаи баробартарафи ABC дар ҳамвории α ҷойгир буда, тарафаш 2 см аст. Кунҷи байни ҳамвориҳо ба 60^0 баробар мебошад. Масоҳати проектсияи секунҷаи ABC-ро дар ҳамвории β меёбем.

Ҳал. Агар проектсияи ABC дар ҳамвори β секунҷаи $A_1B_1C_1$ бошад, он гоҳ аз рӯи теорема $S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC} \cdot cos\, 60^0 = \frac{S_{\Delta ABC}}{2}$. Секунҷаи ABC баробартараф аст, бинобар ин $S_{\Delta ABC} = \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\, см^2$. Пас $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, см^2$.

Қайд мекунем, ки теоремаи 26-ро асосан барои ҳисоб кардани масоҳати буришҳои гуногун, ки ҳангоми бо ҳамворӣ буридани ҷисмҳои геометрӣ ҳосил мешаванд, васеъ истифода мебаранд. Дар оянда дар рафти давом додани омӯзиши стереометрия (дар синфи 11) инро мушоҳида хоҳем кард.

---

1. Кунҷи байни ду ҳамворӣ чӣ тавр муайян карда мешавад? Барои чӣ бо таърифи 1 ин кунҷ яккимата муайян карда мешавад? **2.** Кунҷи байни ду ҳамвории ҳамдигарро мебуридагӣ чӣ тавр сохта мешавад? Ҳар ду тарзи созиши ин кунҷро баён намоед. **3.** Масоҳати бисёркунча ва масоҳати проектсияи перпендикулярии он дар ягон ҳамворӣ чӣ гуна алоқамандӣ доранд?

---

172. Ду секунҷаи баробарпаҳлӯ асоси умумӣ доранд. Ҳамвориҳои онҳо байни худ кунҷи 60^0 ташкил медиҳанд. Асоси умумӣ ба 16*м*, тарафи паҳлуии яке аз секунҷаҳо ба 17*м* баробар аст. Тарафҳои паҳлуии секунҷаи дигар перпендикуляранд. Масофаи байни қуллаҳои секунҷаҳо ёфта шавад.

173. Ду ҳамворӣ ҳамдигарро дар зери кунҷи 30^0 мебуранд. Нуқтаи A, ки дар якеи ин ҳамвориҳо ҷойгир аст, аз ҳамвории дигар дар масофаи a меистад. Масофаро аз ин нуқта то хати рости буриши ҳамвориҳо ёбед.

174. Секунҷаҳои баробарпаҳлуи ABC ва ABD бо асоси умумии AB дар ҳамвориҳои гуногун, ки кунҷи байнашон ба φ баробар аст, ҷойгиранд. Кунҷи φ-ро ёбед, агар $AB=24м$, $AC=65м$, $AD=20м$, $CD=63м$ бошад.

175. Кунҷи байни ҳамвориҳоро ёбед, агар нуқтаи дар яке аз онҳо гирифташуда аз хати рости буриши онҳо дар масофаи аз ҳамвории дигар 2 карат зиёд ҷойгир бошад.

176. Катетҳои секунҷаи росткунҷа $7м$ ва $24м$ мебошанд. Масофаро аз қуллаи кунҷи рост то ҳамворие, ки аз рӯи гипотенуза гузашта бо ҳамвории секунҷа 30^0-ро ташкил мекунад ёбед.

177*. Исбот кунед, ки дар пирамидаи мунтазам: 1) теғаҳои паҳлуӣ; 2) рӯяҳои паҳлуӣ ба ҳамвории асос якхел моиланд.

178*. Дар пирамидаи чоркунҷаи мунтазам кунҷи байни рӯяҳои паҳлуӣ ва ҳамвории асос ба φ баробар аст. Кунҷи байни тегаҳои паҳлуӣ ва хамвории асос ёфта шавад.

179. Дар пирамидаи секунҷаи мунтазам кунҷи байни рӯяҳои паҳлуӣ ва хамвории асос ба φ баробар аст. Кунҷи байни рӯяи паҳлуӣ ва ҳамвории асосро ёбед.

180. Исбот кунед, ки дар куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ҳамвориҳои ACC_1A_1 ва A_1BD бо ҳам перпендикуляранд.

181. Исбот кунед, ки диагонали AC_1-и куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бо ҳамвориҳои A_1BD ва CB_1D_1 перпендикуляр мебошад.

182. Аз рӯи тарафи AB-и секунҷаи ABC ҳамвории α гузаронида шудааст, ки бо ҳамвории секунҷа кунҷи 60^0-ро ташкил мекунад. Масоҳати проектсияи перпендикулярии секунҷаи ABC-ро ба ин ҳамворӣ ёбед, агар $AB=5м$ ва дарозии баландии аз нуқтаи C фаровардашуда ба $2м$ баробар бошад.

Масъалаҳо барои такрор

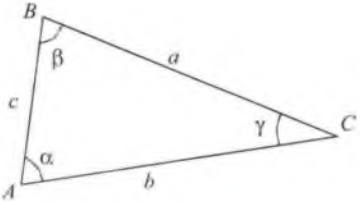
183. Аз нуқта ба ҳамворӣ ду моил гузаронида шудааст, ки якеи онҳо аз дигараш 6см дарозтар аст. Проектсияи моилҳо ба $17см$ ва $7см$ баробаранд. Дарозии моилҳоро ёбед.

184. Моил бо ҳамворӣ кунҷи 45^0-ро ташкил мекунад. Аз рӯи асоси моил дар ҳамворӣ дар зери кунҷи 45^0 ба проектсияи моил хати рост гузаронида шудааст. Кунҷи байни ин хати рост ва моилро ёбед.

185. Исбот кунед, ки агар дар секунҷаи ABC (расми 90) баробариҳои $a^3+b^3=c^2(a+b)$,

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\pi-r)=\frac{2}{3}$$

дуруст бошанд, он гоҳ ин секунҷа баробартараф мебошад.



Расми 90

Маълумоти мухтасари таърихӣ доир ба параллелӣ ва перпендикулярӣ

Асосгузори илмии фанни геометрия олими Юнони Қадим Уқлидус (Эвклид) (365-300 пеш аз милод) ҳисоб мешавад. Вай дар асари худ «Ибтидо», ки аз 13 китоб иборат аст, мафҳумҳо (фигураҳо) ва муносибатҳои ибтидоӣ ва нисбати онҳо аксиомаҳоро дар ҳамворӣ ва дар фазо пешниҳод намуда, аз рӯи онҳо назарияи илман ҷиддии геометрияро офаридааст. «Ибтидо» муддати дароз ҳамчун китоби дарсии курси (фанни) геометрияи мактабӣ истифода карда мешуд.

Се китоби охирини «Ибтидо» асосан маводи стереометриро дар бар мегирад. Алалхусус, дар китоби 11-ум асосҳои умумии стереометрия, масъалаҳои ҷойгиршавии хатҳои рост ва ҳамвориҳо, аз он ҷумла, параллелӣ ва перпендикулярии онҳо, инчунин таълимот дар бораи призма ва параллелепипед оварда шудааст. Мо қисми зиёди ин маводро дар китоби мазкур овардем.

Дар аввал геометрияи Уқлидус қавӣ ҳисоб мешуд. Вале оҳиста-оҳиста баъзе мафҳумҳо, таърифҳо ва аксиомаю постулатҳои (*постулат* – қоидае, ки ҳамчун ҳақиқат қабул мешавад) дохил кардаи ӯ, хусусан постулати 5-ум, зери шубҳа гузошта шуданд. Постулати 5-ум тасдиқ мекунад, ки агар ду хати рост бо хати рости сеюм бурида шавад, он гоҳ ин ду хати рост ҳамдигарро аз ҳамон тараф мебуранд, ки ҳосили ҷамъи кунҷҳои дохила аз 180^0 хурд аст. Исботталаб будани ин тасдиқ ҳанӯз дар Юнони Қадим дарк карда шуда буд. Масалан, дар асри I пеш аз милод математики румӣ Посидоний (135-51 пеш аз милод) ба ҷои ин постулат фарзияи мавҷудияти хатҳои рости дар як масофа ҷойгирбударо пешниҳод карда, посулатро исбот карда буд.

Асрҳои **VIII-IX** давраест, ки маркази тараққиёти математика аз Аврупо, Ҳиндустон ва Хитой ба мамлакатҳои Шарқи наздик ва Миёна мекӯчад. Дар ин давра асархои математикҳои Бобулистону Юнон, Ҳиндустону Хитой ба забони арабӣ тарҷума шуда, дастраси умум мегарданд ва дар асоси онҳо тадқиқоти илмӣ ривоҷ меёбад. Ба ҳамаи кашфиёти геометрии илми ин мамолик наистода танҳо саҳми аҳли илми онҳоро дар назарияи хатҳои рост ва дар кӯшиши исботи постулати 5-ум махсус қайд мекунем. (Бояд гуфт, ки то охири асри **XIX** масъалаи исботи ин постулат диққати хамаи математикҳои бузурги дунёро ҷалб кардааст.)

Дар асри IX исботи постулат аз тарафи олимони араб Ҷавҳарӣ, Ибни Қорро ва Найрезӣ диққатҷалбкунанда мебошад. «Донишнома»-и Абуалӣ Ибни Сино (980-1037) дорои ду боби риёзӣ аст, ки якеи он ба геометрия бахшида шудааст. Ин боб баёни «Ибтидо»-и Уқлидусро бо исботҳо, ки қисми зиёди онҳо бо исботҳои Уқлидус якхела нестанд, дар бар мегирад. Ибни Сино постулати 5-умро исбот кард, ки он ба фарзияи мавҷудияти хатҳои рости дар масофаи баробар ҷойгиршуда (ин фарзия бо постулати исботшаванда баробарқувва аст) асос карда шудааст. Ҳасан Ибни Ҳайсам (956-1039) аз ш.Басраи Ироқ барои исбот аз аксиомаи Архимед (мавҷудияти порчае, ки ба порчаи додашуда то андозаи дилхоҳ каратӣ аст) истифода кардааст. Нодурустии исботи Ҳайсам дар он аст, ки аксиомаи Архимед хулосаи постулат мебошад ва баръакс. Исботи Умари Хайём (1048-1131) ба фарзияи он ки агар ду хати рост ба ҳамдигар наздик шаванд, он гоҳ онҳо ҳатман ҳамдигарро мебуранд, такя мекунад. Ин фарзия ҳам, ба постулат баробарқувва мебошад.

Бузургтарин математики асри **XIII**-и дунё Насируддини Тусӣ (1201-1272) дар асарҳояш «Таҳрири Уқлидус» (иборат аз 28 китоб), «Усули ҳандаса» ва «Шакл-ул-қитъа» назарияи параллелии хатҳои ростро аз рӯи истифодаи натиҷаҳои Ҷавҳарӣ ва Хайём инкишоф дода, ду тарзи исботи постулати 5-умро пешниҳод кардааст. Тусӣ дар яке аз ин исботҳо аз далели ҳамдигарро буридани перпендикуляр ва моил, ки аз як нуқта ба хати рост гузаронида шудаанд, дар дигараш, аз он ки аз нуқтаи дохилии кунҷ хати ростеро гузаронидан мумкин аст, ки он ҳар ду тарафи кунҷро мебурад истифода мекунад. Инҳо бошанд ба постулат баробарқувваанд. Вале бояд қайд кард, ки аз ҳамаи исботҳои постулати 5-ум, ки то замони мо омада расидаанд, мукаммалтаринаш исботи пешниҳодкардаи Тусӣ мебошад. Исботи дар нимаи дуюми асри XIII пешниҳодкардаи Шамсиддини Самарқандӣ моҳиятан аз исботҳои Хайём ва Тусӣ кам фарқ мекунад.

Кушишҳо дар кори исботи постулати 5-ум бесамар бошанд ҳам, онҳо боиси пайдо шудани паҳлуҳои нави назарияи параллелии хатҳои рост гардиданд. Натиҷаҳои дар муддати 5 аср ба даст овардаи олимони Шарқи асримиёнагӣ дар оянда асоси тадқиқоти олимони Аврупо шуданд. Онҳо барои пайдоиши геометрияи нав, ба ном-*гайриэвклидӣ* шароит фароҳам оварданд.

Математики машҳури рус Николай Лобачевский (1792-1856) аввалин шуда исботнопазирии постулатро (соли 1826) нишон дод. (Чуноне пайхас кардаем, исботи постулати мазкур маънии бо истифодаи дигар аксиомаҳои Уқлидус исбот кардани онро дорад.) Лобачевский мавҷудияти системаи геометриеро муқаррар кард, ки дар он постулати 5-ум ба постулати муқобилаш иваз шудааст. Пайдоиши геометрияи Лобачевский ё *геометрияи гайриэвклидӣ* дар инкишофи геометрия ва умуман математика давраи нав кушод ва боиси такон додани методҳои аксиоматикии тадқиқот шуд. (Хотирнишон мекунем, ки баъдтар (соли 1832) мустақилан геометрияи гайриэвклидиро математики маҷор Я. Бойя (1802-1860) низ кашф кардааст). Аввалин шуда ин геометрияро математики бузурги немис К.Ф.Гаусс (1777-1855) эътироф карда, дар рушди он саҳмгузорӣ кардаст. Барои ҳамин геометрияи ғайриэвклидиро геометрияи Лобачевский-Бойя-Гаусс ҳам мегӯянд.

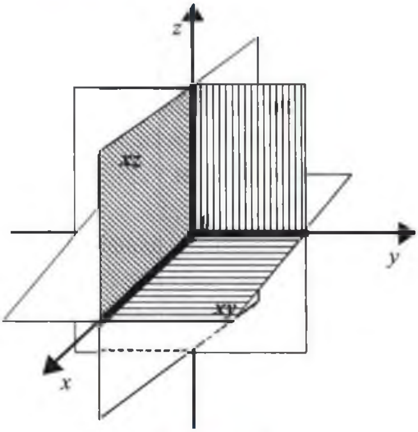
Ба таърихи назарияи перпендикулярӣ дахл карда ҳаминро қайд мекунем, ки теорема дар бораи се перпендикуляр дар «Ибтидо»-и Уқлидус оварда нашудааст. Ин теоремаро аввалин шуда Насируддини Тусӣ дар асари худ «Рисола роҷеъ ба чортарафаи пурра» оварда исбот кардааст. Дар Аврупо фаронсавиҳо Луи Бертран (1731-1812) якумин шуда тасвияи ин теорема ва Анре Лежандр (1752-1833) дар асараш «Элементҳои геометрия», ки соли 1794 чоп шудааст, исботашро меоранд. Бинобар ин теоремаро дар бораи се перпендикуляр, ки дар ҳозира дар исботҳо ва дар ҳалли масъалаҳо қурби баланд дорад, теоремаи Тусӣ–Бертран–Лежандр номидан аз рӯи адолат мебуд.

§5. КООРДИНАТАҲО ДАР ФАЗО

Дар курси геометрияи синфи 8 мо аллакай координатаҳои декартиро дар ҳамворӣ омӯхта будем. Дар ҳамон ҷой бо чунин мафҳумҳо ба монанди координатаҳои нуқта, масофаи ду нуқтаи ҳамворӣ, координатаи буриши ду хати рост, ҷойгиршавии ду хати рост нисбати системаи координатавӣ, табдилдиҳиҳо (ҳаракат, симметрия, параллелкучонӣ), векторҳо, дарозии вектор, зарби адад бар вектор, зарби скалярии векторҳо шинос шуда будем. Акнун ин маҳфумҳоро дар фазо паҳн мекунем.

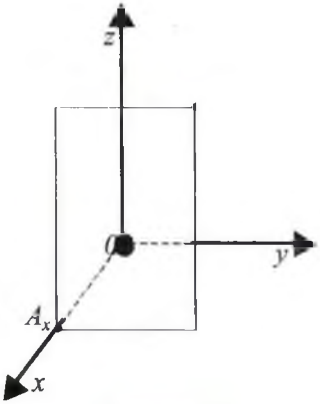
14. Координатаҳои декартӣ

Нуқтаи дилхоҳи фазо O-ро гирифта аз он се хати рости ба якдигар перпендикуляри Ox, Oy ва Oz-ро мегузаронем. Мувофиқи назарияи пункти 8 чунин созиш ҳамеша имконпазир аст (ниг. ба масъалаи рақами 116). Дар ҳақиқат, кифоя аст, ки дар ҳамворӣ ду хати рости перпендикулярро гирифта, дар нуқтаи буриши онҳо ба ҳамворӣ перпендикуляр барқарор намоем (расми 91).



Расми 91

Аз рӯи ҳар як ҷуфти ин хатҳо ҳамворӣ мегузаронем. Ҳамвориеро, ки аз рӯи хатҳои рости Ox ва Oy мегузарад, ҳамвории Oxy меномем.



Расми 92

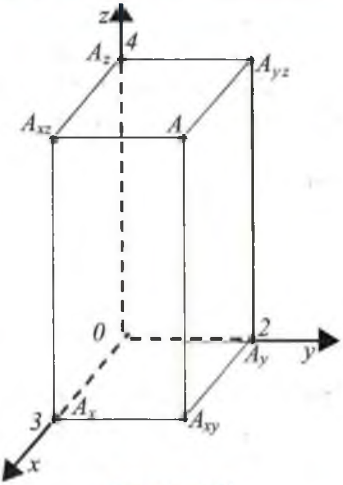
Ду ҳамвории дигар мувофиқан ҳамвориҳои Oyz, Oxz ном доранд. Хатҳои рости Ox, Oy, Oz *тирҳои координатавӣ* (Ox – тири *абсисса*, Oy– тири *ордината*, Oz – тири *апликата*), ҳамвориҳои Oxy, Oyz, Oxz *ҳамвориҳои координатавӣ* ном доранд. Ҳамвориҳои координатавӣ байни худ перпендикулярранд. Нуқтаи буриши тирҳои координатавӣ O *ибтидои координата* ном дорад. Нуқтаи O ҳар яке аз тирҳои координатавиро ба ду нимхатҳои рост – *нимтирҳо* ҷудо мекунад. Якеашро мусбат, дигарашро манфӣ меномем.

Акнун мафҳуми *координатаи нуқтаро* дохил мекунем. Бигузор нуқтаи дилхоҳи A дода шудааст. Аз нуқтаи A ҳамвории ба ҳамвории Oyz параллелро мегузаронем. Вай тири Ox-ро дар ягон нуқтаи A_x мебурад. *Координатаи* (абсиссаи) x-и нуқтаи A гуфта ададеро меноманд, ки қиматаш ба масофаи порчаи OA_x баробар аст. Ин қимат мусбат аст, агар A_x дар нимтири мусбати тири Ox ва манфӣ аст, агар дар нимтири манфӣ воқеъ бошад. Рафту агар A_x бо нуқтаи O ҳамҷоя шавад, он гоҳ $x=0$ ҳисоб карда мешавад. Координатаҳои y ва z-и нуқтаи A айнан ҳамин тавр муайян карда мешаванд. Координатаи нуқтаро дар қавс дар паҳлӯи ишорати ҳарфии нуқта менависем: $A(x;y;z)$. Баъзан бе ишорати ҳарфӣ ҳам, яъне ҳамчун $(x;y;z)$.

Муҳимтарин масъалае, ки пайдо мешавад чунин аст: магар барои ҳар як се адади батартибовардашудаи $(x;y;z)$ дар фазо нуқтае мавҷуд ҳаст, ки дорои ин координатаҳо мебошад? Ҷавоб мусбат аст. Дар ҳақиқат, дар тирҳо нуқтаҳои $A_x(x;o;o)$, $A_y(o;y;o)$, $A_z(o;o;z)$-ро гирифта аз онҳо се ҳамвории ба ҳамвориҳои координатавӣ параллел (яъне, ба тирҳо перпендикуляр) мегузаронем. Нишон додан мумкин аст, ки ин ҳамвориҳо ҳамдигарро дар як нуқтаи A мебуранд. Зоҳиран фаҳмост, ки координатаҳои нуқтаи A ададҳои x, y, z мебошанд.

Масъалаи 1. Нуқтаи $A(3;2;4)$-ро дар фазои координатавӣ тасвир мекунем.

Ҳал. Аз нуқтаҳои $x=3$, $y=2$ ва $z=4$ се ҳамвориҳои ба ҳамвориҳои координатавӣ параллел бударо гузаронида мебинем, ки ин ҳамвориҳо ҳамдигарро дар як нуқта мебуранд. Ин нуқта нуқтаи матлуб мебошад (расми 93).



Расми 93

Эзоҳ. Буриши ин се ҳамворӣ ва ҳамвориҳои координатавӣ параллелипед аст, ки он *параллелепипеди координатавӣ* ном дорад (расми 93).

Барои $A(x;y;z)$ андозаҳои ин параллелопипед $|x|$, $|y|$ ва $|z|$ аст.

Масъалаи 2. Нуқтаҳои $A(2;1;4)$, $B(0;2;0)$, $C(2;1;0)$, $D(0;1;2)$ дода шудаанд. Кадоми онҳо: 1) дар ҳамвории Oxy; 2) дар тири Oy; 3) дар ҳамвории Oyz ҷойгир буданашонро муайян мекунем.

Ҳал. Барои нуқтаҳои ҳамвории Oxy координатаи z ба нул баробар аст. Барои ҳамин нуқтаҳои B ва C дар ҳамвории Oxy ҷойгиранд. Барои нуқтаҳои тири Oy ду координата x ва z нуланд. Пас нуқтаи B ба тири Oy тааллуқ дорад. Нуқтаҳои B ва D дар ҳамвории Oyz ҷойгиранд.

---

1. Тирҳо ва ҳамвориҳои координатавӣ гуфта дар фазо чиро меноманд? **2.** Ибтидои координата ва нимтирҳо чианд? Нимтирҳои мусбат ва манфӣ – чӣ? **3.** Мафҳуми координатаи нуқта дар фазо чӣ тавр дохил карда мешавад? **4.** Чаро координатаҳои нуқта онро дар фазо яққимата муайян менамоянд? **5.** Чиро параллелепипеди координатавӣ меноманд?

---

186. Нуқтаи: 1) $A(1;-2;2)$; 2) $B(4;3;0)$-ро дар фазои координатавӣ тасвир кунед.

187. Кадоме аз нуқтаҳои $A(1;0;2)$, $B(1;-4;0)$, $C(0;1;0)$, $D(0;0;-2)$, $E(-1,5;2;0)$, $F(-3;0;0)$ дар: 1) тири Ox; 2) тири Оу; 3) тири Oz; 4) ҳамвории Oxy; 5) ҳамвории Oyz; 6) ҳамвории Oxz ҷойгиранд?

188*. Аз нуқтаҳои (1;0;0), (0;2;0), (0;0;3) се ҳамвории ба ҳамвориҳои координатавӣ параллел гузаронида шудааст. Нишон диҳед, ки онҳо дар нуқтаи ягонаи $A(1;2;3)$ ҳамдигарро мебуранд.

189. Барои нуқтаи $A(4;1;3)$ параллелепипеди координатавиро созед.

190. Координатаҳои қуллаҳои параллллелепипеди координатавии нуқтаи $A(2;3;1)$-ро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

191. Масофаи байни нуқтаҳои $A(-1;3)$ ва $B(4;-1)$-и дар ҳамворӣ бударо ёбед.

192. Координатаҳои миёнаҷои порчаеро, ки нӯгҳояш $A(-2;-5)$ ва $B(-5;2)$ мебошанд, ёбед.

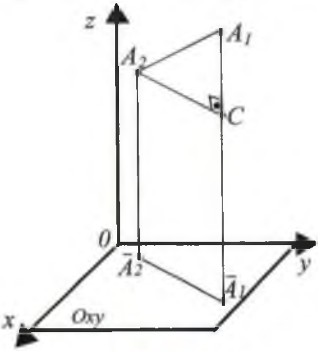
193. Кунҷи байни моили a ва ҳамворӣ 30^0 аст. Проектсияи моилро дар ҳамворӣ ёбед.

15. Масофаи байни ду нуқта дар фазо. Координатаҳои миёнаҷои порча

Бигузор нуқтаҳои $A_1(x_1;y_1;z_1)$ ва $A_2(x_2;y_2;z_2)$ дода шудаанд. Масофаи байни ин ду нуқтаро бо воситаи координатаҳояшон ифода мекунем.

Чи тавре медонем масофаи байни ду нуқтаи $A_1(x_1;y_1)$ ва $A_2(x_2;y_2)$-и ҳамвории Oxy бо формулаи $A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ифода мeёбад. Мо шабеҳи (аналоги) ин формуларо барои нуқтаҳои фазо ҳосил мекунем.

Фарз мекунем, ки хати рости A_1A_2 ба тири Oz параллел нест. Аз нуқтаҳои A_1 ва A_2 хатҳои рости ба тири Oz параллелро мегузаронем (расми 94). Онҳо ҳамвории Oxy-ро дар нуқтаҳои $\bar{A}_1$ ва $\bar{A}_2$ мебуранд.



Расми 94

Абсиссаю ординатаи ин нуктахо бо абсиссаю ординатаи нуқтаҳои A_1 ва A_2 якхелаанд, вале апликатаашон нул аст. Аз нуқтаи A_2 ҳамвории ба ҳамвории Oxy паралелро мегузаронем. Вай хати рости $A_1\bar{A}_1$–ро дар нуқтаи C мебурад. Секунҷаи A_1CA_2 росткунҷа аст. Дар ҳақиқат, ҳамвории аз нуқтаи A_2 мегузаштагӣ ва бо Oxy паралел буда ба тири Oz, яъне ба хати ба ин тир параллели $A_1\ \bar{A}_1$ перпендикуляр аст. Пас $A_1C\perp A_2C$. Барои ҳамин аз рӯи теоремаи Пифагор

$$A_1A_2^2=A_1C^2+CA_2^2\ .$$

Вале $CA_2=\ \bar{A}_1\bar{A}_2$; $\bar{A}_1\bar{A}_2=(x_1\text{-}x_2)^2+(y_1\text{-}y_2)^2$, $A_1C=|z_2–z_1|$. Барои ҳамин

$$A_1A_2^2=(x_2\text{-}x_1)^2+(y_2\text{-}y_1)^2+(z_2\text{-}z_1)^2.$$

Рафту агар порчаи A_1A_2 ба тири Oz паралел бошад, он гоҳ $A_1A_2=|z_2\text{-}z_1|$ буда, $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ аст ва формулаи ҳосилшуда дар ин ҳолат ҳам ҳамон натиҷаро медиҳад.

Ҳамин тариқ, барои масофаи байни нуқтаҳои A_1 ва A_2 формулаи зерин ҳосил мешавад:

$$A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2(z_2-z_1)^2}\ .$$

Инак, *масофаи байни ду нуқта ба решаи квадратӣ аз суммаи квадрати фарқҳои координатаҳои мувофиқи нуқтаҳо баробар аст.*

Масъалаи 1. Масофаи нуқтаҳои: 1) $A(-3;2;1)$ва $B(4;1;7)$; 2) $A(x;4;-5)$ ва $B(3;1;4)$-ро меёбем.

Ҳал:

1) $|AB|=\sqrt{(4-(-3))^2+(1-2)^2+(7-1)^2}=\sqrt{7^2+1^2+6^2}=\sqrt{86}$;

2) $|AB|=\sqrt{(3-x)^2+(1-4)^2+(4-(-5))^2}=\sqrt{(3-x)^2+3^2+9^2}=\sqrt{x^2-6x+99}$.

Масъалаи 2. Дар тири Ox нуқтаеро меёбем, ки аз нуқтаҳои $A(1;2;3)$ва $B(-2;1;1)$ дар як хел масофа ҷойгир аст.

Ҳал. Агар C нуқтаи матлуб бошад, пас $C(x;0;0)$ аст. Мувофиқи шарт квадрати масофаҳо бо ҳамдигар баробаранд, яъне $AC^2=BC^2$. Мувофиқи формулаи масофа ва шарти масъала

$$AC^2=(x\text{-}1)^2+2^2+3^2=(x\text{-}1)^2+13,$$

$$BC^2=(x+2)^2+1^2+1^2=(x+2)^2+2$$

ва

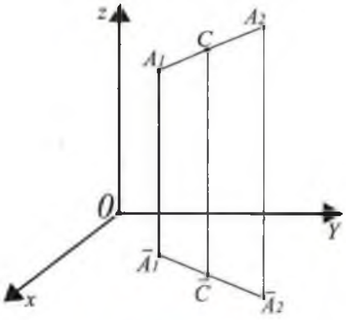
$$(x-1)^2+13=(x+2)^2+2$$

$$\text{ё}\quad x^2-2x+14=x^2+4x+6.$$

Аз ин ҷо $6x=8$ ва $x=\frac{4}{3}=1\frac{1}{4}\cdot$

Ҷавоб: $C\left(\frac{4}{3};0;0\right)$, $x=\frac{4}{3}=1\frac{1}{4}$.

Акнун координатаҳои миёнаҷои порчаи A_1A_2-ро бо воситаи координатаҳои нӯгҳои он ифода мекунем (расми 95). Бигузор $C(x;y;z)$ миёнаҷои порчаи A_1A_2 аст. Аз нуқтаҳои A_1,C,A_2 хатҳои ба тири Oz параллелро мегузаронем. Онҳо ҳамвории Oxy-ро дар нуқтаҳои $A_1(x_1;y_1;0)$, $\overline{C}\ (x;y;0)$ ва $A_2(x_2;y_2;0)$ мебуранд. Мувофиқи теоремаи **Фалес** нуқтаи C_1 миёнаҷои порчаи A_1A_2 аст. Бинобар ин мувофиқи формулаи планиметрӣ



Расми 95

$$x=\frac{x_1-x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Барои ёфтани z кифоя аст, ки ба ҷои ҳамвории Oxy ҳамвории Oxz-ро гирем. Яъне, порчаи A_1A_2-ро якҷоя бо миёнаҷои он C ба ҳамвории Oxz параллел ба тири Oy проектсия намоем. Дар айни ҳол барои z формулаи монанд ҳосил мешавад:

$$z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Чун қоида миёнаҷои порчаи A_1A_2-ро бо $M_{A_1A_2}$ ишорат мекунем.

Масъалаи 3. Исбот мекунем, ки чоркунҷаи $ABCD$, ки қуллаҳояш $A(0;2;-3)$, $B(-1;1;1)$, $C(2;-2;-1)$, $D(3;-1;-5)$ мебошанд, параллелограмм мебошад.

Ҳал.

$$M_{AC} = M\left(\frac{0+2}{2};\frac{2-2}{2};\frac{-3-1}{2}\right) = M(1;0;-2),$$

$$M_{BD} = M\left(\frac{-1+3}{2};\frac{1-1}{2};\frac{1-5}{2}\right) = M(1;0;-2).$$

Инак, диагоналҳои чоркунҷа дар як нуқта бурида шуда, дар нуқтаи буриш ба ду ҳиссаи баробар тақсим мешаванд. Пас чоркунҷа параллелограмм аст.

1. Масофаи байни ду нуқта дар фазо бо кадом формула ифода мешавад? **2.** Масофаи байни ибтидои координатаҳо ва нуқтаи додашударо чӣ тавр ёфтан мумкин аст? **3.** Координатаҳои миёнаҷои порча, ки нӯгҳояш дода шудааст, ба чӣ баробар аст? **4.** Чӣ тавр аз рӯи координатаҳои чор нуқта муқаррар кардан мумкин аст, ки онҳо қуллаҳои параллелограмманд?

194. Масофаи байни нуқтаҳои: 1) *A*(4;0;-2) ва *B*(2;-1;3); 2) *A*(-2;4;6) ва *B*(2; -2; 5)-ро ёбед.

195. Дар тири *Oy* нуқтаеро ёбед, ки аз нуқтаҳои *A*(2;3;0) ва *B*(-1;2;-5) дар як хел масофа ҷойгир аст.

196. Кадоме аз нуқтаҳои *A*(4;-5;1) ё *B*(2;1;7) аз ибтидои координатаҳо дуртар аст?

197. Кадоме аз нуқтаҳои *A*(-3;3;1) ё *B*(4;-2;1) ба ибтидои координатаҳо наздиктар аст?

198. Масофаи нуқтаи *A*(2;1;-3)-ро то: 1) ҳамвориҳои координатавӣ; 2) тирҳои координатавӣ; 3) ибтидои координатаҳо ҳисоб кунед.

199. Нуқтаҳои *A*(-2;3;5), *B*(1;2;4), *C*(4;-3;6) қуллаҳои секунҷаанд. Тарафҳои секунҷаро ёбед?

200. Оё нуқтаҳои *A*(2;-1;0), *B*(0;1;-4), *C*(1;-4;1) қуллаҳои секунҷаанд?

201. Координатаҳои миёнаҷои порчаи нӯгҳояш нуқтаҳои *A*(-7;-5;2) ва *B*(4;1;-6) буда чанданд?

202. Магар чоркунҷаи *ABCD*, ки қуллаҳояш дар нуқтаҳои *A*(2;2;-3), *B*(-1;2;1), *C*(2;-3;-1), *D*(-3;-4;-5) ҷойгир аст, параллелограмм мебошад?

203. Нишон диҳед, ки чоркунҷаи *ABCD* ромб аст, агар *A*(0;2;0), *B*(1;0;0), *C*(2;0;2), *D*(1;2;2) бошад.

204. Координатаҳои қуллаи D-и параллелограмми $ABCD$-ро ёбед, агар координатаҳои се қуллаи дигари он $A(0;2;-3)$, $B(3;4;5)$, $C(4;7;1)$ дода шуда бошанд.

205. Қуллаҳои секунҷа дода шудаанд: $A(-4;1;5)$, $B(1;0;3)$, $C(3;-2;1)$. Дарозии медианаҳои онро ҳисоб кунед.

206. Як нӯги порча $A(2;4;-2)$ ва миёнаҷои он $C(1;2;1)$ дода шудааст. Координатаҳои нӯги дигари порча $B(x;y;z)$-ро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

207. Секунҷаи ABC дода шудааст. Исбот кунед, ки:
1) $\sin A = \sin (B + C)$; 2) $\cos A = - \cos (B + C)$ аст.

208. Масофаи байни нуқтаи M, ки берун аз ҳамвории α ҷойгир аст, то: 1) ҳамвории α; 2) хати росте, ки дар ҳамвории α ҷойгир аст, чӣ тавр муайян карда мешавад?

209. Дарозии хода бояд чанд бошад, то ки охирҳои онро дар ду пояҳои амудии баландиашон 4*м* ва 8*м*, ки масофаашон 3*м* аст, гузоштан мумкин бошад?

210. Нуқтаи $A(4;2;5)$ дода шудааст. Координатаҳои қуллаҳои параллелепипеди координатавии ин нуқтаро ёбед.

16. Ҳаракат, симметрия ва параллелкӯчонӣ дар фазо

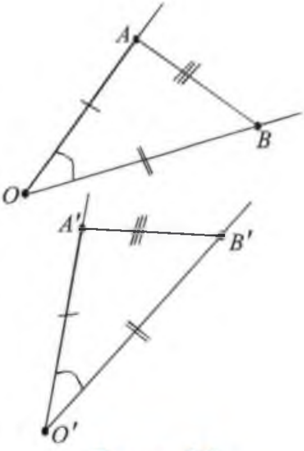
Агар ҳар як нуқтаи фигураи додашударо бо ягон тарз ҷойгардон кунем, фигураи дигарро ҳосил мекунем. Дар ин ҳолат мегӯянд, ки ин фигура аз фигураи додашуда дар натиҷаи *табдилдиҳӣ* ҳосил шудааст. Дар ҳаморӣ чунин табдилдиҳиҳоро, ба монанди ҳаракат, симметрия, параллелкӯчонӣ ва ғайраро муоина карда будем. Акнун ин мафҳумҳоро дар фазо паҳн намуда, хосияти онҳоро муайян менамоем.

1^0. Ҳаракат. Айнан мисли ҳаракат дар ҳаморӣ, ҳаракат дар фазо ҳам як навъи табдилдиҳӣ мебошад.

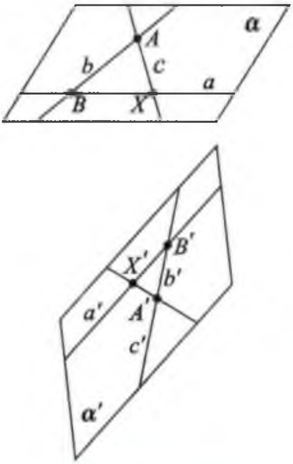
Таърифи. Табдилдиҳие, ки дар он масофаи байни нуқтаҳо нигоҳ дошта мешавад, *ҳаракат* ном дорад.

Ҳамон тавре, ки дар ҳамворӣ муқаррар карда будем, дар фазо низ исбот карда мешавад, ки ҳангоми ҳаракат хатҳои рост ба хатҳои рост, нимхатҳои рост ба нимхатҳои рост, порчаҳо ба порчаҳо табдил меёбанд ва кунҷҳои байни нимхатҳои рост нигоҳ дошта мешаванд.

Дар ҳақиқат, бигузор нуқтаҳои A, B, C дар як хати рост ҷойгир буда, ҳангоми ҳаракат ба нуқтаҳои A', B', C' табдил меёбанд. Агар фарз кунем, ки B дар байни A ва C ҷойгир бошад, он гоҳ $AB+BC=AC$ аст. Мувофиқи таърифи ҳаракат, аз ин ҷо бармеояд, ки $A'B' + B'C' = A'C'$ мебошад. Ин маънои онро дорад, ки B' дар хати рости $A'C'$ ҷойгир аст (вагарна нобаробарии ҷиддии секунҷа $A'B' + B'C' > A'C'$ иҷро мешуд!) ва бар замми ин дар байни A' ва C'. Азбаски хати рост, нимхати рост, порча бо ду нуқтаашон муайян мешаванд, пас ҳангоми ҳаракат хати рост ба хати рост, нур ба нур ва порча ба порча табдил меёбад. Нигоҳ дошта шудани кунҷҳо аз нигоҳдории масофа ва аломати баробарии секунҷаҳо аз рӯи се тараф бармеояд (расми 96).



Расми 96



Расми 97

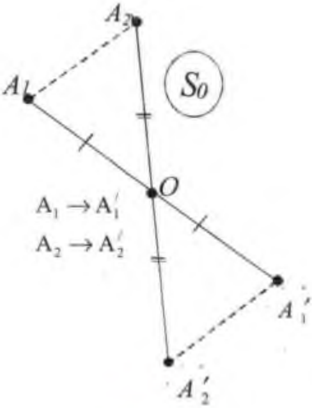
Хосияти нави ҳаракат дар фазо бо ҷумлаи зерин ифода меёбад.

Теоремаи 27. Ҳаракат ҳамвориро ба ҳамворӣ табдил медиҳад.

Исбот. Бигузор α ҳамвории дилхоҳ аст (расми 97). Дар он хати рости a ва нуқтаи A-и дар он ҷойгир набударо мегирем. Нуқтаи дилхоҳи B-и хати рости

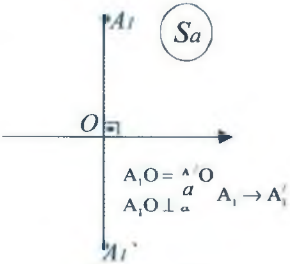
a-ро гирифта, аз рӯи нуқтаҳои A ва B хати рости b-ро мегузаронем.

Ҳаракат ин хатҳоро ба хатҳои рости a' ва b' табдил медиҳад. Ин хатҳо ҳамҷоя шуда наметавонанд, чунки кунҷи байни a' ва b' ба кунҷи байни a ва b баробар аст. Аз болои хатҳои рости ҳамдигарро мебуридагии a' ва b' ҳамвории α'-ро мегузаронем. Исбот мекунем, ки дар ин ҳаракат ҳамвории α ба ҳамвории α' табдил меёбад. Хати рости c-ро мегузаронем, ки хатҳои рости a ва b-ро мебурад (расми 97). Аз сабаби ҳангоми ҳаракат нигоҳ дошта шудани кунҷҳо хати рости c', ки c ба он табдил ёфтааст, хатҳои рости a' ва b'-ро мебурад, яъне c' ва бо он нуқтаи буришаш бо хати a', ки X' аст ҳам дар ҳамвории α' ҷойгир аст. Инак, ҳар гуна нуқтаи ҳамвории α ҳангоми ҳаракат ба нуқтаи ҳамвории α', ё ки α ба α' табдил меёбад. Теорема исбот шуд.

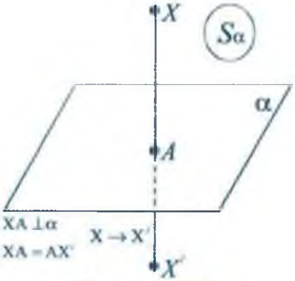


Расми 98

Мисли ҳамворӣ, дар фазо ду фигура *баробар* номида мешаванд, агар онҳо ҳангоми ягон ҳаракат ҳамҷоя шаванд.



Расми 99



Расми 100

2^0. Симметрия. Табдилдиҳиҳои симметрия нисбат ба нуқта (расми 98), нисбат ба хати рост (расми 99) ва гомотетия айнан мисли табдилдиҳиҳо дар ҳамворӣ дохил карда мешаванд. Дар қатори ин табдилдиҳиҳо дар фазо боз табдилдиҳии симметрияро нисбат ба ҳамвориӣ муоина менамоянд. Ин мафҳум ин тавр дохил карда мешавад. Бигузор α ҳамворӣ буда, X нуқтаи дилхоҳи фигураи фазо аст (расми 100). Аз нуқтаи X перпендикуляри XA-ро фаровarда дар давоми он порчаи AX'- и ба порчаи AX баробарро чудо мекунем. Нуқтаи X' ба нуқтаи X нисбати ҳамвории α *симметрӣ* номида мешавад. Чунин табдилдиҳӣ *табдилдиҳии симметрия нисбати ҳамвории* α ном дорад.

Агар нуқтаи X дар ҳамвории α ҷойгир бошад, он гоҳ ҳисоб карда мешавад, ки вай ба худ табдил мегардад. Агар табдилдиҳии симметрия нисбат ба ҳамвории α фигураро ба худаш табдил диҳад, фигураро *нисбат ба ҳамвории* α *симметрӣ* меноманд ва ҳамвории α *ҳамвории симметрияи* он номида мешавад.

Агар барои кӯтоҳгуфторӣ симметрияро нисбат ба нуқтаи O бо S_0, нисбат ба хати рости a бо S_a ва нисбат ба ҳамвории α бо S_α ишорат кунем, он гоҳ аз баробарии секунҷаҳои A_1OA_2 ва $A'_1OA'_2$-и расми 98 бармеояд, ки S_0 ҳаракат аст, яъне $A'_1A'_2=A_1A_2$. Чи тавре дида будем дар ҳамворӣ S_a ҳаракат буд. Нишон медиҳем, ки дар фазо S_a ва S_α низ ҳаракатанд. Барои ин аввал масъалаи зеринро ҳал мекунем.

Масъалаи 1. Нуқтаи (1;2;3) дода шудааст. Нуқтаҳоеро, ки нисбат ба ҳамвориҳои координатавӣ ба ин нуқта симметрианд меёбем.

Ҳал. Нуқтае, ки нисбат ба ҳамвории Oxy ба нуқтаи (1;2;3) симметрӣ аст, дар хати рости ба ҳамвории Oxy перпендикуляр будагӣ воқеъ аст. Бинобар ин координатаҳои x ва y-и онҳо якхела аст: $x=1$, $y=2$. Нуқтаи симметрӣ аз ҳамвории Oxy дар ҳамон масофа (дар дигар тарафаш) воқеъ аст. Бинобар ин координатаи z-и он фақат бо аломаташ фарқ мекунад, яъне $z=-3$. Инак, нуқтае, ки нисбат ба ҳамвории Oxy ба нуқтаи (1;2;3) симметрӣ мебошад, нуқтаи (1;2;-3) аст. Барои ҳамвориҳои координатавии дигар ҳал ҳамин тавр ёфта мешавад.

Теоремаи 28. Табдилдиҳии симметрия нисбат ба нуқта, хати рост ва ҳамворӣ дар фазо ҳаракат мебошад.

Исбот. Системаи координатавиро ҳамеша чунин интихоб кардан мумкин аст, ки ҳамвории симметрия α бо ҳамвории координатавии Oxy ва тири симметрия α бо тири координатавии Ox ҳамҷоя шавад. Ҳалли масъалаи боло нишон медиҳад, ки симметрияи $S_a = S_o$ нуқтаи $A(x;y;-z)$-ро ба нуқтаи

A' $(x;y;z)$ табдил медиҳад. (Ин нуқтаҳо дар ҳамвории Oxy дорои проектсияи $A_{xy}(x;y;0)$ буда, аз он дар як хел масофа ҷойгиранд: $|z|=|-z|$.) Нуқтаи дигари $A_1(x_1;y_1;z_1)$ бошад ба нуқтаи A'_1 $(x_1;y_1;-z_1)$ табдил меёбад. Зоҳиран фаҳмост, ки $AA_1=A'A'_1$ аст, яъне S_α ҳаракат мебошад.

Ҳангоми симметрия нисбат ба тири Ox бошад, нуқтаи $A(x;y;z)$ ба нуқтаи $A'(x;-y;-z)$ табдил меёбад. (Дар ҳақиқат, миёнаҷои порчаи AA' нуқтаи $M(x;0;0)$ аст, яъне бо проектсияҳои A ва A' дар тири Ox якхела аст.) Мисли пешина нишон додан мумкин аст, ки ин симметрия низ ҳаракат мебошад. Теорема исбот шуд.

Қайд мекунем, ки симметрия дар табиат васеъ паҳн мебошад. Масалан, онро дар шакли баргҳо ва гулҳои растаниҳо, ҷойгиршавии узвҳои гуногуни ҳайвонот ва одамон, ҷисмҳои кристаллӣ мушоҳида кардан мумкин аст. Симметрия дар амалия, сохтмон ва техника васеъ истифода карда мешавад (биноҳо, машинаҳо, механизмҳо ва ғайра).

3^0. Параллелкӯчонӣ. Табдилдиҳие, ки дар он нуқтаи дилхоҳи $(x;y;z)$-и фигура ба нуқтаи $(x+a;\ y+b;\ z+c)$, ки дар ин ҷо a,b,c ададҳои доимианд, табдил меёбад, *параллелкӯчонӣ* дар фазо ном дорад. Параллелкӯчонӣ дар фазо бо формулаҳои

$$x' = x + a,\ \ y' = y + b,\ \ z' = z+c$$

ифода мешавад. Дар ин ҷо x', y', z' координатаҳои нуқтае мебошад, ки ҳангоми параллелкӯчонӣ нуқтаи $(x;y;z)$ ба он табдил меёбад. Айнан чуноне ки дар ҳамворӣ исбот карда будем, хосиятҳои зерини параллелкӯчонӣ исбот карда мешаванд:

1. Параллелкӯчонӣ ҳаракат аст.

2. Ҳангоми параллелкӯчонӣ нуқтаҳо аз рӯи хатҳои рости параллел (ё ҳамҷояшаванда) ба якхел масофа мекӯчанд.

3. Ҳангоми параллелкӯчонӣ ҳар як хати рост ба хати рости ба он параллел (ё ба худаш) табдил меёбад.

4. Нуқтаҳои A ва A' чи хел набошанд, параллелкӯчонии ягонае ҳаст, ки дар он нуқтаи A ба нуқтаи A' табдил меёбад.

Масъалаи 2. Қиматҳои a,b,c-и дар формулаҳои параллелкӯчонӣ бударо меёбем, агар маълум бошад, ки нуқтаи $A(2;-4;6)$ ба нуқтаи $A(0;-3;2)$ табдил меёбад.

Ҳал. Координатаҳои нуқтаи A ва A'-ро дар формулаҳои параллелкӯчонӣ гузошта, муодилаҳо ҳосил мекунем. Аз онҳо a,b,c -ро муайян менамоем:

$$0=2+a,\ -3=-4+b,\ 2=6+c.$$

Аз ин ҷо $a=-2,\ b=1, c=-4.$

Хосияти зерин барои параллелкӯчонӣ дар фазо нав аст:

Ҳангоми параллелкӯчонӣ дар фазо ҳар як ҳамворӣ ё ба худаш, ё ба ҳамвории ба он параллел табдил меёбад.

Исботи хосият. Бигузор α ҳамвории дилхоҳ аст. Дар он ду хати рости a ва b-и ҳамдигарро мебуридагӣ мегузаронем. Мувофиқи хосияти 3, ҳангоми параллелкӯчонӣ ин ду хат ё ба худашон, ё ба хатҳои рости ба онҳо параллели a' ва b' табдил меёбанд. Ҳамвории α ба ҳамвории α', ки аз рӯи хатҳои рости a' ва b' мегузарад, табдил мешавад. Агар ҳамвории α' бо ҳамвории α ҳамҷоя нашавад, он гоҳ мувофиқи теоремаи 8-и пункти 7 вай ба α параллел аст. Теорема исбот шуд.

---

1. Чӣ гуна табдилдиҳиро ҳаракат меноманд? **2.** Исбот кунед, ки ҳаракат дар фазо ҳамвориро ба ҳамворӣ табдил медиҳад. **3.** Табдилдиҳии симметрия нисбат ба нуқта, ба хати рост ва ба ҳамворӣ чӣ тавр муайян карда мешавад? **4.** Ҳамвории симметрияи нуқта чист? **5.** Исбот кунед, ки табдилдиҳии симетрия нисбат ба нуқта, хати рост ва ҳамворӣ дар фазо ҳаракат аст. **6.** Чиро параллелкӯчонӣ меноманд? Хосиятҳоеро, ки ба ин табдилдиҳӣ ҳам дар ҳамворӣ ва ҳам дар фазо хосанд, номбар намоед. **7.** Нишон диҳед, ки ҳангоми параллелкӯчонӣ дар фазо ҳар як ҳамворӣ ё ба худаш, ё ба ҳамвории параллел табдил меёбад.

---

211. Нишон диҳед, ки ҳаракат секунҷаро ба секунҷаи ба он баробар табдил медиҳад.

212. Исбот кунед, ки ҳангоми ҳаракат дар фазо доира ба доираи дорои ҳамон радиус табдил меёбад.

213. Исбот кунед, ки ҳангоми ҳаракат дар фазо се нуқтаи дар як хати рост буда, ба се нуқтаи низ дар як хати рост ҷойгирбуда табдил меёбанд.

214. Исбот кунед, ки табдилдиҳии симметрия нисбат ба ҳамвории координатавии Oxz бо формулаҳои $x' = x$, $y' = -y$, $z' = z$ дода мешавад.

215. Нуқтаи $A(2;1;-4)$ дода шудааст. Нуқтаҳои нисбат ба ҳамвориҳои координатавии ба он симметрия бударо ёбед.

216. Нуқтаи $A(2;1;-4)$ дода шудааст. Нуқтаҳои нисбат ба тирҳои координатавии ба он симметрия бударо ёбед.

217. Нуқтаи $A(2;1;-4)$ дода шудааст. Нуқтаҳоеро ёбед, ки онҳо нисбат ба ибтидои координата ба ин нуқта симметрӣ мебошанд.

218.* Нишон диҳед, ки параллелкӯчонӣ хати ростро ба хати рости ба он чиликӣ табдил дода наметавонад.

219. Маълум, ки нуқтаи $A(2;1;-6)$ ҳангоми параллелкӯчонӣ ба нуқтаи $A'(4;8;3)$ табдил меёбад. Формулаҳои параллелкӯчониро нависед.

220. Маълум, ки ҳангоми параллелкӯчонӣ ибтидои координатаҳо ба нуқтаи $A'(3;4;-1)$ табдил меёбад. Координатаҳои нуқтаеро ёбед, ки нуқтаи $B(2;-4;-7)$ ба он табдил меёбад.

221. Маълум, ки ҳангоми параллелкӯчонӣ нуқтаи $A(4;7;-2)$ ба нуқтаи $A'(1;-2;0)$ табдил меёбад. Ибтидои координатаҳо дар айни ҳол ба кадом нуқта табдил меёбад?

222. Оё параллелкӯчоние ҳаст, ки дар он нуқтаи A ба нуқтаи B ва нуқтаи C ба нуқтаи D табдил меёбад, агар: 1) $A(2;1;0)$, $B(1;0;1)$, $C(3;-2;1)$, $D(2;-3;0)$; 2) $A(0;1;2)$, $B(-1;0;1)$, $C(3;-2;2)$, $D(2;-3;1)$ бошад.

Масъалаҳо барои такрор

223. Тарафҳои секунҷа ба 0,8*м*, 1,6*м* ва 2*м* баробаранд. Тарафҳои секунҷаи ба ин секунҷа монандро ёбед, ки периметраш ба 5,5*м* баробар аст.

224. Маълум, ки проектсияи ду хати рост дар ҳамворӣ ҳамдигарро мебуранд. Исбот кунед, ки ин хатҳои рост параллел нестанд.

225. Ду ҳамвории параллел ва нуқтаи P-и дар байни онҳо ҷойгирнабуда дода шудаанд. Ду хати росте, ки аз нуқтаи P мегузаранд, ҳамвории ба нуқтаи P наздикбударо дар нуқтаҳои A_1 ва A_2, дурбударо мувофиқан дар нуқтаҳои B_1 ва B_2 мебуранд. Дарозии порчаи B_1B_2-ро ёбед, агар $A_1A_2 = 6$ см ва $PA_1 : A_1B_1 = 3 : 2$ бошад.

226. Дар ҳамвории Oxy нуқтаи $D(x;y;0)$-ро ёбед, ки аз нуқтаҳои $A(1;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;-1;0)$ дар якхел масофа ҷойгир аст.

§6. ВЕКТОРҲО ДАР ФАЗО

17. Координатаҳои вектор

Мисли ҳамворӣ, дар фазо порчаи самтдорро **вектор** меноманд. Зери порчаи самтдори $\overrightarrow{AB}$ порчаи AB-ро мефаҳманд, ки яке аз нӯгҳояш A – ибтидо ва нӯги дигараш B ҳамчун интиҳо қабул карда мешавад.

Айнан мисли ҳамворӣ чунин мафҳумҳои асосӣ барои векторҳо дар фазо ба монанди самти вектор, қимати мутлақи (дарозии) вектор, баробарии векторҳо дохил карда мешавад.

Агар нуқтаи ибтидоии вектори A дорои координатаҳои $(x_1; y_1; z_1)$ ва нуқтаи интиҳояш B дорои координатаҳои $(x_2; y_2; z_2)$ бошад, он гоҳ ададҳои $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$-ро **координатаҳои** вектори $\overrightarrow{AB}$ меноманд. Ду вектор баробар ҳисоб карда мешаванд, агар координатаҳои баробар дошта бошанд. Ва баръакс, дар векторҳои баробар координатаҳои мувофиқ баробаранд. Масалан, агар $A(2;7;-3)$, $B(1;0;3)$, $C(-3;-4;5)$ ва $D(-2;3;-1)$ бошанд, он гоҳ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ аст. Дар ҳақиқат, $\overrightarrow{AB} = (1-2;0-7;3-(-3)) = (-1;-7;6)$,

$\overrightarrow{DC} = (-3-(-2);-4-3;-4-3;5-(-1) = (-1;-7;6)$. Айнан ҳамин хел санҷидан мумкин аст, ки $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ мебошад.

Масъалаи 1. Нуқтаҳои $A(4;3;0)$, $B(-1;2;4)$, $C(0;2;5)$, дода шудаанд. Нуқтаи $D(x;y;z)$-ро меёбем, ки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ аст.

Ҳал. Дорем $\overrightarrow{AB} = (-1-4;2-3;4-0) = (-5;-1;4)$, $\overrightarrow{CD} = (x-0;y-2;z-5)$ мувофиқи шарт $x-0=-5$, $y-2=-1$, $z-5=4$. Аз ин ҷо $x=-5$, $y=1$, $z=9$.

Ҷавоб: $D(-5;1;9)$.

Чи тавре дидем, аломати баробарии векторҳо имконият медиҳад, ки барои ишорати вектор координатаҳояшро истифода кунем: $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$. Агар ҳамаи координатаҳои вектор нул бошанд, он гоҳ вай вектори **нулӣ** ном дорад. Ин вектор самт надорад.

Агар $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ бошад, он гоҳ ададӣ $|a| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ *дарозӣ ё қимати мутлақ* ва ё *модули вектор* ном дорад. Агар $A(x_1;y_1;z_1)$ ибтидо ва $B(x_2;y_2;z_2)$ интиҳои вектори $\overrightarrow{AB}$ бошанд, он гоҳ дарозиаш ба масофаи байни нуқтаҳои A ва B баробар аст:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ .$$

Барои баробарии ду вектор зарур ва кифоя аст, ки онҳо самтҳои якхела ва дарозии баробар ё ки кардинатаҳои якхела дошта бошанд. Вектор *воҳидӣ* номида мешавад, агар дарозии он ба 1 баробар бошад. Масалан, вектори $\vec{a} = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ воҳидӣ аст, чунки $|a| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$.

Масъалаи 2. Маълум, ки дарозии векторҳои $\vec{a} = (4;1;-2)$ ва $\vec{b} = (1;2;z)$ ба ҳам баробаранд. $\overset{=}{z}$ -ро меёбем.

Ҳал. Азбаски $|\vec{a}| = \sqrt{4^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{21}$, $|\vec{b}| = \sqrt{1^2+2^2+z^2} = \sqrt{5+z^2}$ аст, пас аз $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$ бармеояд, ки $21=5+z^2$ ё $z^2=16$, ё ки $z = \pm 4$. Ҳамин тариқ, векторҳои $\vec{b}_1 = (1;2;4;)$ ва $\vec{b}_2 = (1;2;-4;)$ бо $\vec{a}$ дарозии якхела доранд.

---

1. Чиро дар фазо вектор меноманд? **2.** Координатаҳои вектор чӣ тавр муайян карда мешаванд? Шарти баробарии ду вектор бо координатаҳояшон чӣ тавр навишта мешавад? **3.** Дарозии вектор бо воситаи координатаҳояш чӣ хел муайян мешавад. **4.** Вектори нулӣ чист? Оё вай самт дорад? Дарозиаш чанд аст? **5.** Чӣ гуна векторро воҳидӣ меноманд.

---

227. Координатаҳои вектори $\overrightarrow{AB}$ -ро ёбед, агар: 1) $A(2;-1;-7)$ ва $B(3;-4;-2)$; 2) $A(0;-1;6)$ ва $B(4;8;-3)$ бошад.

228. Дарозии вектореро, ки ибтидояш нуқтаи $A(0;-2;3)$ ва интиҳояш нуқтаи $B(4;8;-1)$ аст, ҳисоб кунед.

229. Дарозии вектори $\vec{a} = (4;-1;-2)$ -ро ёбед.

230. Нуқтаҳои $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$, $C(0;2;-1)$ дода шудаанд.

Нуқтаи $D(x;y;z)$-ро ёбед, агар векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ баробар бошанд.

231. Векторҳои $\vec{a} = (2;1;-4)$ ва $\vec{b} = (x;-1;2)$ дарозии баробар доранд. x-ро ёбед.

232. Дарозии вектори $\vec{a} = (-a;a;-2a)$ ба 6 баробар аст. Ин векторро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

233. Катетҳои секунҷаи росткунҷа ба 7*м* ва 24*м* баробаранд. Ҳамвории α аз гипотенуза гузашта ба ҳамвории секунҷа кунҷи 30^0-ро ташкил медиҳад. Масофаи байни қуллаи кунҷи рост ва ҳамвориро ёбед.

234*. Нуқтаҳои $A(1;0;2)$, $B(2;1;0)$, $C(1;2;0)$ нуқтаҳои пай дар пайи қуллаҳои параллелограмм мебошанд. Суммаи координатаҳои қуллаи чорумро ёбед.

235. Дар тири Oz нуқтаеро ёбед, ки вай аз нуқтаҳои $A(2;1;1)$ ва $B(4;-2;2)$ дар якхел масофа ҷойгир аст.

18. Амалҳо бо векторҳо

Амалҳо бо векторҳо дар фазо ба монанди ҷамъи векторҳо, зарби вектор бар адад айнан чун дар ҳамворӣ муайян карда мешаванд. *Суммаи* векторҳои $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ ва $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ гуфта вектори $c=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$-ро меноманд ва менависанд: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$. Масалан, суммаи векторҳои $\vec{a}=(-2;1;4)$ ва $\vec{b}=(4;-2;3)$ вектори $\vec{c}=(2;-1;7)$ мебошад.

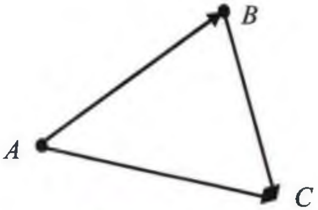
Барои векторҳои дилхоҳи $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ баробариҳои $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (қонуни ҷойивазкунӣ) ва $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (қонуни комбинатсиягӣ) ҷой доранд. Барои исботи ин баробариҳо баробар будани координатаҳои қисми чап ва ростро нишон додан зарур аст. Ин бошад зоҳиран фаҳмост.

Айнан чун дар ҳамворӣ баробарии $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ исбот карда мешавад. Ин баробарӣ *қоидаи секунҷаҳо* ном дорад (расми 101).

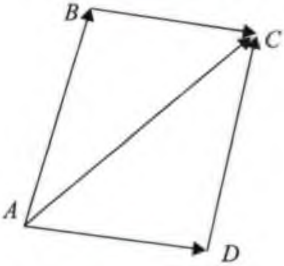
Суммаи векторҳое, ки ибтидои умумӣ доранд, ҳамчун диагонали параллелограмми дар ин векторҳо сохташуда тасвир мешавад. Инро *қоидаи параллелограмм* меноманд (расми 102). Дар ҳақиқат, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ аст. Пас $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Ду вектор *муқобил* номида мешаванд, агар суммаи онҳо вектори нулӣ бошад. Векторҳои муқобил дарозии якхела дошта, самташон ба ҳам муқобил аст. Масалан, векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ ҳамеша ба ҳам муқобиланд.

Масъалаи 1. Нуқтаҳои $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$ ва C $(0;2;-1)$ дода шудаанд. Нуқтаи D-ро меёбем, агар маълум бошад, ки суммаи векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ вектори нулӣ аст.



Расми 101



Расми 102

Ҳал. Агар $D(x;y;z)$ бошад, он гоҳ $\overrightarrow{AB}=(-2;1;1)$ ва $\overrightarrow{CD}=(x-0;y-2;z+1)$ аст, пас мувофиқи шарт

$$0=x-2=y-2+1=1+(z+1).$$

Аз ин ҷо $x=2, y=1, z=-2$.

Ҷавоб: $D(2;1;-2)$.

Ҳосили зарби вектори $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ бар адади λ гуфта вектори $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3)$-ро меноманд. Айнан чун дар ҳамворӣ исбот кардан мумкин аст, ки дарозии вектори $\lambda\vec{a}$ ба $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ баробар мебошад. Самти $\lambda\vec{a}$ ҳангоми $\lambda>0$ будан бо самти $\vec{a}$ якхела буда, ҳангоми $\lambda<0$ будан ба самти $\vec{a}$ муқобил аст.

Чун дар ҳамворӣ ду вектор дар фазо *коллинеарӣ* номида мешавад, агар онҳо дар як хати рост ё дар хатҳои рости параллел ҷойгир бошанд. Самти ду вектори коллинеарӣ якхела ё муқобил аст. Шарти зарурӣ ва кифоягии коллинеарии векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ мавҷудияти чунин адади $\lambda \neq 0$ аст, ки $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ бошад. Яъне $(a_1;a_2;a_3) = \lambda(b_1;b_2;b_3) = (\lambda b_1;\lambda b_2;\lambda b_3)$ ё ки $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, $a_3 = \lambda b_3$. Ин се баробариро дар шакли таносуби дучанда навиштан мумкин аст:

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = \lambda .$$

Кӯтоҳ карда гуфтан мумкин аст, ки барои коллинеарии ду вектор зарур ва кифоя аст, ки координатаҳои онҳо мутаносиб бошанд.

Масъалаи 2. Векторҳои $\vec{a} = (1;-2;1)$ ва $\vec{b} = (3;4;-6)$ дода шудаанд. Вектори $2\vec{a} - 3\vec{b}$-ро меёбем.

Ҳал.

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = 2\cdot(1;-2;1) - 3\cdot(3;4;-6) = (2;-4;2) - (9;12;-18) =$$
$$= (2-9-4-12;2-(-18)) = (-7;-16;20).$$

Масъалаи 3. Барои кадом қиматҳои m ва n коллинеарӣ будани векторҳои $\vec{a} = (2;n;3)$ ва $\vec{b} = (3;2;m)$-ро муайян мекунем.

Ҳал. Мувофиқи шарти коллинеарӣ $2:3 = n:2 = 3:m = \lambda$. Аз ин ҷо $\lambda = \frac{2}{3}$, $n = 2\lambda = \frac{4}{3}$, $\frac{3}{m} = \frac{2}{3}$, $2m = 9$, $m = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

Ҷавоб: m=4,5; $n = 1\frac{1}{3}$.

---

1. Суммаи ду вектор дар фазо чӣ тавр муайян карда мешавад? **2.** Қоидаи секунҷа барои ёфтани суммаи ду вектор чӣ тавр навишта мешавад? Қоидаи параллелограмм – чӣ? **3.** Дар кадом ҳолат ду вектор ба ҳамдигар муқобиланд? **4.** Ҳосили зарби вектор бар адад чӣ тавр муайян карда мешавад? **5.** Дар кадом ҳолат ду вектор ба ҳамдигар коллинеарианд? Шарти коллинеарӣ бо координатаҳо чӣ тавр навишта мешавад?

236. Суммаи векторҳои $\vec{a}=(2;1;-4)$ ва $\vec{b}=(3;4;1)$ - ро ёбед.

237. Суммаи векторҳои $\vec{a}=(1;\ 1,4;\ -2,3)$, $\vec{b}=(0;\ 1,5;\ -2,1)$ ва $\vec{c}=(\frac{1}{3};4\frac{1}{5};2)$ -ро ёбед.

238. Координатаҳои вектореро ёбед, ки вай ба вектори $\vec{a}=(-1;3;-4)$ муқобил аст.

239. Векторҳои $\vec{a}=(2;-1;-4)$ ва $\vec{b}=(1;3;2)$ дода шудаанд. Координатаҳои вектори $-3\vec{a}+5\vec{b}$ -ро ёбед.

240. Дарозии вектори $3\vec{a}-\vec{b}$ -ро ёбед, агар $\vec{a}=(0;\ -1,5;\ 2)$, $\vec{b}=(2;\ 1;-\ 3;)$ бошанд.

241*. Кадом шартҳоро координатаҳои нуқтаҳои A,B,C бояд қаноат намоянд, то ки онҳо дар як хати рост ҷойгир бошанд?

242. Барои кадом қиматҳои m ва n векторҳои: 1) $\vec{a}=(m;2;5)$ ва $\vec{b}=(1;-1;n)$; 2) $\vec{a}=(m;n;2)$ ва $\vec{b}=(6;9;3)$ коллинеарианд?

243. Вектори $\vec{a}=(1;2;3)$ дода шудааст. Вектори ба он коллинеариро ёбед, ки ибтидоаш дар нуқтаи $A(1;1;1)$ ва интиҳояш дар ҳамвории Oxy ҷойгир аст.

244. Вектори воҳидиеро ёбед, ки ба вектори $\vec{a}=(3;2;-2)$ коллинеарӣ аст?

245. Нуқтаҳои $A(1;0;2)$ ва $B(-1;1;1)$ дода шудаанд. Вектори воҳидии $\vec{a}=(a;b;c)$ -ро ёбед, ки ба вектори $\overrightarrow{AB}$ коллинеарӣ буда, бо он самти якхела дорад.

246. Дар кадом ҳолат вектори $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ ба тири Ox параллел аст?

Масъалаҳо барои такрор

247. Дарозии вектореро, ки ибтидояш нуқтаи $A(4{,}2;\ 0;\ 1{,}6)$ ва интиҳояш нуқтаи $b(1{,}2;\ 1{,}4;\ 2{,}4)$ аст, ёбед.

248. Хатҳои рости AB ва CD бурида мешаванд. Хатҳои рости AC ва BD чиликӣ шуда метавонанд?

249. Магар вектори $\vec{a}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{2}{3}\right)$ воҳидӣ аст?

250. Векторҳои воҳидии (0;1;0), (1;0;0), (0;0;1) дар кадом тирҳои координатавӣ ҷойгиранд?

251*. Нуқтаҳои B_2 ва C_2 миёначои порчаи BB_1 ва BC_1- и куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ мебошанд. Периметри буриши кубро бо ҳамвории AB_2C_2 ёбед, агар $AB=a$ бошад.

19. Зарби скалярии векторҳо. Хосиятҳои он

Таъриф. *Зарби скалярии* векторҳои $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ ва $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ гуфта, адади $(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$-ро меноманд.

Масалан, зарби скалярии векторҳои $\vec{a}=(2;4;0)$ ва $\vec{b}=(-1;3;2)$ адади $2\cdot(-1)+4\cdot3+0\cdot2=-2+12+0=10$ мебошад.

Аз формула – таърифи зарби скалярии ду вектор бевосита бармеояд, ки вай дорои хосиятҳои зерин аст:

$$1)\ \left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right);$$

$$2)\ \left(\vec{a},\vec{a}\right)=a_1^2+a_2^2+a_3^2=\left|\vec{a}\right|^2.$$

Яъне, зарби скалярии вектор бар худаш адади ғайриманфӣ буда, ба квадрати дарозии вектор баробар аст.

$$3)\qquad (\vec{a},\alpha\vec{b}+\beta\vec{c})=\alpha(\vec{a},\vec{b})+\beta(\vec{a},\vec{c}),$$

ки дар ин ҷо α ва β ададҳои дилхоҳанд.

Хосиятҳои 1)-3)-ро истифода карда нишон додан мумкин аст, ки:

$$1^\circ.\ (\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a},\vec{a})+2(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{b});$$

$$2^\circ.\ (\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b})=(\vec{a},\vec{a})-2(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{b});$$

$$3^\circ.\ (\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b})=(\vec{a},\vec{a})-(\vec{b},\vec{b}).$$

Ҳамин тариқ, барои зарби скалярии векторҳо, ба формулаҳои сумма ва фарқи квадрати муқаррарии ададҳо монанд, формулаҳо ҷой доранд.

Масъалаи 1. Маълум, ки $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 6$ аст. $|\vec{a} + \vec{b}|$- ро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи хосияти 1°

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\right)=(\vec{a},\vec{a})+2(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{b})=$$

$$=3^2+2(\vec{a},\vec{b})+9^2=90+2(\vec{a},\vec{b}).$$

Адади $2(\vec{a},\vec{b})$ - ро меёбем. Аз рӯи хоситяи 2^0 ва шарт

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right)=(\vec{a},\vec{a})-2(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{b})=$$

$$=90+2(\vec{a},\vec{b})=36=6^2.$$

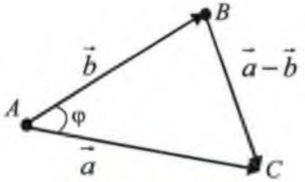
Аз ин ҷо $2(\vec{a},\vec{b})=90-36=54$.

Пас $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=90+2(\vec{a},\vec{b})=90+54=144$.

Инак, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{144}=12$.

Ҳарф ба ҳарф чуноне ки дар ҳамворӣ исбот карда будем, нишон дода мешавад, ки зарби скалярии векторҳо ба ҳосили зарби дарозиашон бар косинуси кунҷи байни онҳо баробар аст:

(1) $$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi,$$



Расми 103

ки дар ин ҷо φ кунҷи байни $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ мебошад (расми 103).

Формулаи (1) асосан дар се маврид истифода карда мешавад: 1) барои ёфтани $(\vec{a},\vec{b})$ ҳангоми дода шудани $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ ва φ; 2) барои ҳисоби φ ҳангоми дода шудани $(\vec{a},\vec{b})$, $|\vec{a}|^2 = (\vec{a},\vec{a})$, $|\vec{b}|^2 = (\vec{b},\vec{b})$; 3) барои муқаррар кардани перпендикулярии векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ (векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ *перпендикуляр* номида мешаванд, агар кунҷи байни онҳо 90^0 бошад. Аз (1) бармеояд, ки барои перпендикулярии ду вектор зарур ва кифоя аст, ки зарби скалярии онҳо нул бошад).

Масъалаи 2. Координатаҳои вектори $\vec{b}$-ро, ки ба вектори $\vec{a} = (-1;1;-2)$ коллинеарӣ аст меёбем, агар маълум бошад, ки $(\vec{a},\vec{b}) = 12$ аст.

Ҳал. Агар $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$ бошад, пас $(\vec{a},\vec{b}) = -1\cdot b_1 + 1\cdot b_2 - 2\cdot b_3 = 12$ аст. Инчунин мувофиқи шарти коллинеарӣ

$$\frac{-1}{b_1} = \frac{1}{b_2} = \frac{-2}{b_3} \quad \text{ё} \quad b_2 = -b_1, \; b_3 = -2b_2 = 2b_1.$$

Аз ин ҷо ва аз $-b_1 + b_2 - 2b_3 = 12$ меёбем: $-b_1 + b_1 - 4b_1 = 12$, яъне . $b_1 = -2$. Пас $b_2 = 2$. $b_3 = -4$.

Ҷавоб: $\vec{b} = (-2;2;-4)$.

Масъалаи 3. Барои кадом қимати m перпендикуляр будани векторҳои $\vec{a} = (m;7;-2)$ ва $\vec{b} = (-3;m;2)$-ро муқаррар мекунем.

Ҳал. Дорем $(\vec{a},\vec{b}) = m\cdot(-3) + 7\cdot m + (-2)\cdot 2 = -3m + 7m - 4$. Қимати ин ифода нул аст, агар $m=1$ бошад. **Ҷавоб:** m=1.

Масъалаи 4. Кунҷи байни векторҳои $\vec{a} = (\sqrt{0,4};\ \alpha;\ 1)$ ва $\vec{b} = (0;\ 2;\ -1)$ $\frac{\pi}{6}$ аст. Қимати α-ро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи формулаи (1)

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\sqrt{0,4}\cdot 0 + \alpha\cdot 2 - 1\cdot 1}{\sqrt{0,4+\alpha^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{2\alpha-1}{\sqrt{1,4+\alpha^2}\cdot\sqrt{5}}.$$

Аз ин ҷо $2(2\alpha-1) = \sqrt{15}\cdot\sqrt{1,4+\alpha^2}$. Барои ёфтани ҳалли ин муодилаи иррационалӣ ҳар ду тарафро ба квадрат бардошта ҳосил мекунем:

$$16\alpha^2 - 16\alpha + 4 = 21 - 15\alpha^2,$$

$$\alpha^2 - 16\alpha - 17 = 0.$$

Решаҳои ин муодилаи квадратӣ $\alpha_1 = -1$ ва $\alpha_2 = 17$ мебошанд. Вале $\alpha_1 = -1$ решаи муодилаи иррационалӣ нест, чунки $2\alpha_1 - 1 < 0$ мебошад.

Ҷавоб: $\alpha = 17$.

1. Зарби скалярии ду вектор чӣ тавр муайян карда мешавад? **2.** Хосиятҳои зарби скалярии векторҳоро номбар кунед. **3.** Кунҷи байни ду вектори ғайринулӣ бо кадом формула ҳисоб мешавад? **4.** Перпендикулярии ду вектор чӣ хел фаҳмида мешавад? Онро чӣ тавр муқаррар кардан мумкин аст?

252. Кунҷи байни векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ 150^0, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ аст.

Бузургии: 1) $(\vec{a},\vec{b})$; 2) $|\vec{a}+\vec{b}|^2$; 3) $|\vec{a}-\vec{b}|^2$;

4) $(\vec{a}+2\vec{b},\vec{a}-2\vec{b})$ - ро ёбед.

253. $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$, $|\vec{a}-\vec{b}|=30$ буданро дониста, $|\vec{a}+\vec{b}|$ - ро ёбед.

254. Маълум, ки $|\vec{a}|=3$, $|\vec{a}+\vec{b}|=1$, $|\vec{a}-\vec{b}|=7$. $|\vec{b}|$ -ро ёбед.

255. Барои кадом n ин векторҳо перпендикуляранд:

1) $\vec{a}=(2;-1;3)$, $\vec{b}=(1;3;n)$; 2) $\vec{a}=(n;-2;1)$, $\vec{b}=(n;2n;4)$?

256. Се нуқта дода шудааст: $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$, $C(0;2;-1)$. Дар тири Oz чунин нуқтаи $D(0;0;c)$-ро ёбед, ки векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ перпендикуляр бошанд.

257. Кунҷи байни векторҳои $\vec{a}=(\alpha;1;\sqrt{\frac{6}{5}})$ ва $\vec{b}=(3;1;0)$ ба $\frac{\pi}{4}$ баробар аст. Бузургии α-ро ёбед.

258. Чор нуқта дода шудааст: $A(0;1;-1)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;1;0)$, $D(2;-3;1)$. Косинуси кунҷи байни векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ -ро ёбед.

259. Се нуқта дода шудааст: $A(0;1;-1)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;1;0)$. Косинуси кунҷи C-и секунҷаи ABC ёфта шавад.

260. Координатаҳои вектори $\vec{b}$-ро, ки ба вектори $\vec{a} = (1;1;-\frac{1}{2})$ коллинеарӣ буда, бо вектори $\vec{k} = (0;0;1)$ кунҷи кундро ташкил мекунад, ёбед, агар $|\vec{b}| = 3$ бошад.

261. Кунҷӣ байни векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ 60^0 буда, вектори $\vec{c}$ ба онҳо перпендикуляр аст. Дарозии вектори $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ -ро ёбед, агар $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$ бошад.

262. Векторҳои $\vec{a} = (2;1;0)$ ва $\vec{b} = (-1;3;2)$ дода шудаанд. Чунин адади λ-ро ёбед, ки вектори $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ ба вектори $\vec{b}$ перпендикуляр бошад.

263. Исбот кунед, ки секунҷаи қуллаҳояш дар нуқтаҳои $A(2;1;3)$, $B(7;4;5)$, $C(4;2;1)$ буда, росткунҷа аст.

Масъалаҳо барои такрор

264. Аз нуқтаи додашуда ба ҳамворӣ ду моил гузаронида шудааст, ки якеаш аз дигараш 26*см* калон аст. Проектсияи моилҳо ба 12*см* ва 40*см* баробар мебошанд. Дарозии моилҳоро ёбед.

265. Аз нӯги A-и порчаи AB ҳамворӣ гузоронида шудааст. Аз нӯги B ва нуқтаи C-и порча хатҳои рости параллел гузаронида шудаанд, ки онҳо ҳамвориро дар нуқтаҳои B_1 ва C_1 мебуранд. Дарозии порчаи BB_1-ро ёбед, агар $AB = 6$ см, $AC : CC_1 = 2 : 5$ бошад.

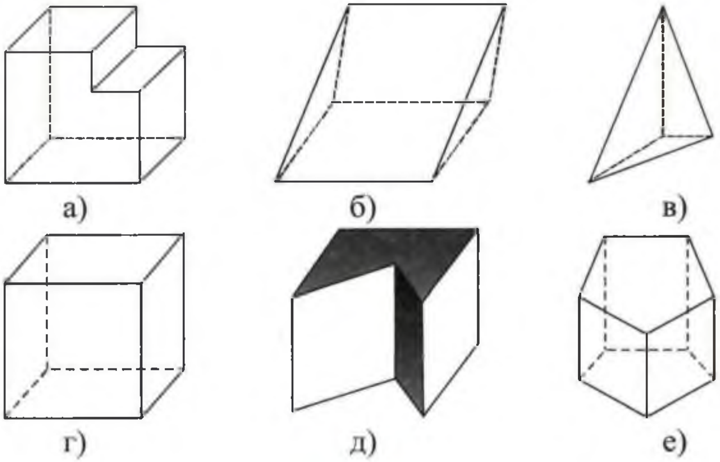
266. Вектори воҳидиеро ёбед, ки ба вектори $\vec{a} = (1;\ 2;\ -4)$ коллинеарӣ аст.

267. Маълум, ки ҳангоми параллелкӯчонӣ нуқтаи $A(4;\ -1;\ 3)$ ба нуқтаи $B(-1;\ 2;\ 7)$ табдил меёбад. Формулаҳои параллелкӯчониро нависед.

§7. БИСЁРРӮЯҲО. МАСОҲАТИ САТҲИ ПАҲЛУӢ ВА ҲАҶМИ БАЪЗЕ БИСЁРРӮЯҲО

20. Мафҳумҳои ибтидоӣ доир ба бисёррӯяҳо. Формулаи Эйлер

I. Дар пункти 3-и параграфи 1 (ниг. ба саҳ. 18) бо мақсади васеъ кардани доираи масъалаҳо оид ба параллелӣ ва перпендикулярии хатҳои рост, хати росту ҳамворӣ ва ҳамвориҳо мафҳуми бисёррӯяро ҳамчун ҷисми фазогӣ дохил карда будем. Инчунин чандин мисоли чунин ҷисмҳоро оварда будем. Масалан, қайд шуда буд, ки хона, қуттии гӯгирд, китоб, биноҳои бисёрошёна, бурҷҳо мисоли чунин ҷисмҳоанд. Дар ҳамон ҷой бисёррӯяро ҳамчун ҷисми геометрие, ки сатҳаш аз шумораи охирноки бисёркунҷаҳо иборат аст, низ оварда будем. Қайд шуда буд, ки параллелапипед, куб, пирамида, тетраэдр мисоли бисёррӯяҳоянд (ниг. ба расмҳои 15, 16 ва 17-и саҳ. 19-20). Ҷисмҳои зерин низ бисёррӯя мебошанд (расми 104).

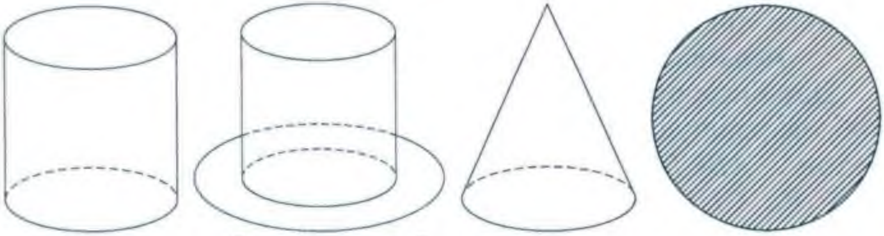


а) б) в)

г) д) е)

Расми 104

Ин ҷисмҳои фазогӣ бисёррӯя нестанд:



силиндр *кӯлоҳи силиндрӣ* *конус* *кура*

Расми 105

Акнун омӯзиши бисёрруяҳоро давом дода, хосиятҳои умумӣ ва дигар мисоли бисёрруяҳои алоҳида (призма, пареллелепипед) тарзи ҳисоб кардани масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва пурра, инчунин ҳаҷми онҳоро меорем.

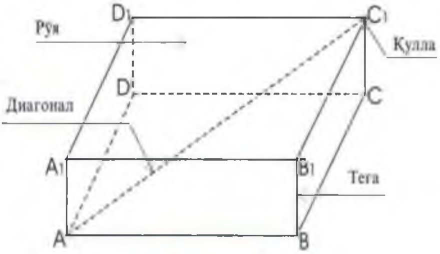
II. Бисёркунҷаи дилхоҳи дар сатҳи бисёрруя бударо мегирем. Ҳамворие, ки дар он бисёркунҷа ҷойгир аст, фазоро ба ду қисм ҷудо мекунад (ниг. ба масъалаи 35-и саҳ. 17). Агар бисёрруя дар *як тарафи* ҳар яке аз чунин ҳамвориҳо ҷойгир бошад, он гоҳ вай **барҷаста** ном дорад. Бисёрруяҳои б), в), г), е)-и расми 104 барҷаста буда, бисёрруяҳои а) ва д) ғайрибарҷастаанд.

Ин таърифи бисёррӯяи барҷаста ба таърифи зерин баробарқувва аст: Бисёррӯя барҷаста номида мешавад, агар ҳар гуна порчаи нӯгҳояш дар бисёррӯя ҷойгирбуда пурра (яъне, ҳар як нуқтааш) дар он ҷойгир бошад.

Ин таърифҳо элементҳои бисёррӯяро тавсиф менамоянд:

1) Бисёркунҷаҳо, ки аз онҳо бисёррӯя ташкил меёбад, *рӯяҳо* ном доранд.
2) Порчаеро, ки дар натиҷаи буриши ду рӯя ҳосил мешавад, *теға* мегӯянд.
3) Нуқтае, ки дар он се ё зиёда аз он рӯяҳо бурида мешаванд, *қуллаи* бисёррӯя аст.
4) Порчаи хати рост, ки ду қуллаи дар як рӯя нахобидаи бисёррӯяро бо ҳам пайваст мекунад, *диагонал* номида мешавад.
5) *Сатҳи* бисёррӯя аз ҳамаи нуқтаҳои дар рӯяҳо хобида иборат аст. Сатҳи бисёррӯяро *сарҳади* он ҳам мегӯянд.

б) Кунҷҳоеро, ки ҳангоми буриши теғаҳо ҳосил мешаванд, *кунҷҳои* бисёррӯя меноманд.



Расми 106

Дар бисёррӯяи дар расми 106 овардашуда: а) чоркунҷаҳои $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, BCC_1B_1, CDD_1C_1, ABB_1A_1 – рӯяҳо; б) порчаҳои AB, D_1C_1, BB_1 – баъзе аз теғаҳо; в) нуқтаҳои A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 – қуллаҳо; г) порчаи AC_1 диагонал мебошанд.

Зоҳиран фаҳмост, ки барои ҷисми геометрӣ будани бисёррӯя (яъне, барои ишголи қисми фазо) зарур аст, ки вай на кам аз 4 рӯя дошта бошад.

III. Математики бузурги Швейтсария Леонард Эйлер (1707 – 1783) вобастагии байни рӯяҳо, теғаҳо ва қуллаҳои бисёррӯяи барҷастаро муайян кардааст. Ин вобастагӣ бо номи *тавсифи* (характеристикаи) Эйлер машҳур аст. Агар бо P миқдори рӯяҳо, бо T миқдори теғаҳо ва бо $Қ$ миқдори қуллаҳоро ишорат намоем, он гоҳ ин тавсиф бо формулаи

$$P - T + Қ = 2$$

ифода мешавад. (Нишон дода шудааст, ки ҷой доштани ин формула шарти зарурӣ ва кифояи барҷаста будани бисёррӯя мебошад.)

Ҳосили ҷамъи кунҷҳои бисёррӯя бо формулаи $S = (Қ - 2) \cdot 360°$ ҳисоб карда мешавад.

Масъалаи 1. Бисёррӯяи барҷаста 12 қулла ва 5 рӯя дорад. Миқдори теғаҳои онро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи формулаи Эйлер, аз рӯйи додашудаҳо муодилаи зеринро ҳосил мекунем:

$$5 - T + 12 = 2 \text{ ё } 17 - T = 2, \text{ ё ки } T = 5.$$

Масъалаи 2. Муайян мекунем, ки оё аз 3 квадрат ва 2 секунҷаи баробартараф бисёррӯяи барҷаста сохтан мумкин аст ё на.

Ҳал. Агар чунин бисёррӯя вуҷуд дошта бошад, пас вай 5 рӯя дорад. Ва агар бо T миқдори теғаҳоро ишорат кунем, он гоҳ $2T$ ба ҳосили ҷамъи миқдори тарафҳои ҳамаи рӯяҳо баробар аст, яъне

$$2T = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18, \quad T = 9.$$

Ҳосили ҷамъи кунҷҳои дохилии бисёррӯя $S = 3 \cdot 360^o + 2 \cdot 180^o = 4 \cdot 360^o$ аст. Бинобар ин $(Қ - 2) \cdot 360^o = 4 \cdot 360^o$ ё $Қ - 2 = 4$, ё ки $Қ = 6$. Мебинем, ки формулаи Эйлер $P + Қ = T + 2$ ҷой дорад, чунки $5 + 6 = 9 + 2$ мебошад. Инак, чунин бисёррӯя вуҷуд дорад.

---

1. Чӣ гуна ҷисми геометриро бисёррӯя меноманд? Мисолҳои бисёррӯяҳоро оред. 2. Кадом бисёррӯя барҷаста номида мешавад? 3. Рӯя, теға, қулла, диагонал, сатҳ ва кунҷи бисёррӯя гуфта чиро мегӯянд? 4. Вобастагии байни рӯяҳо, теғаҳо ва қуллаҳои бисёррӯяи барҷастаро шарҳ диҳед. 5. Ҳосили ҷамъи кунҷҳои бисёррӯя бо кадом формула ҳисоб карда мешавад?

---

268. Нишон диҳед, ки бисёррӯяи шакли китобро дошта, барҷаста аст.

269. Миқдори рӯяҳо, теғаҳо ва қуллаҳои бисёррӯяҳои б), в), г) ва е)-и дар расми 104 овардашударо ёбед. Нишон диҳед, ки онҳо ба формулаи Эйлер тобеъанд.

270. Миқдори рӯяҳо, теғаҳо ва қуллаҳои бисёррӯяҳои а) ва д)-и дар расми 104 бударо ёбед. Оё онҳо тавсифи Эйлерро қаноат мекунанд?

271. Магар аз 8 шашкунҷаи мунтазам ва 6 квадрат бисёррӯяи барҷаста сохтан мумкин аст?

Масъалаҳо барои такрор

272. Магар яке аз кунҷҳои параллелограмм ба 30° ва дигараш ба 60° баробар шуда метавонад?

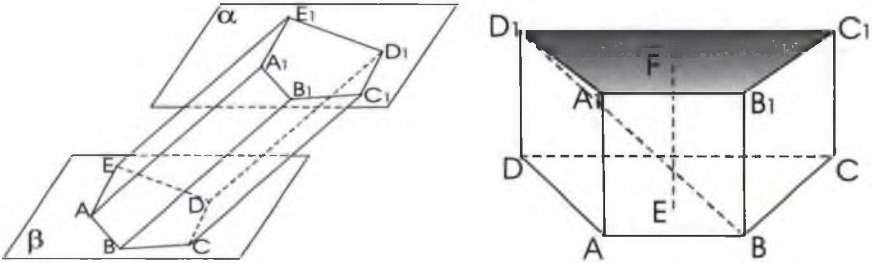
273. Охирҳои порчаи дарозиаш 1,25 м аз ҳамворӣ дар масофаҳои 1 м ва 0,56 м ҷойгиранд. Проектсияи онро дар ҳамворӣ муайян намоед.

274. Масофаи байни марказ ва хордаи давра $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ м буда, аз радиус 2 маротиба хурд аст. Дарозии хордаро ёбед.

21. Призма

I. Акнун ба омӯзиши бисёррӯяҳои мушаххас мегузарем. Омӯзишро аз призма сар мекунем.

Таъриф. Бигузор дар ду ҳамвории параллел ду бисёркунҷаи ба ҳам баробар дода шудаанд. Бисёррӯяе, ки рӯяҳои он дар натиҷаи пайваст кардани қуллаҳои мувофиқи ин бисёркунҷаҳо ҳосил мешавад, призма номида мешавад (расми 107).



а) *б)*

Расми 107

Дар байни рӯяҳои призма *рӯяҳои паҳлуӣ* ва *асосҳоро* фарқ мекунанд. Бисёркунҷаҳои (рӯяҳои) ба ҳам баробари дар ҳамвориҳои параллел ҷойгирбуда *асосҳоянд*. Ҳамаи дигар рӯяҳо *рӯяҳои паҳлуӣ* ном доранд. Хати буриши рӯяҳои паҳлуӣ *тегаҳои паҳлуианд*. Тарафҳои бисёркунҷаҳои асосро *тегаҳои асос* ё ки *тарафҳои асос* мегӯянд.

Ҳангоми бисёркунҷаи барҷаста будани асоси призма, вай бисёррӯяи барҷаста аст. (Дар ин ҷо ва дар оянда мо танҳо бо чунин призмаҳо сару кор хоҳем дошт). Бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки дар призма: 1) *рӯяҳои паҳлуӣ, ки дар натиҷаи пайвастани қуллаҳои мувофиқ ҳосил* *мешаванд, параллелограммҳо мебошанд;* 2) *теғаҳои паҳлуӣ бо ҳам баробар ва параллеланд.*

II. Масофаи байни ду ҳамвории параллеле, ки дар онҳо асосҳои призма ҷойгиранд, *баландии* призма номида мешавад. Қуллаҳои асосҳо *қуллаҳои* призмаанд. Призмаро аз рӯйи миқдори тарафҳои асос ё миқдори кунҷҳои осос номгузорӣ мекунанд. Призма *n-кунҷа* номида мешавад, агар асоси он бисёркунҷаи дорои *n* кунҷ, яъне *n*-кунҷа, бошад. Масалан, призмаи дар расми 107,а) буда панҷкунҷа ва дар расми 107,б) – чоркунҷа аст.

Дар призмаи чоркунҷаи дар расми 107,б) овардашуда чоркунҷаҳои $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ – асосҳо, ABB_1A_1, BCC_1B_1, CC_1D_1D, AA_1D_1D – рӯяҳои паҳлуӣ мебошанд. Порчаи EF, ки ба асосҳо перпендикуляр аст, *баландии* ин призма мебошад. *Диагонали* призма порчаест, ки ду қуллаи дар як рӯя нахобидаи онро пайваст мекунад (ниг. ба пункти 20). Дар призмаи дар расми 107,б) овардашуда хати D_1B *диагонал* аст.

Қайд мекунем, ки калимаи “prisma” лотинӣ буда, маънояш пораи (қисми) арра кардашудаи ҷисм аст. Меъморон ҳангоми сохтмони кӯшкҳо, манораҳо ва калисоҳо аз призмаҳо васеъ истифода кардаанд. Масалан, кӯшки дар ш. Виборги наздикии Санкт-Петербург буда, шакли призмаи ҳашткунҷаро дорад.

1. Чӣ гуна бисёррӯяро призма меноманд? **2.** Дар бораи асосҳо, рӯяҳо ва теғаҳои паҳлуии призма чӣ гуфтан мумкин аст? **3.** Баландӣ ва диагонали призма чӣ тавр муайян карда мешаванд? **4.** Призмаи *n*-кунҷа гуфта чӣ гуна призмаро меноманд?

275. Дар мисоли призмаи чоркунҷа нишон диҳед, ки барояш формулаи Эйлер *Қ + Р – Т = 2* дуруст аст?

276. Миқдори камтарини рӯяҳо, ки аз онҳо призма сохтан мумкин аст, чанд мебошад? Ин призма чанд қулла, теға ва теғаи паҳлуӣ дорад? Вай чандкунҷа аст?

277. Призмаи: а) ҳафткунҷа; б) даҳкунҷа; в) *n*-кунҷа чанд қулла, рӯя ва теға дорад?

278. Призма 33 теға дорад. Вай чандкунҷа аст?

279. Магар призмае мавҷуд аст, ки он: а) 13 қулла; б) 15 теға; в) 23 рӯя дошта бошад?

280. Дар призмаи: а) секунҷа; б) чоркунҷа; в) панҷкунҷа; г) *n*-кунҷа чанд диагонал гузаронидан мумкин аст?

Масъалаҳо барои такрор

281. Аз 8 секунҷаи баробартараф ва 2 квадрат бисёррӯяи барҷаста сохтан мумкин аст?

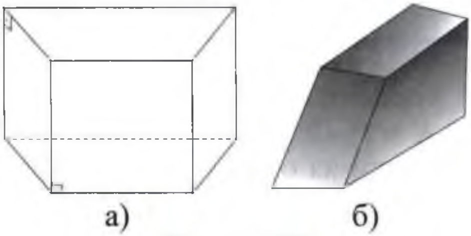
282. Дарозии давраи дарункашидаи шашкунҷаи мунтазамро, ки тарафаш $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ м аст, ёбед.

22. Призмаҳои рост, моил ва мунтазам. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва пурраи призмаҳои рост ва мунтазам

I. Призмаро аз рӯйи намуди кунҷҳое, ки теғаҳои паҳлуиаш бо тарафҳои асос ташкил мекунанд, номгузорӣ ҳам менамоянд.

Таърифи 1. Призма *рост* номида мешавад, агар теғаҳои паҳлуии он ба асосҳо перпендикуляр бошанд. Вагарна призмаро призмаи *моил* меғӯянд.

Дар расми 108,а) призмаи чоркунҷаи рост ва б) призмаи моил тасвир шудаанд. Призмаи дар расми 107,а) овардашуда низ моил мебошад. Дар ин ҷо ва дар оянда дар синфи 11 асосан призмаҳои ростро муоина мекунем, агар махсус таъкид карда нашуда бошад.


а) б)

Расми 108

Дар призмаи рост: **1.** *Рӯяҳои паҳлуӣ росткунҷаҳо мебошанд.* Дар ҳақиқат, чӣ тавре, ки дар пункти 21 қайд карда шуд, рӯяҳои паҳлуӣ параллелограммҳо мебошанд. Аз сабаби рост будани кунҷҳо ин параллелограммҳо росткунҷаанд. **2.** *Теғаҳои паҳлуӣ, ки бо ҳам баробаранд, баландианд.*

Таърифи 2. Призмаи росте, ки асоси он бисёркунҷаи мунтазам аст, *призмаи мунтазам* номида мешавад.

Хотирнишон мекунем, ки бисёркунҷа мунтазам аст, агар вай баробартараф буда, кунҷҳояш бо ҳам баробар бошанд. Масалан, секунҷаи баробартараф ва квадрат бисёркунҷаҳои мунтазаманд, вале ромб на. Аз хосияти 1 бармеояд, ки рӯяҳои паҳлуии призмаи мунтазам ҳамчун росткунҷаҳо бо ҳам баробаранд. Яъне, дарозӣ ва бари якхела доранд.

II. Рӯяҳои паҳлуии призмаи дилхоҳ *сатҳи паҳлуии* онро ташкил медиҳанд. Мувофиқан, асосҳо ва сатҳи паҳлуии ин призма *сатҳи пурраи* он аст.

Теоремаи 29. Масоҳати сатҳи паҳлуии призмаи рост ба ҳосили зарби периметри асос бар баландӣ баробар аст.

Исбот. Рӯяҳои паҳлуии призмаи n-кунҷа росткунҷаҳо мебошанд. Асоси ин росткунҷаҳо тарафҳои асоси призма буда, баландиашон ба дарозии теғаҳои паҳлуӣ баробар аст. Агар дарозии теғаҳои асосро бо a_1, a_2 …, a_n, баландиашро бо H ва масоҳати паҳлуиро бо $S_{паҳл}$ ишорат кунем, он гоҳ

$$S_{паҳл} = a_1H + a_2H + \ldots + a_nH = (a_1 + a_2 + \ldots a_n)H = pH$$

мешавад, ки дар ин ҷо p – периметри асоси призма аст.

Теорема исбот шуд.

Масоҳати сатҳи паҳлуии призмаи рости мунтазами n-кунҷа, ки тарафи асосаш a аст, бо формулаи $S_{паҳл} = a \cdot n \cdot H$ ҳисоб мешавад. Масоҳати сатҳи пурраи ҳар гуна призма бошад – бо формулаи

$$S_{пур} = S_{паҳл} + 2S_{асос}.$$

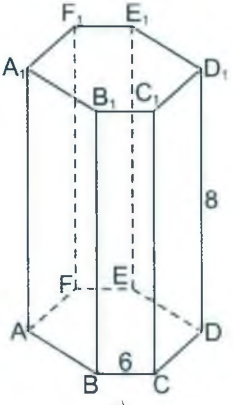
Масъалаи 1. Дар призмаи мунтазами шашкунча тегаи асос ба 6 см ва баландӣ ба 8 см баробар аст. Масоҳати сатҳи пурраи призмаро меёбем.

Ҳал. Агар $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ призмаи мазкур бошад (расми 108,в)), пас мувофиқи теорема дорем:

$S_{паҳл} = (AB + BC + CD + DE + EF + FA) \cdot DD_1 =$
$= 6 \cdot 6 \cdot 8 = 288.$

$$S_{асос} = S_{ABCDEF} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot BC^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 6^2 = 54\sqrt{3}\ см^2.$$

Инак, $S_{пур} = 2S_{асос} + S_{пахл} = (108\sqrt{3} + 288)$ см².



в)

Расми 108

Масъалаи 2. Масоҳати сатҳи пурраи призмаи секунча, ки тегаҳои асосаш 25 см, 29 см ва 36 см мебошад, ба 1620 см² баробар аст. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва баландии призмаро меёбем.

Ҳал. Аввал аз рӯйи формулаи Герон масоҳати асос, ки секунҷа аст, меёбем. Нимпериметри секунҷаи асосро ба (25 + 29 + 36) : 2 = 45 см баробар аст, бинобар ин

$$S_{асос} = \sqrt{45(45-25)(45-29)(45-36)} = \sqrt{45 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9} =$$
$$= 3 \cdot 4\sqrt{900} = 12 \cdot 30\ см^2 = 360\ см^2.$$

Азбаски $S_{пур} = S_{паҳл} + 2S_{асос}$, пас $1620 = 2 \cdot 360 + S_{паҳл}$. Аз ин ҷо $S_{паҳл} = 900$ см². Мувофиқи теорема $S_{паҳл} = p \cdot H$, яъне $900 = 90 \cdot H$.

Инак, $S_{паҳл} = 900$ см², $H = 10$ см.

1. Таърифи призмаи ростро баён кунед. 2. Чаро дар призмаи рост рӯяҳои паҳлуӣ росткунҷаҳо буда, баландӣ ба теғаи паҳлуӣ баробар аст. 3. Призмаи мунтазам гуфта, чиро мегӯянд? 4. Сатҳи паҳлуӣ ва сатҳи пурраи призма чист? 5. Масоҳати сатҳи паҳлуии призмаи рост бо кадом формула ҳисоб карда мешавад? Масоҳати сатҳи пуррааш – чӣ?

283. Дар призмаи рости секунҷа ҳамаи теғаҳо ба ҳамдигар баробаранд. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ 12 м^2 аст. Баландии призмаро ёбед.

284. Масоҳати сатҳи паҳлуии призмаи чоркунҷаи мунтазам 32 м^2 ва масоҳати сатҳи пуррааш 40 м^2 аст. Баландиашро ёбед.

285. Масоҳати сатҳи паҳлуии призмаи мунтазами чоркунҷа $64\sqrt{2}$ см^2 ва диагонали он 8 см аст. Масоҳати сатҳи пурраи ин призмаро ёбед.

286. Теғаи паҳлуии призмаи моил, ки 15 см аст, бо ҳамвории асос кунҷи 30°-ро ташкил медиҳад. Баландии призмаро ёбед.

287. Масоҳати сатҳи пурраи призмаи рости чоркунҷаро ёбед, агар диагонали он ба $\sqrt{34}$ м ва диагонали рӯяи паҳлуиаш ба 5 м баробар бошад.

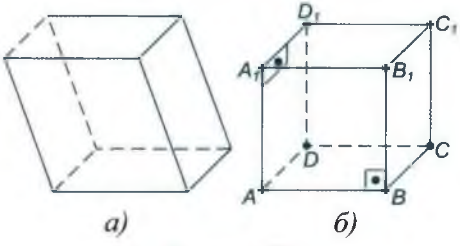
Масъалаҳо барои такрор

288. Призма 100 қулла дорад. Миқдори рӯяҳо ва тегаҳои ин призмаро муайян кунед.

289. Аз нуқтаи A дар зери кунҷи 60° ба ҳамворӣ моил гузаронида шудааст. Дарозии моилро ёбед, агар проексияи он ба ҳамворӣ 8 см бошад.

23. Параллелепипед

Таърифи 1. Агар асосҳои призма параллелоғраммҳо бошад, вай *параллелепипед* номида мешавад.



а) *б)*

Расми 109

Азбаски параллелепипед ҳолати хусусии призма аст, пас вай рост ва моил шуда метавонад. Дар расми 109,а) параллелепипеди моил ва дар расми 109,б) параллелепипеди рост оварда шудаанд.

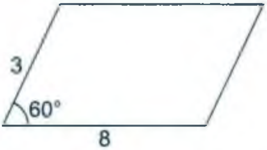
Таърифи 2. Рӯяҳои параллелепипед, ки теғаи умумӣ доранд, *ҳамсоя* ва рӯяҳое, ки чунин теғаро надоранд, рӯяҳои *муқобил* номида мешаванд. Масалан, дар параллелепипеди $ABCDA_1B_1C_1D_1$-и расми 109,б) рӯяи BCC_1B_1 ба рӯяҳои ABB_1A_1 ва CC_1D_1D ҳамсоя буда, ба рӯяи ADD_1A_1 муқобил аст.

Дар ҳар гуна параллелепипед: 1) ҳамаи рӯяҳо (паҳлуӣ ва асосҳо) параллелограммҳо мебошанд (ниг. ба п. 21); 2) рӯяҳои муқобил бо ҳам баробар ва параллеланд; 3) ду рӯяи дилхоҳи муқобилро ҳамчун асосҳо қабул кардан мумкин аст. Бар замми ин дар параллелепипеди рост рӯяҳои паҳлуӣ росткунҷаҳоянд.

Исботи ин чор хосияти барҷастаи параллелепипед ниҳоят осон аст. Исботи онҳо ба хосияти ба ҳам баробар ва параллел будани теғаҳои паҳлуӣ асос карда мешавад. Мо ин исботҳои содаро намеорем.

Акнун доир ба ҳисоби масоҳати сатҳи пурраи параллепипеди рост ҳалли ду масъаларо меорем.

Масъалаи 1. Масоҳати сатҳи паҳлуии параллелепипеди рост 220 см², тарафҳои асосҳояш ба 3 см ва 8 см, кунҷи байни онҳо ба 60° баробар аст. Масоҳати сатҳи пурраи ин параллелепипедро меёбем.



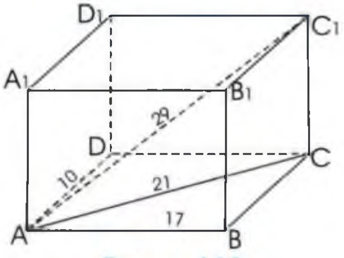
Ҳал. Аввал масоҳати асосро меёбем:

$$S_{асос} = 8 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{24\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}.$$

Пас $S_{пур} = S_{пахл} + 2S_{асос} = 220 + 24\sqrt{3} \approx$

$\approx 220 + 24 \cdot 1{,}7321 \approx 220 + 41{,}5704 \approx 262$ см².

Масъалаи 2. Дар параллелепипеди рост тарафҳои асос ба 10 см ва 17 см баробаранд. Яке аз диагоналҳои асос 21 см буда, диагонали калонаш 29 см аст. Масоҳати сатҳи пурраи параллелепипедро меёбем.



Расми 110

Ҳал. Теғаи паҳлуии CC_1-ро аз рӯи теоремаи Пифагор муайян мекунем (расми 110):

$$CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{(29-21)(29+21)} = \sqrt{8 \cdot 50} =$$
$$= \sqrt{400} = 20 \text{ см}.$$

Чи тавре, ки дар боло қайд шуд, дар параллелепипеди рост рӯяҳои паҳлуӣ росткунҷаҳоянд, бинобар ин

$S_{паҳл} = 2(10 \cdot 20) + 2(17 \cdot 20) = 1080$ см².

Акнун бо формулаи Герон масоҳати секунҷаи ABC-ро меёбем:

$$p = \frac{21+17+10}{2} = 24 \text{ см},$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} =$$
$$= \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14} = 2\sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7^2} = 14 \cdot 6 = 84 \text{ см}^2$$

ва $S_{асос} = 2S = 168$ см². Ҳамин тариқ,
$S_{пур} = S_{паҳл} + 2S_{асос} = 1080 + 2 \cdot 168 = 1416$ см².

---

1. Параллелепипед гуфта чӣ гуна призмаро меноманд? **2.** Рӯяҳои ҳамсоя ва муқобили параллелепипед аз ҳамдигар чӣ тавр фарқ карда мешаванд? **3.** Чаро дар параллелепипед ду рӯяи дилхоҳи муқобилро ҳамчун асосҳо қабул кардан мумкин аст?

---

290. Параллелепипеди $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дода шудааст. Нишон диҳед, ки кунҷҳои дурӯя, ки теғаҳояшон AA_1 ва CC_1 мебошанд, ба ҳамдигар баробаранд.

291. Магар асоси параллелепипеди моил росткунҷа шуда метавонад?

292. Дар параллелепипеди рост тарафҳои асос ба 6 м ва 8 м баробар буда, кунҷи 30°-ро ташкил медиҳанд. Теғаи паҳлуӣ 5 м аст. Масоҳати сатҳи пурраро ёбед.

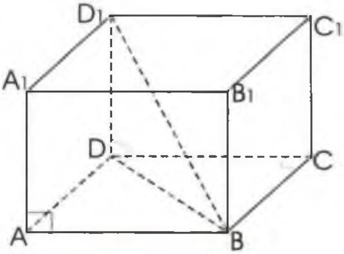
Масъалаҳо барои такрор

293. Дар призмаи секунҷаи рост ҳамаи теғаҳо баробаранд. Баландии призма 2 м аст. Масоҳати сатҳи паҳлуиро ёбед.

294. Тарафи хурди росткунҷа 6 см аст. Дарозии диагоналҳоро ёбед, агар онҳо ҳамдигарро дар таҳти кунҷи 60° буранд.

24. Параллелепипеди росткунҷа. Куб

I. **Таърифи 1.** Параллелепипеди рост, ки асосаш росткунҷа аст, *параллелепипеди росткунҷа* номида мешавад (расми 111).



Расми 111

Масалан, хишт, қуттиҳои гӯгирд ё сабзавот, хона ё ҳавзи шиноварӣ шакли чунин параллелепипедро доранд. Аз сабаби ҳолати хусусии параллелепипеди рост будани параллелепипеди росткунҷа (ПР) вай дорои хосиятҳои зерин мебошад: *ҳамаи шаш рӯя росткунҷаҳоянд; рӯяҳои муқобил ба ҳамдигар параллеланд; ду рӯяи дилхоҳи муқобили онро ба сифати асосҳо қабул кардан мумкин аст.*

Дар шакли теоремаҳо боз ду хосияти дигарро меорем, ки маҳз ба чунин параллелепипед хосанд. Нимҳамвориҳое, ки дар онҳо рӯяҳои ҳамсояи параллелепипед ҷойгиранд, кунҷҳои дурӯяро ташкил медиҳанд. Ин кунҷҳоро *кунҷҳои дурӯяи параллелепипед* меноманд.

Теоремаи 30. Ҳамаи кунҷҳои дурӯяи параллелепипеди росткунҷа кунҷҳои ростанд.

Исбот. Тасдиқи теорема аёнан возеҳ аст, чунки кунҷҳои рост будани кунҷҳои хаттии ин кунҷҳои дурӯя зоҳиран фаҳмоанд. Масалан, кунҷи дурӯяи рӯяҳои $ABCD$ ва ABB_1A_1 ба кунҷи A_1AB баробар аст, ки рост будани он аз таъриф бармеоял (расми 111). Рост будани кунҷҳои дурӯяи дигар ҳам ҳамин тавр муқаррар карда мешаванд.

II. Таърифи 2. Дарозии ҳар як се тега, ки дар як нуқта бурида мешаванд (яъне, тегаҳое, ки параллел нестанд), *ченакҳо* ё *андозаҳои хаттии* параллелепипеди росткунҷа ном доранд.

Масалан, дар мисоли параллелепипеди росткунҷаи дар расми 111 овардашуда дарозии тегаҳои AB, AD ва AA_1 ченакҳо мебошанд. Дар зиндагии ҳаррӯза ин ченакҳо ҳамчун *дарозӣ, бар* ва *баландӣ* маъмуланд. Масалан, дар мисоли хона ё ҳавзи шиноварӣ.

Аз теоремаи Пифагор бармеояд, ки диагонали росткунҷа ба суммаи квадратҳои тарафҳояш баробар аст. Параллелепипеди росткунҷа низ ба ин монанд хосиятро дорост. Аниқаш, ҷумлаи зерин дуруст аст:

Теоремаи 31. Квадрати диагонали параллелепипеди росткунҷа ба суммаи квадратҳои се ченакаш баробар аст.

Исбот. Нишон медиҳем, ки дар параллелепипеди росткунҷаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$, масалан, баробарии

$$d^2 = D_1B^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$$

ҷой дорад (расми 111). Тегаи D_1D ба асос перпендикуляр аст, яъне кунҷи D_1DB кунҷи рост мебошад. Барои ҳамин, дар секунҷаи D_1DB, мувофиқи теоремаи Пифагор $D_1B^2 = DD_1^2 + DB^2$. Азбаски DB диагонали росткунҷаи $ABCD$ аст, пас $DB^2 = AB^2 + AD^2$. Инчунин $DD_1 = AA_1$. Аз ин се баробарӣ дурустии тасдиқи теорема бармеояд.

Хулоса. *Диагоналҳои параллелепипеди росткунҷа ба ҳамдигар баробаранд.*

Ҳамин тариқ, агар a, b, c ченакҳои параллелепипеди росткунҷа бошанд, он гоҳ квадрати дарозии диагонал бо формулаи $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ифода мешавад.

Масъалаи 1. Ченакҳои ПР ба 8, 9, 12 баробаранд. Диагоналро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи тасдиқи теоремаи 8

$d^2 = 8^2 + 9^2 + 12^2 = 64 + 81 + 144 = 289.$

Аз ин ҷо $d = \sqrt{289} = 17$.

III. Агар ченакҳои ПР (дарозӣ, бар ва баландии он) *a, b, c* бошанд, он гоҳ масоҳати сатҳи пурраи параллелепипед бо формулаи

$$S_{пур} = 2(ab + ac + bc)$$

ҳисоб мешавад, чунки масоҳати сатҳи пурраи ПР ба ҳосили ҷамъи масоҳати ҳамаи шаш рӯяҳо баробар аст.

Масъалаи 2. Диагонали ПР 5 буда, ченакҳояш *a, b, c* мебошанд. Маълум, ки $3a + \sqrt{7}b + 3c = 25$ аст. Масоҳати сатҳи пурраи ПР-ро меёбем.

Ҳал. Дарозии диагонал мувофиқи теоремаи 31 $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 5$ аст. Барои ҳамин $a^2 + b^2 + c = 25$. Мувофиқи шарти масъала $3a + \sqrt{7}b + 3c = 25$ ё $6a + 2\sqrt{7}b + 6c = 50$ аст. Пас

$$a^2 + b^2 + c^2 - (6a + 2\sqrt{7}b + 6c) = 25 - 50 = -25.$$

Ё $(a^2 - 6a) + (b^2 - 2\sqrt{7}b) + (c^2 - 6c) + 25 = 0$. Квадратҳои пурра ҷудо карда ҳосил мекунем: $(a-3)^2 + (b-\sqrt{7})^2 + (c-3)^2 = 0$. Ягона қиматҳое, ки ин баробариро қаноат менамоянд, $a = 3$, $b = \sqrt{7}$ ва $c = 3$ ҳастанд. Бинобар ин мувофиқи формулаи масоҳати сатҳи пурра доро ҳастем:

$$S_{пур} = 2(ab + ac + bc) = 2(3 \cdot \sqrt{7} + 3 \cdot 3 + 3 \cdot \sqrt{7}) = 18 + 12\sqrt{17}.$$

Таърифи 3. Параллелепипеди росткунҷае, ки дар он ҳар се ченак ба ҳамдигар баробаранд, *куб* номида мешавад.

Дар куб ҳамаи шаш рӯя ба ҳамдиғар баробар мебошанд. Куб ҳамаи он хосиятҳоеро, ки ба ПР мансубанд дорост. Алалхусус, агар дарозии теғаи куб *a* бошад, он гоҳ диагонали он $d = \sqrt{3}a$ ва масоҳати сатҳи пуррааш $S_{пур} = 6a^2$ аст.

Масъалаи 3. Дарозии диагонали рӯяи куб ба $7\sqrt{2}$ см баробар аст. Дарозии диагонали кубро меёбем.

Ҳал. Агар теғаи куб ба *a* баробар бошад, он гоҳ диагонали рӯяи он ба $a\sqrt{2}$ баробар аст. Барои ҳамин $a\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$, яъне $a = 7$ см. Мувофиқи формулаи дарозии диағонали куб $d = a\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ см мешавад.

1. Чӣ гуна параллелепипедро ПР мегӯянд? 2. ПР ҳамчун параллелепипед дорои чӣ гуна хосиятҳо аст? Хосиятҳои танҳо ба ПР хос бударо номбар кунед. 3. Чаро дар ПР кунҷҳои дурӯя кунҷҳои рост буда, диагоналҳо ба ҳамдигар баробаранд? 4. Ченакҳои ПР кадомҳоянд? 5. Диагонали ПР бо кадом формула ҳисоб мешавад? Масоҳати сатҳи пурраash – чӣ? 6. Чиро куб мегӯянд? 7. Призмаи рости квадратӣ (асосаш квадрат) аз куб чӣ фарқ дорад?

295. Ченакҳои ПР ба а) 12, 16, 21; б) $\sqrt{39}$, 7, 9 баробаранд. Диагоналҳои онро ёбед.

296. Тегаи куб 7 м аст. Диагонали кубро ёбед.

297. Куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дода шуда аст. Кунҷи дурӯяи: а) ABB_1C_1-ро; б) A_1BB_1K-ро, ки K – миёначои тегаи A_1D_1 аст, ёбед.

298. Ҳосили ҷамъи ҳамаи теғаҳои ПР ба 16 м ва диагоналаш ба 3 м баробар аст. Масоҳати сатҳи пурраи онро ёбед.

299. Тарафҳои асоси ПР ба 3 м ва 4 м баробаранд. Диагонали параллелепипед ба ҳамвории асос кунҷи 45°-ро ташкил мекунад. Масоҳати сатҳи пурраи параллелепипедро ёбед.

300. Диагонали ПР $5\sqrt{2}$ м буда, бо ҳамвории асос кунҷи 45°-ро ташкил мекунад. Масоҳати сатҳи паҳлуии параллелепипедро ёбед, агар масоҳати асос 12 м^2 бошад.

301. Диагонали ПР-ро ёбед, агар вай бо ҳамвории асос кунҷи 60°-ро ташкил дода, тарафҳои асос 3 м ва 4 м бошанд.

302. Масоҳати сатҳи пурраи куб 24 м^2 аст. Тегаи онро ёбед.

303. Тегаҳои ПР ҳамчун 3 : 7 : 8 нисбат доранд. Масоҳати сатҳи пурраash 808 см^2 мебошад. Тегаҳоро муайян намоед.

304. Тегаи кубро ёбед, агар маълум бошад, ки масоҳати сатҳи пурраи он 5046 см^2 аст.

Масъалаҳо барои такрор

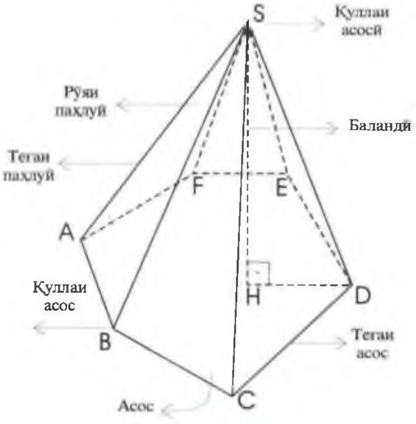
305. Дар призмаи секунҷа тарафҳои асос ба 3 м, 4 м ва 5 м, баландӣ ба 6 м баробаранд. Масоҳати сатҳи пурраи призма ёфта шавад.

306. Тарафҳои росткунҷа ҳамчун 4 : 1 нисбат дошта, масоҳаташ 400 см^2 аст. Тарафи калони росткунҷаро ёбед.

25. Пирамида

Дар пункти 3-и параграфи 1 мо бо пирамида, ҳамчун ҷисми геометрӣ ва ҳолати хусусии он – тетраэдр, шинос шуда будем. Дар ин ва чанд пункти оянда баъзе тавсияҳои умумии ба ҳар гуна пирамида хос бударо каме васеътар муҳокима намуда, доир ба онҳо масъалаҳои содаро ҳал ва пешниҳод менамоем.

Таъриф. Бисёррӯяе, ки дар натиҷаи пайваст кардани нуқтаи додашудаи берунаи бисёркунҷаи ҳамвор бо ҳар як нуқтаи ин бисёркунҷа ҳосил мешавад, *пирамида* номида мешавад. Нуқтаи додашуда *қуллаи асосӣ,* бисёркунҷаи ҳамвор *асоси пирамида* ном доранд (расми 112).

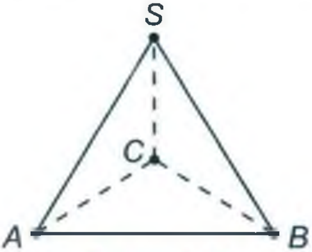


Расми 112

Пирамидаҳои Мисри қадим, ки оромгоҳи фиръавнҳо буда, асосашон квадрат аст ё бурҷҳои Кремли Маскав мисоли пирамидаҳоанд. Куллаи асосӣ ва куллаҳои асос *қуллаҳои* пирамидаанд. (Дар оянда агар махсус таъкид нашуда бошад, зери мафҳуми куллаи пирамида куллаи асосӣ фаҳмида мешавад.)

Сатҳи пирамида аз асос ва *рӯяҳои паҳлуӣ,* ки секунҷаҳоянд, иборат аст. Порчаҳое, ки қуллаи пирамидаро ба қуллаҳои асос пайваст мекунанд, *тегаҳои паҳлуӣ* ном доранд. Тарафҳои асосро *тегаҳои асос* ҳам мегӯянд. Порчае, ки аз қулла ба ҳамвории асос перпендикуляр фароварда шудааст, *баландии пирамида* аст.

Пирамидаро, мисли призма, аз рӯи миқдори тарафҳои (кунҷҳои) асос номгузорӣ мекунанд. Пирамида *n-кунҷа* номида мешавад, агар асоси он бисёркунҷаи *n*-кунҷа бошад. Дар расми 112 пирамидаи шашкунҷа (дар расми 16-и саҳ. 19 бошад, пирамидаи панҷкунҷа) тасвир шудааст. Шашкунҷаи *ABCDEF* – асос, *S* – қулла, *SA*, *SB*, ..., *SF* – теғаҳои паҳлуии он мебошанд. Рӯяҳои паҳлуӣ секунҷаҳои *ASB*, *BSC*, ..., *FSA* буда, *SH* – баландӣ аст.



Расми 113

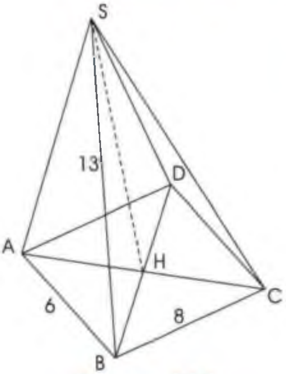
Пирамидаи секунҷаро *тетраэдр* (tetrahedron) ҳам мегӯянд. (Аз ду калимаи юнонии tetra – чор ва hedra – асос, рӯя тартиб дода шудааст. Маънои tetrahedron чоррӯя аст). Тетраэдр дорои 4 рӯя, 6 теғаю 4 қулла мебошад (расми 113). Рӯяи дилхоҳи тетраэдрро ҳамчун асосаш қабул кардан мумкин аст.

Ҳангоми бисёркунҷаи барҷаста будани асоси пирамида, вай бисёррӯяи барҷаста аст. Бинобар ин барояш формулаи Эйлер дуруст аст (ниг. ба пункти 20, қисми III-аш, саҳ. 126). Яъне, байни миқдори рӯяҳо (*P*), теғаҳо (*T*) ва қуллаҳо (*Қ*) вобастагии

$$Қ + P - T = 2$$

ҷой дорад.

Масъалаи 1. Асоси пирамидаи чоркунҷа росткунҷаи тарафҳояш 6 см ва 8 см аст. Дарозии ҳар як теғаи паҳлуии пирамида 13 см аст. Баландии пирамидаро меёбем.



Расми 114

Ҳал. Ба осонӣ нишон додан мумкин аст, ки баландии пирамида *SH* ҳамвории асос *ABCD*-ро дар нуқтаи буриши диагоналҳои росткунҷа мебурад. Ин диагоналҳо бо ҳамдигар баробар буда, дар нуқтаи буриш ба ду ҳиссаи баробар ҷудо мешаванд (расми 114). Аз секунҷаи росткунҷаи *ABC*:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10.$$

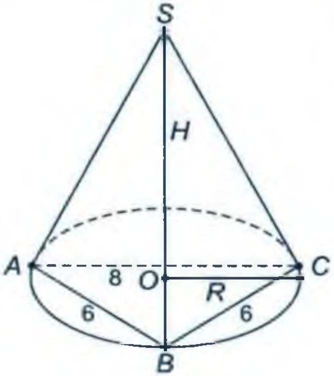
Пас $AH = \dfrac{AC}{2} = 5$ см. Акнун аз секунҷаи росткунҷаи AHS:

$$SH = \sqrt{AS^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12.$$

Ҷавоб: 12 см.

Масъалаи 2. Асоси пирамида секунҷаи баробарпаҳлуест, ки тарафҳояш 6 см, 6 см ва 8 см мебошанд. Теғаҳои паҳлуӣ ба 9 см баробаранд. Баландии ин пирамидаро меёбем.

Ҳал. Асоси баландии пирамида нуқтаи O – маркази давраи берункашидаи асоси он – секунҷаи ABC мебошад (расми 115). Формулаи $S_{ABC} = \dfrac{abc}{4R}$-ро истифода карда, радиуси ин давраро меёбем. Мувофиқи формулаи Герон



Расми 115

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

ки $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ - нимпериметри секунҷаи асос аст. Азбаски $p = \dfrac{6+6+8}{2} = 10$ аст, бинобар ин $S_{ABC} = \sqrt{10 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2} = 4\sqrt{20} = 8\sqrt{5}$. Пас

$$8\sqrt{5} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 8}{4R}, \quad 8\sqrt{5} = \frac{72}{R}, \quad R = \frac{72}{8\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}}.$$

Аз секунҷаи росткунҷаи SOC: $9^2 = H^2 + R^2$ ё $81 = H^2 + \dfrac{81}{5}$.

Аз ин ҷо, $H^2 = 81 - \dfrac{81}{5} = \dfrac{81 \cdot 4}{5}$ ва $H = \dfrac{9 \cdot 2}{\sqrt{5}} = \dfrac{18}{\sqrt{5}}$.

---

1. Чӣ гуна бисёррӯя пирамида аст? Асос, қуллаи асосӣ ва қуллаҳо, рӯяҳои паҳлуӣ, сатҳи пирамида, теғаҳои паҳлуӣ ва теғаҳои асос, баландии пирамида чӣ тавр муайян карда мешаванд? **2.** Пирамида аз рӯйи чӣ ва чӣ тавр номгузорӣ карда мешавад? **3.** Чӣ гуна пирамидаро тетраэдр меноманд? **4.** Дар кадом ҳолат пирамида бисёррӯяи барчаста аст?

---

307. Асоси тетраэдр секунҷаи баробарпаҳлуи асосаш 12 см ва тарафи паҳлуиаш 10 см аст. Рӯяҳои паҳлуӣ ба асос кунҷҳои дурӯяи ба 45° баробарро ташкил медиҳанд. Баландии тетраэдрро ёбед.

308. Секунҷаи баробарпаҳлу, ки асосаш 6 см ва баландиаш 9 см аст, асоси пирамида мебошад. Дар он теғаҳои паҳлуӣ бо ҳам баробар буда, дарозиашон 13 см аст. Баландии пирамидаро ёбед.

309. Асоси пирамида параллелограммест, ки тарафҳояш 3 см ва 7 см буда, яке аз диагоналҳояш 6 см аст. Баландии пирамида, ки аз нуқтаи буриши диагоналҳо мегузарад, 4 см аст. Теғаҳои паҳлуии пирамидаро ёбед.

310. Асоси тетраэдр секунҷаи баробартарафи тарафаш 9 см аст. Теғаи паҳлуӣ 6 см мебошад. Баландии тетраэдрро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

311. Ромби $ABCD$, ки тарафаш 8 см ва дар он $\angle A=45^{\circ}$ мебошад, дода шуда аст. Аз нуқтаи F ба ҳамвории ромб перпендикуляри FC фуроварда шудааст. Масофаи нуқтаи F то тарафи AD ёфта шавад.

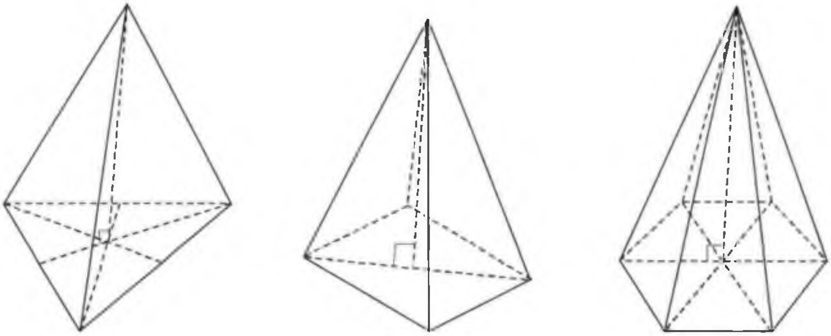
312. Дар секунҷаи росткунҷа яке аз катетҳо 3 см буда, котангенси кунҷи ба он часпида 0,75 аст. Гипотенузаро ёбед.

26. Пирамидаи мунтазам

Чӣ тавре борҳо гуфтем, бисёркунча *мунтазам* номида мешавад, агар дар он тарафҳо ва кунҷҳо бо ҳам баробар бошанд (масалан, ниг. ба пункти 22). Секунҷаи баробартараф ё квадрат мисоли бисёркунҷаи мунтазаманд.

Таъриф. Агар асоси пирамида бисёркунҷаи мунтазам буда, баландиаш аз маркази ин бисёркунҷа гузарад, онро *пирамидаи мунтазам* меноманд.

Дар расми 116 пирамидаҳои мунтазами секунҷа (тетраэдри мунтазам), чоркунҷа ва шашкунҷа оварда шудааст. Чӣ тавре маълум аст, маркази секунҷаи баробартараф нуқтаи буриши медианаҳо, маркази квадрат нуқтаи буриши диагоналҳо мебошад. Ин нуқтаҳо бошанд, маркази давраи дарункашидаи секунҷа ва маркази давраи берункашидаи квадрат мебошанд. Умумӣ карда гуфтан мумкин аст, ки маркази асоси пирамидаи мунтазам маркази давраи дарункашида ё маркази давраи берункашидаи асос аст (ниг. ба ҳалли масъалаи 2-и пункти 25 дар саҳ. 142).



тетраэдри мунтазам

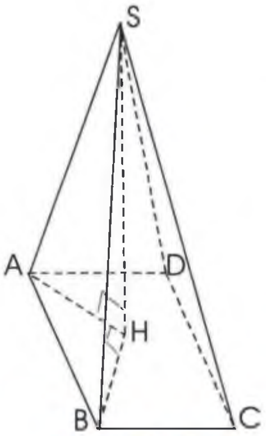
пирамидаи мунтазами чоркунҷа

пирамидаи мунтазами шашкунҷа

Расми 116

Хати росте, ки баландии пирамидаро дар бар мегирад, *тири* пирамида ном дорад. Дар пирамидаи мунтазам: 1) *Тегаҳои паҳлуӣ ба ҳамдигар баробаранд*; 2) *Рӯяҳои паҳлуӣ секунҷаҳои ба ҳам баробари баробарпаҳлуянд;* 3) *Баландиҳои рӯяҳои паҳлуӣ, ки аз қулла ба асос фуроварда шудаанд, ба ҳамдигар баробаранд.* Ин баландиҳоро *апофема* меноманд.

Исботи хосияти 1)-ро барои пирамидаи чоркунҷаи мунтазам (расми 116,а) меорем. Бигузор H маркази асос аст. ΔABH баробартараф буда, $\angle SHA = \angle SHB = 90^{o}$. Пас мувофиқи аломати дуюми баробарии секунҷаҳои



Расми 116. а

росткунҷа $\Delta SHA = \Delta SHB$, яъне $SA = SB$. Айнан ҳамин гуна мулоҳизаронӣ ба баробарии $SB = SC$, баъд ба $SC = SD$, сонӣ ба $SD = SA$ меорад.

Хосиятҳои 2) ва 3) хулосаҳои хосияти 1) мебошанд.

Масъалаи 1. Дар пирамидаи шашкунҷаи мунтазам теғаи асос 10 см ва баландӣ $\sqrt{69}$ см аст. Апофемаи пирамидаро меёбем.

Ҳал. Бигузор дар пирамидаи мунтазами $SABCDEF$ $AB = BC = 10$ см ва SN апофема аст (расми 117). Мувофиқи шарти масъала $SH = \sqrt{69}$ см. Секунҷаи ABH баробартараф мебошад, пас $BH = AH = AB = 10$ см. Аз секунҷаи росткунҷаи SHB мувофиқи теоремаи Пифагор

$$SB^2 = SH^2 + HB^2 = (\sqrt{69})^2 + 10^2 = 169.$$

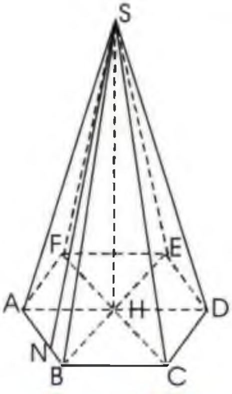
Инак, $SB = 13$ см. Апофемаи SN медианаи секунҷаи ASB аст, барои ҳамин $AN = \frac{AB}{2} = 5$ см. Акнун аз секунҷаи росткунҷаи SNB:

$$SB^2 = SN^2 + BN^2 \qquad \text{ё}$$

$$SN^2 = SB^2 - BN^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144;$$

$$SN = \sqrt{144} = 12.$$

Ҷавоб: Дарозии апофемаи пирамидаи мунтазами мазкур 12 см аст.

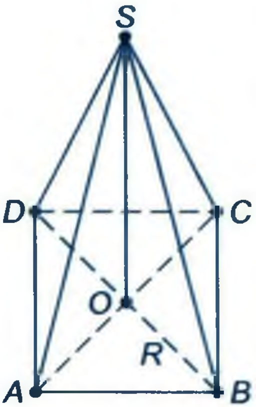


Расми 117

Масъалаи 2. Баландии пирамидаи чоркунҷаи мунтазам ба 7 см ва тарафи асос ба 8 см баробар аст. Теғаи паҳлуиро муайян мекунем.

Ҳал. Маълум, ки $SABCD$ – пирамидаи чоркунҷаи мунтазам (расми 118). Дар он $a = AB = BC = CD = DA = 8$ см ва баландии $H = SO = 7$ см аст. Теғаи паҳлуӣ SB-ро ёфтан зарур мебошад.

Маркази давраи берункашидаи асос, ки квадрат аст, нуқтаи буриши диагоналҳо O мебошад. Радиуси ин



Расми 118

давраро меёбем. Диагоналҳои асос дар нуқтаи буриш ба ду ҳиссаи баробар ҷудо мешаванд. Дарозии диагонали квадрати тарафаш a буда ба $a\sqrt{2}$ баробар аст, аз рӯйи теоремаи Пифагор. Пас

$$R = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = \frac{8}{\sqrt{2}}.$$

Аз секунҷаи росткунҷаи SOB мувофиқи теоремаи Пифағор дорем:

$$SB^2 = SO^2 + OB^2 = 7^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 = 49 + 32 = 81,$$

$$SB = \sqrt{81} = 9 \text{ см}.$$

Ҷавоб: Тегаи паҳлуии пирамида 9 см аст.

1. Чӣ гуна пирамидаро мунтазам меноманд? **2.** Маркази асоси пирамидаи мунтазам дар куҷо ҷойгир аст? **3.** Чиро тири чунин пирамида мегӯянд? **4.** Дар пирамидаи мунтазам теғаҳои паҳлуӣ, рӯяҳои паҳлуӣ ва баландии рӯяҳои паҳлуӣ чӣ гунаанд? **5.** Апофемаи пирамидаи мунтазам гуфта чиро мегӯянд?

313. Дар пирамидаи чоркунҷаи мунтазам баландӣ 12 см буда, апофемаи рӯяи паҳлуӣ 15 см мебошад. Теғаи паҳлуии пирамидаро ёбед.

314. Асоси пирамида секунҷаи баробартарафест, ки тарафаш 6 см мебошад. Теғаҳои паҳлуӣ ба 9 см баробаранд. Баландии пирамидаро ёбед.

315. Асоси пирамида квадрати тарафаш 9 см мебошад. Тегаҳои паҳлуӣ ба 12,5 см баробаранд. Баландии пирамидаро ёбед.

316. *SABCD* пирамидаи мунтазамест, ки асоси он *ABCD* квадрат буда, тарафаш 9 см аст. Кунҷи байни рӯяҳои *ASB* ва *BSC*-ро ёбед, агар маълум бошад, ки масофаи байни *AC* ва *BS* ба 1 см баробар аст.

Масъалаҳо барои такрор

317. Масофаи байни теғаҳои паҳлуии призмаи секунҷаи моил мувофиқан ба 2 см, 3 см ва 4 см баробар аст. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ – ба 45 см^2. Теғаи паҳлуиро ёбед.

318. Дар секунҷаи ABC аз асоси D-и баландии AD ба тарафи AB ба таври параллелӣ хати рост гузаронида шудааст, ки он AC-ро дар нуқтаи K мебурад. $AK : KC$ ёфта шавад, агар $S_{\Delta ADC} : S_{\Delta ABC} = \frac{3}{16}$ бошад.

27. Масоҳати сатҳи пирамидаи мунтазам

I. Чи тавре, ки гуфта будем, сатҳи пурраи пирамида аз асосҳо ва рӯяҳои паҳлуӣ иборат аст (ниг. ба пункти 25). Пас масоҳати сатҳи паҳлуии пирамида ҳосили ҷамъи масоҳати рӯяҳои паҳлуии он мебошад.

Теоремаи 32. Масоҳати сатҳи паҳлуии пирамидаи мунтазам ба ҳосили зарби нисфи периметри асос бар апофема баробар аст.

Исбот. Агар дарозии теғаи асоси пирамидаи мунтазами n-кунҷа a бошад, он гоҳ масоҳати як рӯяи паҳлуии он (ҳамчун масоҳати секунҷаи баробарпаҳлу) $\frac{al}{2}$ аст, ки дар ин ҷо l – дарозии апофема мебошад. Аз сабаби баробарии рӯяҳои паҳлуӣ масоҳати ҳамаи онҳо $\frac{al}{2} \cdot n = \frac{pl}{2}$ мешавад, ки $p = an$ – периметри асос аст. Теорема исбот шуд.

Ҳамин тариқ, барои пирамидаи мунтазами n-кунҷа

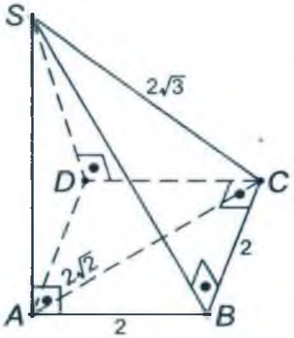
$$S_{пур} = S_{асос} + S_{паҳл} = S_{асос} + \frac{pl}{2}.$$

Масоҳати асоси пирамидаи мунтазами n-кунҷаро ба осонӣ ёфтан мумкин аст. Чӣ тавре дар пункти 26 қайд карда будем, маркази асоси чунин пирамида маркази

II. Яке аз шартҳои мунтазам будани пирамида ин аз маркази асос гузаштани баландии он аст. Акнун ҳалли масъалаеро меорем, ки дар он асоси призма бисёркунҷаи мунтазам буда, худи призма мунтазам нест.

Масъалаи 2. Асоси пирамидаи чоркунҷаи $SABCD$ квадрат буда, тарафаш 2 см аст. Теғаи паҳлуӣ $SC = 2\sqrt{3}$ см мебошад. Теғаи SA ба ҳамвории асос $ABCD$ перпендикуляр аст. Масоҳати сатҳи пурраи ин пирамидаро меёбем.

Ҳал. Диагонали AC-и асоси пирамида $ABCD$-ро месозем (расми 120,а). Теғаи SA ба тарафҳои асос AB, AD ва диагонал AC перпендикуляр аст (ниг. ба таърифи 2-и саҳ. 54). Мувофиқи ин перпендикулярҳо навишта метавонем: $AC = CB \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ см, $SC^2 = SA^2 + AC^2$ ё $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = SA^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2$, $SA^2 = 12 - 8 = 4$, $SA = 2$ см. $SD^2 = SA^2 + AD^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, $SD = 2\sqrt{2}$ см. $SB^2 = SA^2 + AB^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, $SB = 2\sqrt{2}$.



Расми 120, а

Мувофиқи аломати баробарии секунҷаҳо аз рӯйи се тараф ҳосил мекунем, ки секунҷаи SAB ба секунҷаи SAD ва секунҷаи SBC ба секунҷаи SDC баробар аст. Пас масоҳати онҳо низ бояд баробар бошад: $S_{\Delta SAB} = S_{\Delta SDC} = \frac{1}{2} AB \cdot SA = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$ см².

Баъд мувофиқи теорема дар бораи се перпендикуляр (ниг. ба пункти 10, саҳ. 69) аз он ки SA ба AB ва AB ба BC перпендикуляр аст, бармеояд, ки BC ба SB перпендикуляр мебошад. Ҳамин тариқ, $S_{\Delta SBC} = S_{\Delta SDC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot SB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ см².

Дар охир, масоҳати сатҳи пурраи пирамидаро меёбем: $S_{пур} = S_{\square ABCD} + S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta SDC} + S_{\Delta SAD} = AB^2 + 2 + 4\sqrt{2} + 2 =$ $= 2^2 + 4 + 4\sqrt{2} = 8 + 4\sqrt{2} = 4(2 + \sqrt{2})$ см².

1. Магар ҳар гуна пирамидае, ки асосаш бисёркунҷаи мунтазам аст, пирамидаи мунтазам мебошад? 2. Масоҳати сатҳи паҳлуии пирамидаи мунтазам бо кадом формула ифода карда мешавад? 3. Масоҳати асоси пирамидаи мунтазам бо радиусҳои давраҳои дарункашида ва берункашидаи асос чӣ хел алоқамандӣ дорад?

319. Дар пирамидаи мунтазами чоркунҷа масоҳати сатҳи паҳлуӣ ба 14,76 м^2, масоҳати сатҳи пурра ба 18 м^2 баробар аст. Дарозии тарафи асос ва баландии пирамидаро ёбед.

320. Тарафи асоси пирамидаи чоркунҷаи мунтазам ёфта шавад, агар баландии он H ва масоҳати сатҳи паҳлуӣ S бошад.

321. Тарафи асоси пирамидаи чоркунҷаи мунтазам ва апофемаи онро ёбед, агар теғаи паҳлуӣ ба 10 см ва масоҳати сатҳи паҳлуӣ ба 144 см^2 баробар бошад.

322. Тарафи асоси пирамидаи чоркунҷаи мунтазам 5 см, масоҳати сатҳи пурраи он 115 см^2 аст. Апофемаи пирамидаро ёбед.

323. Масоҳати сатҳи пурраи пирамидаи секунҷаи мунтазамро, ки баландиаш 6 см ва кунҷи байни ҳамвориҳои рӯяи паҳлуӣ ва асос 60° аст, ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

324. Призма 100 қулла дорад. Миқдори рӯяҳо ва миқдори тегаҳои онро ёбед.

325. Ҳосили ҷамъи дарозии теғаҳои параллелепипеди росткунҷа 16 см буда, дарозии диагоналаш 3 см аст. Масоҳати сатҳи пурраи ин параллелепипедро ёбед.

326. Пирамида 100 теға дорад. Миқдори қуллаҳо ва миқдори рӯяҳои онро ёбед.

327. Ченаки градусии кунҷи ченаки радианиаш $\frac{7\pi}{18}$ бударо ёбед.

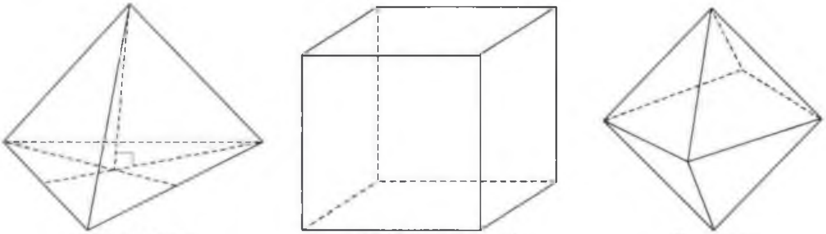
28. Бисёррӯяи мутлақо мунтазам (БММ)

Таъриф. Бисёррӯяи барҷаста *мутлақо мунтазам* номида мешавад, ағар ҳамаи рӯяҳои он бисёркунҷаҳои дорои миқдори якхелаи тарафҳои ба ҳам баробар бошанд ва агар дар ҳар як қуллаи бисёррӯя миқдори баробари теғаҳо бо ҳам дучор оянд.

Мисоли бисёррӯяи мутлақо мунтазам (БММ) куб аст. Дар он ҳамаи 6 рӯя квадратҳои ба ҳам баробар буда, дар ҳар як қуллааш 3 теға бо ҳам дучор меояд.

Аз таъриф бармеояд, ки дар БММ рӯяҳо ба ҳамдигар баробаранд. Пас кунҷҳои дурӯя, ки онҳоро рӯяҳои теғаи умумидошта ташкил медиҳанд, низ баробаранд.

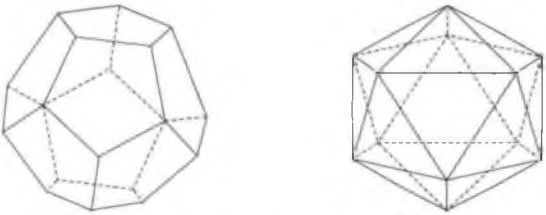
Нишон дода шудааст, ки БММ-и n-кунҷа ҳангоми $n \geq 6$ будан вуҷуд надорад (исботи дурустии ин далелро намеорем, гарчанде вай на он қадар мураккаб аст). Барои ҳамин ҳар як қуллаи БММ танҳо қуллаи се, чор ё панҷ секунҷаи баробартараф, ё ки се квадрат ва ё се панҷкунҷаи мунтазам шуда метавонаду халос. Мувофиқан ба ин, панҷ намуди БММ вуҷуд дорад (расми 121).



Тетраэдри мутлақо мунтазам

Куб (гексаэдр)

Октаэдр



Додекаэдр

Икосаэдр

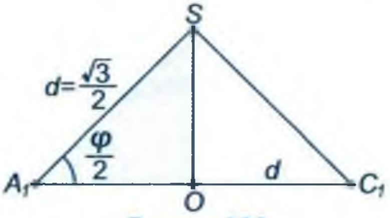
Расми 121

Онҳоро номбар карда тавсиф мекунем:

1) *Тетраэдри мутлақо мунтазам** (чоррӯя) – рӯяҳояш аз 4 секунҷаи баробартараф иборатанд. Ҳар як қуллаи он қуллаи се секунҷа аст. Яъне, дар ҳар як қуллаи он се теға ба ҳам дучор меоянд.
2) *Куб* (шашрӯя) – ҳамаи 6 рӯяҳояш квадратанд. Ҳар як қуллаи куб қуллаи 3 квадрат аст.
3) *Октаэдр* (ҳаштрӯя) – ҳамаи 8 рӯяҳояш секунҷаҳои баробаранд. Ҳар як қуллаaш қуллаи 4 секунҷа мебошад.
4) *Додекаэдр* (дувоздаҳрӯя) – аз 12 панҷкунҷаҳои мунтазам тартиб дода шудааст. Ҳар як қуллаи он қуллаи 3 панҷкунҷаи мунтазам аст.
5) *Икосаэдр* (бистрӯя) – аз 20 секунҷаҳои баробартараф тартиб дода шудааст. Ҳар як қуллаи икосаэдр қуллаи 5 секунҷа аст.

Масъала. Кунҷҳои дурӯяи октаэдрро меёбем.

Ҳал. Октаэдр дар натиҷаи аз рӯи асосҳо ҳамҷоя кардани ду пирамидаи баробар ҳосил мешавад (расми 121). Барои ҳамин кунҷи матлуб - φ аз кунҷи назди асоси пирамида - α ду маротиба калон аст, яъне $\alpha = \frac{1}{2}\varphi$. Буриши пирамидаро, ки аз қуллаи S ва миёнаҷои ду теғаи асосҳои параллел мегузарад, дида мебароем. Агар A_1 ва C_1 – миёнаҷои теғаҳои асосҳо бошанд, он гоҳ буриш секунҷаи баробарпаҳлуест, ки асосаш A_1C_1 ба теғаи октаэдр d баробар аст. Тарафҳои паҳлуӣ $SA_1 = SC_1$ ба апофемаи пирамида, яъне ба $l = \frac{\sqrt{3}}{2}d$, баробаранд. Дар айни ҳол $\angle SA_1C_1 = \alpha = \frac{1}{2}\varphi$ (расми 122).



Расми 122

---

* Мо тетраэдри мутлақо мунтазам ва пирамидаи секунҷаи мунтазамро (тетраэдри мунтазамро) аз ҳам фарқ мекунонем. Бар хилофи тетраэдри мутлақо мунтазам, ки ҳамаи теғаҳояш баробаранд, дар пирамидаи секунҷаи мунтазам теғаҳои паҳлуӣ метавонанд ба теғаҳои асос баробар набошанд.

Баландии SO-ро ба A_1C_1 гузаронида аз секунчаи SOA_1 меёбем, ки $\cos\frac{\varphi}{2}=\cos SA_1O=\frac{A_1O}{SA_1}=\frac{d}{2}:\frac{d\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Аз ин чо $\varphi=2\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Эзоҳ. Ҳангоми ҳалли масъала мо аз он истифода кардем, ки дар тетраэдри мутлақо мунтазами тарафаш d буда, апофема ба $\frac{d\sqrt{3}}{2}$ баробар аст. Инчунин нишон додан мумкин аст, ки дар чунин пирамида баландӣ ба $\frac{d\sqrt{6}}{3}$ баробар мебошад.

1. Чӣ гуна бисёррӯя бисёррӯяи мутлақо мунтазам номида мешавад? **2.** Бисёррӯяҳои мутлақо мунтазамро номбар кунед ва онҳоро тавсиф намоед. **3.** Тетраэдри мутлақо мунтазам аз пирамидаи секунчаи мунтазам чӣ фарқият дорад?

328. Кунчҳои дурӯяи тетраэдри мутлақо мунтазамро ёбед.

329. Нишон диҳед, ки ҳосили чамъи кунчҳои ҳамвори назди ҳар як қуллаи додекаэдр ба 324° баробар аст.

330. Дарозии теғаи октаэдр ба d баробар аст. Масоҳати сатҳи онро ёбед.

331. Масоҳати сатҳи тетраэдри мутлақо мунтазам ба Q баробар аст. Дарозии теғаи онро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

332. Вектори (1; 2; 3) дода шудааст. Вектори ба он коллинеариро ёбед, ки ибтидоаш нуқтаи (1; 1; 1) буда, интиҳояш дар ҳамвории Oxy чойгир аст.

333. Порчаи BD ба порчаи AC перпендикуляр буда, онро дар нуқтаи O ба ду ҳисса тақсим мекунад. Маълум, ки $AB = 5$ см, $AD = 3{,}5$ см, $AO = 3$ см аст. Периметрҳои чоркунчаи $ABCD$ ва секунчаи ABC-ро ёбед.

29. Мафҳуми ҳаҷми ҷисм

Барои чен кардани масофаи байни ду нуқта *воҳиди дарозӣ*, ки дарозии порчаи ихтиёран интихобшуда аст (милиметр, сантиметр, детсиметр, метр, километр ва ғайра) истифода карда мешавад. Андозаи ин масофа ба миқдори он воҳиде, ки дар масофаи мазкур меғунҷад, баробар аст. Ба ин монанд, барои чен кардани масоҳати фигура мо квадратро, ки тарафаш воҳиди интихобшудаи дарозӣ аст, истифода мебарем. Чунин квадрат *квадрати воҳидӣ* ном дорад. Масоҳати сатҳи додашуда ба миқдори квадратҳои воҳидӣ , ки фигура онҳоро дар бар мегирифт, баробар буд.

Барои чен кардани ҳаҷм *куби воҳидӣ*, ки теғааш ба воҳиди дарозӣ, масоҳати рӯяаш ба квадрати воҳидӣ (сантиметри квадратӣ, метри квадратӣ ва ғайра) баробар аст, истифода карда мешавад. Чунин куб *воҳиди ҳаҷм* ном дорад.

Таърифи 1. Миқдори воҳидҳои ҳаҷм, ки ҷисми геометрӣ (призма, пирамида, силиндр, кура ва ғайраҳо) онҳоро дар бар мегирад, *ҳаҷми ҷисм* номида мешавад. (Дар айни ҳол талаб карда намешавад, ки ин миқдор бо адади бутун ифода шавад.)

Агар теғаи куби воҳиди ҳаҷм 1 см бошад, он ғоҳ ҳаҷм бо сантиметрҳои кубӣ (см^3); агар теғаи куби воҳидӣ 1 м бошад, ҳаҷм бо метри кубӣ (м^3) чен карда мешавад. Рафту теғаи куб 1 км бошад, он ғоҳ ҳаҷм бо километри кубӣ (км^3) чен карда мешавад ва ғайра.

Априорӣ (бе исбот, ё ки ҳамчун гипотеза) қабул карда шудааст, ки барои ҷисмҳои геометрӣ ду *постулати* зерин дурустанд:

1. *Ба ҳар гуна ҷисми геометрӣ ба таври ягона адади мусбати мувофиқ гузоштан мумкин аст, ки он ҳаҷми ҷисм мебошад.*

2. *Агар ҷисм ба ҷисмҳои бо ҳам қисми умуминадошта ҷудо карда шуда бошад, он гоҳ ҳаҷми ҷисм ба суммаи ҳаҷми ҳар як қисм иборат аст.*

Масалан, чи тавре, ки дар оянда мебинем, ҳар ғуна призма ё пирамидаи n-кунҷаро ба миқдори охирноки призма ё пирамидаҳои секунҷа ҷудо кардан мумкин аст.

Мувофиқи постулати 2, агар ҳаҷми призма ё пирамидаи секунҷаро ёфта тавонем, он гоҳ ҳаҷми призма ё пирамидаи дилхоҳи n-кунҷаро ёфта метавонем. Постулати 2 *хосияти аддитивии ҳаҷм ном* дорад.

Таърифи 2. Агар ҳаҷми ду ҷисм ба ҳам баробар бошад, ҷисмҳоро *баробарбузург* меноманд.

Фаҳмост, ки мафҳумҳои ҷисмҳои бо ҳам баробар ва ҷисмҳои бо ҳам *баробарбузург* маънои гуногунро доранд. Масалан, призма ва пирамида баробарбузург шуда метавонанд, вале асло ба ҳам баробар не.

---

1. Воҳиди ҳаҷм чӣ гуна куб аст? 2. Ҳаҷми ҷисм чӣ тавр муайян карда мешавад? 3. Постулатҳои ҳаҷмро номбар намоед. 4. Дар кадом ҳолат ду ҷисм баробарбузурганд? Оё ҷисмҳои баробарбузург ҳамеша ба ҳам баробаранд?

Масъалаҳо барои такрор

334. Баландии ПР 12 см буда, тарафҳои асосаш 8 см ва 6 см-анд. Масоҳати сатҳи пурраи онро ёбед.

335. Росткунҷаи тарафҳояш 32 см ва 24 см дарункашида аст. Радиуси давра ёфта шавад.

30. Ҳаҷми параллелепипед ва куб

I. Аввал ба ёфтани ҳаҷми параллелепипеди росткунҷа (ПР) машғул мешавем. Барои ин мақсад тасдиқи зеринро беисбот қабул мекунем: *нисбати ҳаҷми ду ПР, ки асосҳои якхела доранд, ба нисбати баландиҳояшон баробар аст.* Дарозӣ, бар ва баландии ПР-ро *андозаҳои хаттиаш* номида будем (ниг. ба таърифи 2-и пункти 24 дар саҳ 137).

Теоремаи 33. Ҳаҷми ПР, ки андозаҳои хаттиаш a, b, c мебошад, бо формулаи $V = abc$ ҳисоб мешавад.

Исбот. Куберо, ки воҳиди чен кардани ҳаҷм аст, яъне андозаҳояш 1, 1, 1 аст, интихоб мекунем. Баъд се ПР-и андозаҳояшон a, 1, 1; a, b, 1 ва a, b, c-ро мегирем. Ҳаҷми онҳоро бо V_1, V_2 ва V ишорат мекунем. Аз сабаби он ки андозаи дилхоҳи ПР-ро ҳамчун баландӣ қабул кардан мумкин аст, мувофиқи тасдиқи дар боло овардашуда

$$\frac{V_1}{1}=\frac{a}{1}, \quad \frac{V_2}{V_1}=\frac{b}{1}, \quad \frac{V}{V_2}=\frac{c}{1}.$$

Ҳар се ин баробариро аъзо ба аъзо зарб мекунем:

$$\frac{V_1}{1}\cdot\frac{V_2}{V_1}\cdot\frac{V}{V_2}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{1}\cdot\frac{c}{1}, \text{ яъне } V=abc.$$

Дурустии теорема исбот шудааст.

II. Аз теорема чунин хулосаҳо бармеоянд:

Хулосаи 1. *Ҳаҷми ПР ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст.*

Дар ҳақиқат, рӯяи теғаҳояш ба a ва b баробарро ҳамчун асоси ПР қабул мекунем. Пас, масоҳати асос S ба $a \cdot b$ ва баландии H ба c баробар мешавад, яъне

$$V=abc=S\cdot H.$$

Амалан дуруст будани ин хулосаро барои ҳар ғуна параллелепипед нишон додан мумкин аст. Яъне дурустии ҷумлаи зеринро: *Ҳаҷми параллелепипеди дилхоҳ* (моил, рост, росткунҷа) *ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст.* Вале мо бо овардани тасвияи ҳамин тасдиқ маҳдуд шуда, исботашро намеорем.

Хулосаи 2. *Ҳаҷми куби теғааш a бо формулаи $V=a^3$ ҳисоб мешавад.*

Масъалаи 1. Масоҳати се рӯяи ПР ба 2 м², 3 м² ва 6 м² баробаранд. Ҳаҷми онро меёбем.

Ҳал. Нишон медиҳем, ки агар Q_1, Q_2, Q_3 – масоҳатҳои рӯяҳо бошанд, он гоҳ $V=\sqrt{Q_1Q_2Q_3}$ мешавад. Дар ҳақиқат, агар a, b, c андозаҳои ПР бошанд, он гоҳ $V=abc$, $ab=Q_1$, $bc=Q_2$, $ac=Q_3$ аст. Аз ин баробариҳо ҳосил мекунем:

$$b=\frac{Q_2}{c}, \; a=\frac{Q_3}{c}, \; Q_1=ab=\frac{Q_2}{c}\cdot\frac{Q_3}{c}, \; c^2=\frac{Q_2Q_3}{Q_1}, \; c=\sqrt{\frac{Q_2Q_3}{Q_1}}.$$

Ҳамин тариқ,

$$V = abc = \frac{Q_3}{c} \cdot \frac{Q_2}{c} \cdot c = \frac{Q_2 Q_3}{c} = \frac{Q_2 Q_3}{\sqrt{\frac{Q_2 Q_3}{Q_1}}} = \sqrt{Q_1 Q_2 Q_3} \cdot$$

Қиматҳои додашудаи масъаларо истифода карда меёбем:

$$V = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6 \text{ м}^3 .$$

Масъалаи 1. Маълум, ки агар ҳар як теғаи кубро 1 м зиёд намоем, он гоҳ ҳаҷми куб 7 м³ зиёд мешавад. Чанд будани теғаи кубро меёбем.

Ҳал. Агар теғаи кубро бо x ишорат кунем, он ғоҳ ҳаҷми он ба x^3 баробар мешавад. Мувофиқи шарти масъала $(x + 1)^3 - x^3 = 7$ ё $3x^2 + 3x + 1 = 7$, ё ки $3x^2 + 3x - 6 = 0$. Аз ин муодилаи квадратӣ

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 6 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{81}}{6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2};\ x_1 = -2,\ x_1 = 1.$$

Танҳо решаи мусбат маънои геометриро дорад. Инак, теғаи куб 1 м аст.

1. Андозаҳои хаттии ПР гуфта чиро мегӯянд? **2.** Ҳаҷми ПР бо кадом формула ҳисоб мешавад? Ҳаҷми куб – чӣ? **3.** Исбот кунед, ки ҳаҷми ПР ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст. **4.** Оё тасдиқи зикршуда барои ҳар ғуна параллелепипед дуруст аст?

336. Ҳаҷми ПР-ро, ки тарафҳои асосаш a ва b буда, баландиаш h аст, ёбед, агар:

а) $a = 11, b = 12, h = 15$; б) $a = 3\sqrt{2}$, $b = \sqrt{5}$, $h = 10\sqrt{10}$ бошад.

337. Диагонали куб $3\sqrt{3}$ см аст. Ҳаҷми кубро ёбед.

338. Асоси ПР квадрат аст. Диагонали рӯяи паҳлуии параллелепипед, ки 8 см аст, бо ҳамвории асос кунҷи 30°-ро ташкил мекунад. Ҳаҷми параллелепипедро ёбед.

339. Андозаҳои ПР 15 м, 50 м ва 36 м-анд. Теғаи куберо, ки бо ин параллелепипед баробарбузург аст, муайян намоед.

340. Дар параллелепипеди рост тарафҳои асос $2\sqrt{2}$ см ва 5 см буда, кунҷи 45°-ро ташкил медиҳанд. Диагонали хурди параллелепипед 7 см аст. Ҳаҷми онро ёбед.

341. Дар параллелепипеди рост тарафҳои асос ба 13 см ва 37 см, диагонали калони асос ба 40 см баробар аст. Тегаи паҳлуӣ ба диагонали калони параллелепипед ҳамчун 15:17 нисбат дорад. Ҳаҷми ин параллелепипедро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

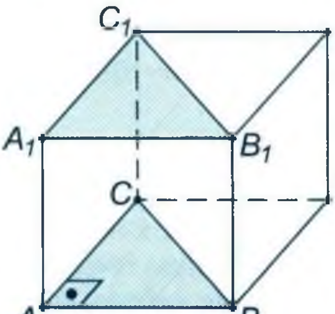
342. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа 12 см аст. Берун аз ҳамвории секунҷа нуқтае гирифта шудааст, ки он аз ҳар се қуллаи секунҷа дар масофаи 10 см воқеъ мебошад. Масофаи байни ин нуқта ва ҳамвории секунҷаро муайян кунед.

343. Кунҷҳои секунҷа ҳамчун $3:7:8$ нисбат доранд. Кунҷи калонтарини секунҷаро ёбед.

31. Ҳаҷми призма

Теоремаи 34. Ҳаҷми призмаи рост ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландиаш баробар аст.

Исбот. Дар аввал исботро барои призмаи рост, ки асосаш секунҷаи росткунҷа мебошад, меорем. Барои ин призмаи $ABCA_1B_1C_1$-ро, ки дар он $\angle A = 90^\circ$ аст, то параллелепипеди росткунҷа ҳосил шудан пурра мекунем (расми 123). Мувофиқи хулосаи 1-и пункти 30 ҳаҷми параллелепипеди ҳосилшуда ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст, яъне ба $2S_{ABC} \cdot H$, ки дар ин ҷо S_{ABC} - масоҳати секунҷаи ABC ва H – баландии призма мебошанд. Ҳамвории C_1CB параллелепипедро



Расми 123

ба ду призмаи рост ҷудо мекунад, ки якеи онҳо призмаи додашуда аст. Ин призмаҳо ба ҳамдигар баробаранд, чунки асосҳо ва баландии баробарро доранд. Пас, ҳаҷми призмаи додашуда ба нисфи ҳаҷми параллелепипед баробар аст. Ҳамин тариқ, $V = \frac{1}{2}(2S_{ABC} \cdot H) = S_{ABC} \cdot H$. Яъне, теорема барои чунин призма исбот шуд.

Бигузор акнун призмаи додашуда рост буда, асосаш секунҷаи дилхоҳ аст. Дар асос баландиеро мегузаронем, ки вай секунҷаи асосро ба ду секунҷа ҷудо мекунад. (Дар ҳар гуна секунҷа чунин баландӣ ҳаст!) Сонӣ, аз рӯйи ин баландӣ ва теғаи паҳлуии ба он перпендикуляр буда ҳамворӣ мегузаронем (шабеҳи ҳамвории C_1CB, ки дар боло доир ба он сухан ронда будем). Ин ҳамворӣ призмаро ба ду призмаи рости асосаш секунҷаҳои росткунҷа ва дорои баландии якхела ҷудо менамояд. Мувофиқи хосияти аддитивии ҳаҷм ҳаҷми призма ба ҳосили ҷамъи ҳаҷми ин ду призма баробар аст. Яъне ба ҳосили зарби асос бар баландиаш.

Дурустии теорема барои призмаи рости дилхоҳ аз он бармеояд, ки ҳар гуна призмаи ростро ба якчанд призмаи рости секунҷа ҷудо кардан мумкин аст. Инчунин аз хосияти аддитивии ҳаҷм ҳам.

Эзоҳ. Тасдиқи теорема на ин ки барои призмаи рост, балки барои ҳар гуна призма дуруст аст. Яъне, *ҳаҷми ҳар гуна призма* (аз он ҷумла, призмаи моил ҳам) *ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландиаш баробар аст.*

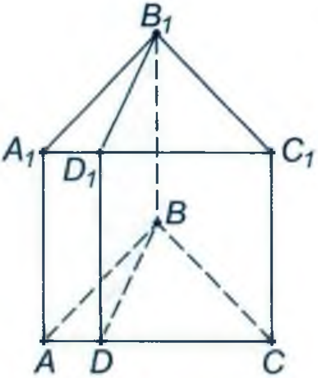
Масъалаи 1. Дар призмаи рости $ABCA_1B_1C_1$ $AB=2\sqrt{5}$ см, $BC = 4\sqrt{5}$ см, $AA_1 = 10$ см ва $\angle ABC = 90°$ аст. Ҳамвории аз рӯи теғаи BB_1 мегузаштагӣ ба рӯяи ACC_1A_1 перпендикуляр аст (расми 124). Ҳаҷми худи призма ва ҳаҷми призмаҳои $ABDA_1B_1D_1$ ва $BDCB_1D_1C_1$-ро меёбем.

Ҳал.

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 10 = 200 \text{ см}^3.$$

Барои ёфтани ҳаҷми призмаи $ABDA_1B_1D_1$ масоҳати асоси он – масоҳати секунҷаи ADB-ро меёбем. Мувофиқи теоремаи Пифагор, аз секунҷаи росткунҷаи ABC:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (2\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 = 20 + 80 = 100$, $AC = 10$ см.



Расми 124

Баъд, BD баландии ΔABC аст, бинобар ин аз рӯи вобастагии Уқлидус $AB^2 = AD \cdot AC$. Яъне, $(2\sqrt{5})^2 = AD \cdot 10$. Аз ин ҷо $AD = 2$ см, $DC = AC - AD = 10 - 2 = 8$ см. Боз мувофиқи вобастагии Уқлидус $BD^2 = AD \cdot DC$, $BD^2 = 2 \cdot 8 = 16$, $BD = 4$ см ва $V_{ABDA_1B_1D_1} = S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} AD \cdot BD \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10 = 40$ см³. Мувофиқи хосияти аддитивии ҳаҷм $V_{BDCB_1D_1C_1} = V_{ABCA_1B_1C_1} - V_{ABDA_1B_1D_1} = 200 - 40 = 160$ см³.

Масъалаи 2. Асоси призмаи моил ромбест, ки диагоналҳояш 5 см ва 6 см мебошанд. Баландии ин призма 10 см аст. Ҳаҷмашро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи эзоҳ ҳаҷми призмаи мазкур ба ҳосили зарби масоҳати ромб бар баландӣ баробар аст. Масоҳати ромб бошад нисфи ҳосили зарби диагоналҳояш аст, яъне $S = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$ см². Пас, $V = S \cdot H = 15 \cdot 10 = 150$ см³.

---

1. Тасдиқ доир ба ҳаҷми призмаи рости асосаш секунҷаи росткунҷа хулосаи кадом теорема аст? 2. Чаро ақаллан яке аз баландиҳои секунҷа онро ба ду секунҷа ҷудо менамояд, яъне тарафи муқобилро мебурад? 3. Теоремаро баён намуда, онро ҳангоми секунҷа будани асоси призма исбот кунед.

---

344. Диагонали призмаи чоркунҷаи мунтазам 3,5 м буда, диагонали рӯяи паҳлуӣ 2,5 м аст. Ҳаҷми призмаро ҳисоб кунед.

345. Ҳаҷми призмаи n-кунҷаи мунтазамро, ки ҳар як теғаи он a аст ҳисоб кунед, агар: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$ бошад.

346. Баландии призмаи рости секунҷа 5 м, ҳаҷмаш 24 м^3 аст. Масоҳати рӯяҳои паҳлуии он ҳамчун 17 : 17 : 16 нисбат доранд. Тарафҳои асосро ёбед.

347. Масоҳати асоси призмаи рости секунҷа 4 см^2 буда, масоҳати рӯяҳои паҳлуиаш 9 см^2, 10 см^2 ва 17 см^2 мебошад. Ҳаҷмашро муайян кунед.

348. Дар призмаи секунҷаи моил тарафҳои асос 5 м, 6 м, ва 9 м-анд. Теғаи паҳлуӣ 10 м буда, бо ҳамвории асос кунҷи 45°-ро ташкил медиҳад. Ҳаҷми призма ёфта шавад.

349. Теғаҳои паҳлуии призмаи секунҷаи моил ба 15 м баробаранд. Масофаи байни онҳо 26 м, 25 м ва 17 м аст. Ҳаҷми призмаро ёбед.

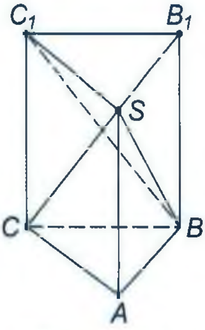
Масъалаҳо барои такрор

350. Дар призмаи секунҷаи рост тарафҳои асос 3 м, 4 м ва 5 м буда, баландӣ 6 м аст. Масоҳати сатҳи пурраи призмаро ёбед.

351. Асосҳои трапетсияи баробарпаҳлу 6 см ва 10 см мебошанд. Диагоналаш 10 см аст. Масоҳати трапетсияро ёбед.

32. Ҳаҷми пирамида

Теоремаи 35. Ҳаҷми пирамида ба ҳосили зарби масоҳати асос бар сеяки баландӣ баробар аст.



Расми 125

Исбот. Биғзор пирамидаи додашудаи $SABC$ секунҷа аст. Онро бо ҳамон асос ва ҳамон баландӣ, ки пирамида дорад, то призмаи секунҷа ҳосил кардан пурра менамоем (расми 125). Дар натиҷа призмаи секунҷаи $CABC_1SB_1$, ки асосаш секунҷаи ABC аст, ҳосил мекунем. Ин призма аз се пирамидаи секунҷаи $SABC$, SC_1CB, SC_1B_1B иборат аст. C_1B – диагонали рӯяи BCC_1B_1 буда, ин рӯяро ба ду секунҷаи баробари

C_1CB ва C_1B_1B чудо менамояд. Инчунин баландиашон, ки аз қуллаи S фуроварда шудааст, умумӣ мебошад. Пас, ин ду пирамида ҳаҷми якхеларо доранд (ниг. ба банди 29).

Асосҳои пирамидаҳои якум ва сеюм – секунҷаҳои ABC ва SB_1C_1 ҳамчун асосҳои призма ба ҳамдигар баробаранд. Баландии ин пирамидаҳо низ баробаранд. Барои ҳамин онҳо низ ҳаҷми баробарро доранд. Ҳамин тариқ, ҳар се пирамида дорои ҳаҷми баробаранд ва ҳосили ҷамъи ҳаҷмҳои онҳо ба ҳаҷми призмаи секунҷа баробар аст. Пас агар баландии призмаро бо H ишорат кунем, он гоҳ

$$3V_{SABC} = V_{CABC_1SB_1} = S_{ABC}\cdot H \text{ ё } V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot H .$$

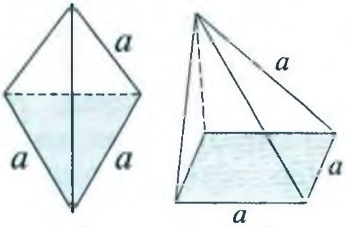
Дурустии теорема барои пирамидаи секунҷа нишон дода шудааст.

Исботи теорема барои пирамидаи дилхоҳ аз имконияти ба пирамидаҳои секунҷа ҷудо кардани он ва истифодаи хосияти аддитивии ҳаҷм ҳосил карда мешавад.

Масъалаи 1. Ҳаҷми пирамидаи асосаш квадратро, ки баландиаш 9 см ва теғаи асосаш 8 см аст, меёбем.

Ҳал. Асоси пирамида квадрат буда, масоҳаташ $8^2 = 64$ см^2 аст. Пас мувофиқи теорема ҳаҷми пирамида $V=\frac{1}{3}\cdot SH=\frac{1}{3}\cdot 64\cdot 9=64\cdot 3=192$ см^3 мебошад.

Масъалаи 2. Ҳаҷми тетраэдри мутлақо мунтазам ва пирамидаи мунтазами чоркунҷаро, ки теғаашон ба a баробар аст, меёбем.

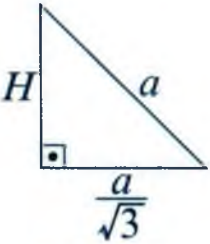


а) а)

Расми 126

Ҳал. 1) Масоҳати асоси тетраэдри мутлақо мунтазам (расми 126,а) ба $S=\frac{1}{2}a^2\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ баробар аст. Баландиашро меёбем. Баландӣ аз маркази асос мегузарад, ки он маркази давраи берункашида буда, аз қуллаи асос дар масофаи $\frac{a}{\sqrt{3}}$ ҷойгир аст. Пас дар асоси теоремаи

Пифагор (расми 127) $H^2 = a^2 - (\frac{a}{\sqrt{3}})^2 = \frac{2}{3}a^2$, яъне $H = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$.



Расми 127

Барои ҳамин ҳаҷми чунин тетраэдр

$$V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}.$$

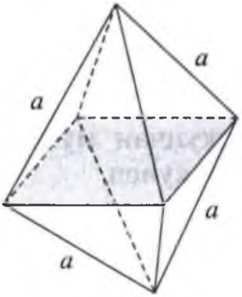
2) Мулоҳизаҳои дар қисми 1) бударо барои пирамидаи мунтазами чоркунҷа такрор карда меёбем, ки $S = a^2$,

$$H^2 = a^2 - (\frac{a}{\sqrt{2}})^2 = \frac{a^2}{2}, \quad H = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$V = \frac{1}{3}S\cdot H = \frac{a^2}{3}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{2a^3}{3\cdot 2\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}.$$

Масъалаи 3. Ҳаҷми октаэдро, ки теғааш 9 см аст, меёбем.

Ҳал. Октаэдр дар натиҷаи аз рӯйи асос болои ҳамдигар гузоштани ду пирамидаи мунтазами чоркунҷаи ҳамаи тегаҳояш ба ҳамдигар баробар ҳосил мешавад (расми 128). Пас агар тегаи октаэдр ба *a* баробар бошад, он гоҳ мувофиқи хосияти аддитивии ҳаҷм ва натиҷаи масъалаи 2 ҳаҷми октаэдр ба $V = 2\cdot\frac{\sqrt{2}a^3}{6} = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ баробар аст. Бо назардошти $a = 9$ см ҳосил мекунем $V = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot 9^3 = 243\sqrt{2}$ см³.



Расми 128

---

1. Дар исботи теорема доир ба ҳаҷми пирамида аз баробарбузургии чӣ гуна пирамидаҳо истифода карда шудааст? **2.** Аввал теоремаро барои пирамидаи дилхоҳ баён карда, баъд онро барои пирамидаи секунҷа исбот кунед. **3.** Ҳаҷми тетраэдри мутлақо мунтазам, пирамидаи квадратии мунтазам ва октаэдр бо воситаи тегаашон чӣ тавр ифода карда мешавад?

352. Ҳаҷми пирамидаи квадратиро ёбед, агар баландии он 7 см ва теғаи асосаш 6 см бошад.

353. Дар пирамидаи чоркунҷаи мунтазам баландӣ 3 м, теғаи паҳлуӣ 5 м аст. Ҳаҷмашро ёбед.

354. Масоҳати сатҳи пурраи тетраэдри мутлақо мунтазам ба S баробар аст. Ҳаҷмашро ёбед.

355. Яке аз иншооти азимҷусаи дунёи қадим – пирамидаи Хеопс дар Миср шакли пирамидаи чоркунҷаи мунтазамро дорад, ки баландиаш 150 м ва теғаи паҳлуиаш 220 м аст. Ҳаҷми пирамидаи Хеопсро ёбед.

356. Асоси пирамида росткунҷаи тарафҳояш 9 м ва 12 м буда, ҳар як теғаи паҳлуиаш ба 12,5 м баробар аст. Ҳаҷми пирамидаро ёбед.

357. Яке аз теғаҳои пирамидаи секунҷа 4 см ва ҳар як теғаи дигараш 3 см аст. Ҳаҷми пирамидаро ёбед.

358. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубест, ки теғааш 2 см мебошад. Ҳаҷми пирамидаи ACB_1D_1 -ро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

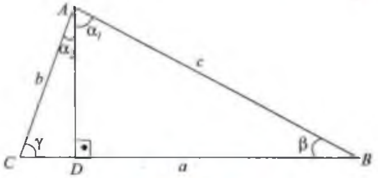
359. Масоҳати сатҳи паҳлуии пирамидаи Хеопсро ёбед (ниг. ба масъалаи 355).

360. Масоҳати доираи дарункашидаи шашкунҷаи мунтазами дарозии тарафаш 4 см бударо ҳисоб кунед.

ҶАВОБ ВА НИШОНДОД БА ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО

5. Хати рост дар ҳамин ҳамворӣ ҷойгир аст. **6.** Ҳамвориҳо аз рӯи хати рости аз ҳамин нуқта мегузаштагӣ бурида мешаванд. **7.** На, танҳо қисми ҳамворӣ. **8.** Ба ду қисм. **9.** Ба 4 ва 6 қисмҳо. **10.** Ду ҳал дорад: 1,2*м* ва 7,6*м*. **12.** 5*см*. **13.** 30*см*. **25.** Чунин ҳамвориҳо чортоанд. **36.** На. **39.** Кунҷҳои тези секунҷа ба 30^0 ва 60^0 баробаранд, бинобар ин катетҳо $\frac{C}{2}$ ва $\frac{C\sqrt{3}}{2}$ мебошанд. **40.** а) Ду баландии секунҷа (ё давоми онҳо) ҳамдигарро мебуранд, вагарна ду тарафи секунҷа параллел мебуд, ки ин номумкин аст; б) Дуто медиана бо тарафи мувофиқ кунҷҳое ташкил мекунанд, ки ҳосили ҷамъашон аз 180^0 хурд аст, пас, онҳо ҳамдигарро мебуранд ва дар айни ҳол дар дохили секунҷа; в) Дар дохили секунҷа ҳатман бурида мешаванд. **49.** $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$. **50.** $\frac{3}{2}a$ ва $\frac{\sqrt{3}}{16}a^2$. **51.** На. **52.** $2\sqrt{56}$ *см*. **53.** Ҳа. **55.** Мумкин нест. **56.** Мумкин аст. **67.** $a=\sqrt{\frac{2S\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}}$, $b=\sqrt{\frac{2S\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}}$, $c=\sqrt{\frac{2S\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}}$, ки дар ин ҷо a,b,c-тарафҳои секунҷа, ки ба кунҷҳои он $\alpha,\beta,\pi-(\alpha+\beta)$ муқобиланд. **70.** На. **73.** $\frac{1}{2}|a-b|$. **74.** 1) 25*см*; 2) $C\left(1+\frac{b}{a}\right)$. **76.** Ба исботи леммаи пункти 12 ниг. **77.** 2) $a+c-b$. **78.** Дар ду рӯя – AA_1BB_1 ва AA_1DD_1. **79.** Беҳад бисёр, агар нуқта бо хати рости α таалуқ надошта бошад; ягонто ҳам не, агар нуқта ба α тааллуқ дошта бошад. **80.** 60^0 ва 120^0. **81.** 4*м* ва 6*м*. **82.** $\pi-\arcsin\frac{\sqrt{10}}{4}$. **87.** 1) 3,75*см*; 2) $\frac{bc}{a+c}$. **88.** Хати рост ва ҳамвории асос параллел мебошанд. **89.** Дар ҳолати ба CD параллел будани AB. **94.** Аз рӯи ду хати рости параллел ё ҳамдигарро мебуридагӣ ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст. **95.** Тасдиқи масъалаи 75-ро истифода баред. **96.** $\angle B = 45^0$. Аз монандии секунҷаҳои ABC ва ACD бармеояд, ки $AB=\sqrt{2}AC$ аст. Баъд теоремаи синусҳоро истифода кардан лозим аст. **97.** $arctg\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **102.** ABB_1A_1 – параллелограмм, бинобар ин $A_1B_1 = AB = 4$*см*. **104.** Аз ҳалли масъалаи 3-и қисми назариявии пункт ва теоремаи 9 истифода кунед.

105. 1) 10*см*; 2) 25*см*. **106.** Исбот кунед, ки хатҳои рости AC ва B_1D_1 чиликӣ мебошанд. **109.** Нуқтаҳои буриши ҳамвории PKL-ро бо рӯяҳо созед ва исбот кунед, ки ҳамворӣ аз рӯи миёнаҷои рӯяҳо мегузарад. **110.** Теоремаи 5-ро истифода кунед. **113.** Ба секунҷаи ABD ду карат теоремаи синусҳоро татбиқ намуда кунҷи α_1 ва тарафи c-ро ёбед (расми 129). Баъд аз рӯи теоремаи коси-нусҳо аз секунҷаи ACD – тарафи b-ро. Дар охир, ба секунҷаи ABC теоремаи синусҳоро татбиқ намуда γ-ро ёфтан мумкин аст. **114.** а) На; б) ҳа; в) на; г) на. **118.** Исбот кунед, ки AB ба ҳамвории MAC перпендикуляр аст. **120.** 5*см*. Барои ҳал формулаи $r=\dfrac{S}{p}$-ро истифода кунед, ки дар ин ҷо p – ним-периметр, S - масоҳати секунҷа мебошад. **121.** 200$см^2$. **126.** 0,36*м*. **128.** 1) 4*м*; 2) $\dfrac{a+b}{2}$.



Расми 129

129. $\dfrac{a}{2}$. **130.** 9*м*. **131.** $\sqrt{a^2-\dfrac{b^2}{2}}$. **132.** 41*см* ва 15*см*. **133.** 4*см* ва 8*см*. **134.** $\sqrt{2}$ *м*. **135.** 5*м*, 3*м* ва 3*м*. **136.** 6,5*м*. **137.** 1) a; 2) $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

138. $4\dfrac{2}{3}$ см. **139.** Теоремаи косинусҳоро истифода кунед. **140.** 2,5*м*.

141. 2*м*. **142.** $\sqrt{2b^2-a^2}$. **143.** 6*м*. **144.** 14*м*. **145.** $\sqrt{a^2-\dfrac{1}{4}\alpha^2}$. **146.** На.

147. $r=\dfrac{-c+\sqrt{c^2+4S}}{2}$, агар $S\le\dfrac{c^2}{4}$ бошад. Барои ёфтани ҳал формулаҳои $p = c + r$, $S = pr$, ки дар ин ҷо p – нимпериметри секунҷа аст, истифода кунед. **148.** $arctg\dfrac{1}{\sqrt{45}}$. **150.** 1,3*м*.

152. 1) $\sqrt{d^2+b^2+c^2}$. **153.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **154.** 1,7*м*. **155.** 0,4*см*. **156.** $\sqrt{d^2+c^2-b^2}$. **157.** 38,88$см^2$. **158.** Теоремаҳои косинусҳо ва синусҳоро истифода кунед. **160.** 1) 45^0; 2) 90^0; 3) 60^0. **161.** 1) $2h$; 2) $\sqrt{2h}$; 3) $\dfrac{2h}{\sqrt{3}}$. **162.** $a\sqrt{6}$. **163.** 1) $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$; 2) $\dfrac{a}{2}$. **164.** 30^0.

165. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **166.** $\varphi_1 = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\varphi_2 = \varphi_3 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$.

167. $a\sqrt{2}$. **168.** $3a$. **169.** 10*см* ва 6*см*. **172.** 13*м*. **173.** $2a$. **174.** $\arccos\frac{1}{7}$.

175. 30^0. **176.** 3,36*м*. **178.** $arctg\left(\frac{tg\varphi}{2}\right)$. **179.** $arctg(2tg\varphi)$. **182.** 2,5*м*^{2}.

183. 23*см* ва 17*см*. **184.** 60^0. **185.** Шарти масъала ва теоремаи косинусҳоро истифода карда, исбот кунед, ки дар секунча ҳар се кунҷ баробаранд. **187.** 1)*F*; 2)*C*; 3) *D*; 4) *B;C;E;F;* 5)*C,D*; 6)*A,D,F;* **190.** $A_x(2;0;0)$, $A_y(0;3;1)$, $A_z(0;0;1)$, $A_{xy}(2;3;0)$, $A_{xz}(2;0;1)$, $A_{yz}(0;3;1)$.

191. $\sqrt{41}$. **192.** $M(-3{,}5;-1{,}5)$. **193.** $\frac{\sqrt{2}a}{3}$. **194.** 1) $\sqrt{30}$; 2) $\sqrt{53}$.

195. (0;-8,5;0). **196.** *B*. **197.** *A*. **198.** 1) 3,1, 2; 2) $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{14}$.

199. $\sqrt{11}$, $\sqrt{38}$, $\sqrt{73}$. **200.** Ҳа. **201.** $M(1{,}5;-2;-2)$. **202.** На.

203. Ҳа. **204.** *D*(1;5;-7). **205.** 7, $\frac{\sqrt{10}}{2}$, $\frac{\sqrt{142}}{2}$. **206.** *B*(0;0;4). **209.** 5*м*.

210. $A_x(4;0;0)$, $A_y(0;2;0)$, $A_z(0;0;5)$, $A_{xy}(4;2;0)$, $A_{xz}(4;0;5)$, $A_{yz}(0;2;5)$. **215.** (2;1;4), (2;-1;-4), (-2;1;-4). **216.** (2;-1;4), (-2;1;4), (-2;-1;-4). **217.** (-2;-1;-4). **219.** $x'=x+2$, $y'=y+7$. **220.** (5;0;-8). **221.** (-3;-9;2).

222. 1) На; 2) ҳа. **223.** 1*м*, 2*м*, 2,5*м*. **224.** 10*см*. **226.** $D\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3};0\right)$.

227. 1) (1;-3;5); 2) (4;9;-9). **228.** $4\sqrt{3}$. **229.** $\sqrt{21}$. **230.** *D*(-2;3;0).

231. $x=\pm4$. **232.** 3. **235.** (0;0;9). **236.** (-2;4;-3). **237.** $\left(\frac{4}{3};-1\frac{3}{10};-2{,}4\right)$.

238. Векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AC}$ ё $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{BC}$ бояд коллинеари бошанд. **242.** 1) $m=-2$, $n=-2{,}5$; 2) $m=4$, $n=6$. **243.** $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};-1\right)$.

244. $\left(\frac{3}{\sqrt{17}};\frac{2}{\sqrt{17}};-\frac{2}{\sqrt{17}}\right)$ ё $\left(-\frac{3}{\sqrt{17}};-\frac{2}{\sqrt{17}};\frac{2}{\sqrt{17}}\right)$. **245.** $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

246. Ҳангоми $a_2=a_3=0$ будан. **247.** $\sqrt{11{,}6}$. **248.** На. **249.** На.

250. Дар тирҳои *Oy*, *Ox* ва *Oz*. **251.** $2\sqrt{5a}$. **252.** 1) $-3\sqrt{3}$; 2) $11-3\sqrt{3}$; 3) $11-6\sqrt{3}$; 4) $10-9\sqrt{3}$. **253.** 20. **254.** 4. **255.** 1) $m=\frac{1}{3}$;

2) m=2. **256.** c=1. **257.** α=1. **258.** $\frac{5}{\sqrt{63}}$. **259.** $\sqrt{\frac{2}{15}}$. **260.** (2;2;-1). **261.** 4. **262.** $\lambda=-14$. **264.** 15 *см* ва 41 *см*. **265.** 15*см*. **266.** $\left(\frac{1}{\sqrt{21}};\frac{2}{\sqrt{21}};-\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$ ва $\left(-\frac{1}{\sqrt{21}};-\frac{2}{\sqrt{21}};\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$. **267.** $x'=x-5$, $y'=y+3$, $z'=z+4$. **271.** На. **272.** На. **273.** 1,17 см. **274.** 15 м. **276.** 5. Ин призма 6 қулла, 9 теға ва 3 теғаи паҳлӯӣ дорад. Вай секунҷа аст. **277.** а) 14 қулла, 9 рӯя, 21 теға; б) 20 қулла, 21 рӯя, 30 теға; в) 2n қулла, n + 2 рӯя, 3n теға. **278.** 11-кунҷа. **279.** а) На, чунки муодилаи 2n = 13 ҳалли бутун надорад; б) ҳа, 5-кунҷа; в) ҳа, 21-кунҷа. **280.** а) 0; б) 4; в) 10; г) $n(n-3)$. **281.** На. **282.** 6 м. **283.** 2 м. **284.** 4 м. **285.** $32(1+2\sqrt{2})$ см². **286.** 7,5 см. **287.** 66 м². **288.** 52 рӯя, 150 теға. **289.** 16 см. **291.** Ҳа. **292.** 188 м². **293.** 12 м³. **294.** 12 см. **295.** а) 31; б) 13. **296.** $7\sqrt{3}$ м. **297.** а) 90°; б) 45°. **298.** 7 м². **299.** 94 м². **300.** 70 м². **301.** 10 м. **302.** 2 м. **303.** 6 м, 14 см, 16 см, 14 см, 16 см. **304.** 29 см. **305.** 84 м². **306.** 40 см². **307.** 3 см. **308.** 12 см. **309.** 5 см ва 6 см. **310.** 3 см. **311.** 9 см. **312.** 5 см. **313.** $\sqrt{265{,}5}$ см. **314.** $\sqrt{69}$ см. **315.** $\sqrt{115{,}75}$ см. **316.** 90°. **317.** 5 см. **318.** Масъала ду ҷавоб дорад: $\frac{1}{3}$ ва 3. **319.** 1,8 м ва 4 м. **320.** $\sqrt{\sqrt{4H^2+S^2}-2H^2}$. **321.** 16 см ва 6 см ё 12 см ва 8 см. **322.** 18 см. **323.** $36\sqrt{3}$ см². **324.** 52 рӯя ва 150 теға. **325.** 7 см². **326.** 50 қулла ва 50 рӯя. **327.** 70°. **328.** $\arccos\frac{1}{3}$. **330.** $2\sqrt{3}\,d^2$. **331.** $\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{3}}$. **332.** $\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};-1\right)$. **333.** 17 см ва 16 см. **334.** 432 см². **335.** 20 см. **336.** а) 1980; б) 300. **337.** 27 см³. **338.** 192 см³. **339.** 30 м. **340.** 60 см³. **341.** 36 см³. **342.** 8 см. **343.** 80°. **344.** 3 м³. **345.** а) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$; б) a^3; в) $1{,}15\sqrt{3}\,a^3$. **346.** 3,4 м; 3,4 м; 3,2 м. **347.** 12 см³. **348.** 100 м³. **349.** 3060 м³. **350.** 84 м². **351.** 48 см². **352.** 84 см³. **353.** 32 м³. **354.** $\frac{S}{36}\sqrt{2S\cdot\sqrt{3}}$. **355.** $2{,}6\cdot10^6$ м³. **356.** 360 м³. **357.** $\sqrt{11}$ см³. **358.** $\frac{8}{3}$ см³. **359.** $85\cdot10^3$ м². **360.** 16π м²

МУНДАРИҶА

БАРОИ ҚАЙДҲО

Боймурод Алиев

Геометрия

(ибтидои стереометрия)
китоби дарсӣ барои синфи 10

Муҳаррир	Дилшод Шарапов
Мусаҳҳеҳ	Марҳабо Алиева
Муҳаррири техникӣ	Равшан Хонҷонов
Дизайн ва ороиши муқова	Шуҳрат Юсупов
Чопи компютерӣ	Зафар Ташрифов

Ба чопаш 25.03.2011 имзо шуд.
Андозаи коғаз $60\times90\ ^1/_{16}$. Коғази офсетӣ.
Гарнитураи Times New Roman Tj.
Чопи офсетӣ. Ҳаҷм 10,75 ҷузъи чопии аслӣ.
Адади нашр 101000.

ҶДММ «Офсет»
ш. Душанбе, к. А. Дониш-32
тел.: 226-12-21, 226-13-31