Р. Пиров, Н.Усмонов

АЛГЕБРА

Китоби дарсӣ барои синфи 10-уми
муассисаҳои таҳсилоти умумӣ

**Вазорати маориф ва илми
Ҷумҳурии Тоҷикистон
тавсия кардааст**

**ДУШАНБЕ
МАОРИФ
2017**

ББК 74.26.Я72
М80

М80. Р. Пиров, Н.Усмонов. **Алгебра**. китоби дарсӣ барои синфи 10-ум. Душанбе. Маориф. 2017. 288саҳ

Хонандагони азиз!

Китоб манбаи донишу маърифат аст, аз он баҳрабар шавед ва эҳтиёт намоед. Кӯшиш кунед, ки соли хониши оянда ҳам ин китоб бо намуди аслиаш дастраси додару хоҳарчаҳоятон гардад ва ба онҳо ҳам хизмат кунад.

Истифодаи иҷоравии китоб:

№	Ному насаби хонанда	Синф	Соли хониш	Ҳолати китоб (баҳои китобдор)	
				Аввали сол	Охири сол
1					
2					
3					
4					
5					

ISBN 9965-05-032-5

БОБИ I

Дараҷа ва функсияи дараҷагӣ. Муодилаҳои ирратсионалӣ

§1. Дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалӣ.
§2. Муодилаҳои ирратсионалӣ

§1. Дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалӣ.

1. Таъриф ва хосиятҳои дараҷа.

1. Таъриф ва хосиятҳои дараҷаи нишондиҳандааш натуралӣ.

Таъриф. Ҳосили зарби якчанд зарбшавандаҳои байни худ баробар дараҷа номида мешаванд: $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-маротиба} = a^n$

Масалан. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$,

$\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81}$. Дар ифодаи a^n адади a асос, n нишондиҳандаи дараҷа ном дорад. Дараҷаи якуми адади a худи адади a мебошад. Ин дараҷаро чунин менависанд: a^1 ва азбаски ин ифода ба a баробар аст, пас, нишондиҳандаро партофта фақат a менависанд.

Дараҷаи нишондиҳандааш натуралӣ ба якчанд хосиятҳои муҳим молик аст, ки онҳоро меомӯзем.

1^0. Дараҷаи ҷуфти адади мусбат ё ки манфӣ адади мусбат буда, дараҷаи тоқи адади манфӣ адади манфӣ аст:

$(\pm a)^{2n} = a^{2n} (a > 0)$, $(\pm a)^{2n+1} = \pm a^{2n+1} (a > 0)$. дар ин ҷо $2n$ навишти умумии адади ҷуфт буда, $2n+1$ навишти умумии адади тоқ мебошад.

Мисол: $(-3)^4 = 81$; $(-2)^5 = -32$.

Эзоҳ. Чунин ду ифодаро аз ҳамдигар фарқ кардан лозим аст: $(-a)^n$ ва $-a^n$; дар ифодаи дуюм бошад, n ба худи дараҷа тааллуқ дорад.

2^0. Дар вақти зарб кардани дараҷаҳои асосашон якхела нишондиҳандаҳои дараҷаҳо ҷамъ ҳангоми тақсимашон бошад, нишондиҳандаҳо тарҳ карда мешавад: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a^m : a^n = a^{m-n}$;

Масалан, $2^2 \cdot 2^3 = 2^5 = 32$; $(-3) \cdot (-3)^3 = (-3)^4 = 81$;

$3^8 : 3^{10} = 3^{8-10} = 3^{-2}$; $(x+y)^8 : (x+y)^5 = (x+y)^3$

Мо ҳосили зарб ва тақсими ду дараҷаро нишон додем. Хосияти овардашуда барои миқдори дилхоҳи дараҷаҳои асосҳояшон якхела ҳам дуруст аст, масалан, $a^m \cdot a^n \cdot a^k \cdot a^l = a^{m+n+k+l}$.

3⁰. Дар вақти ба дараҷа бардоштани ҳосили зарб ҳар як зарбшавандаро ба ин дараҷа бардошта, баъд натиҷаҳоро ба ҳамдигар зарб кардан лозим аст: $(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$.

Эзоҳ. Баъзан баробарии охиронро аз баръаксаш иҷро кардан қулай аст. Масалан, агар бузургии $M = 8^3 \cdot 25^3 \cdot 2^3$ - ро ҳисоб кардан лозим бошад, онро ба таври

$$M = (8 \cdot 25 \cdot 2)^3 = 400^3 = (4 \cdot 100)^3 = 64\,000\,000$$

навишта ҳисоб кардан осон аст, назар ба оне, ки ҳар яке аз ададҳои 8, 25 ва 2 – ро ба куб бардошта, баъдан натиҷаи онҳоро ба ҳам зарб кунем.

4⁰. Барои ба дараҷа бардоштани каср сурат ва махраҷро алоҳида-алоҳида ба ин дараҷа бардошта, баъд натиҷаи якумро ба дуюм тақсим кардан лозим аст: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Ҳамин тариқ, $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$; $\left(-\frac{5}{4}\right)^3 = -\frac{5^3}{4^3} = -\frac{125}{64}$; $\left(\frac{2a}{3b}\right)^3 = \frac{8a^3}{27b^3}$ мешавад.

5⁰. Барои ба дараҷа бардоштани дараҷа нишондиҳандаҳои дараҷаҳоро ба ҳам зарб мекунем: $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$.

Масалан, $\left(2^3\right)^2 = 2^6 = 64$; $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right]^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$;

$$\left(-\frac{1}{2}a^4b^2\right)^3 = -\frac{1}{8}a^{12}b^6; \quad \left(-\frac{3xy^2}{2z^3}\right)^4 = \frac{(-3xy^2)^4}{(2z^3)^4} = \frac{81x^4y^8}{16z^{12}}.$$

Татбиқи хосиятҳои номбаршударо месанҷем.

Квадрати бисёраъзогӣ ба суммаи квадратҳои ҳамаи аъзоҳои он, плюс ҳосили зарби дучандаи ҳар як аъзо бар ҳамаи аъзоҳои пасоянд, баробар аст;

Масалан, $(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 +$
$+ 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$

Мисолҳо:

1) $\left(3x^2+2y^2+xy\right)^2=\left(3x^2\right)^2+\left(2y^2\right)^2+\left(xy\right)^2+2\cdot 3x^2\cdot 2y^2y+$
$+2\cdot 3x^2xy+2\cdot 2y^2\cdot xy=9x^4+4y^4+x^2y^2+12x^2y^2+6x^3+$
$+4xy^3=9x^4+4y^4+13x^2y^2+6x^3y+4xy^3.$

$2)(a-2b+3c-4d)^2=a^2+4b^2+9c^2+16d^2+2a(-2b)+2a\cdot 3c+$
$+2a(-4d)+2\cdot(-2b)\cdot 3c+2\cdot(-2b)(-4d)+2\cdot 3c(-4d)=$
$=a^2+4b^2+9c^2+16d^2-4ab+6ac-8ad-12bc+16bd-24cd.$

?

1. Таърифи дарачаро диҳед.
2. Хосиятҳои дарачаи нишондиҳандааш натуралиро номбар кунед.
3. Дарачаи якаъзогии 1) $2x^2xy^3$; 2) $-2x^3y^4$; 3) $0{,}8x^2y^2c^3$ ба чанд баробаранд?

1. Масоҳати квадрате, ки тарафҳояш ба 5 см; 10 см; 100 м; баробаранд, ҳисоб кунед.

2. Формулаҳои $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ва $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ - ро татбиқ намуда, қимати ифодаҳои зеринро ҳисоб кунед:
$31^2; 51^2; 42^2; 47^2-23^2; 84^2-46^2.$

3. Амалҳоро иҷро кунед:

$1)\ 3x^{n-1}\cdot 2x^{n+1};$ $\qquad 2)\left(2x^{n-1}\right)^{n+1};$

$3)\left(a^{2x-1}-2a^{x+2}+3a^{x+9}\right):0{,}1a^{x-2};$ $\qquad 4)\ \dfrac{35\cdot\left(27^8+2\cdot 9^4\right)}{(81^4-12\cdot 3^{15})\cdot 15}$

Машқҳо барои такрор

4. Агар n – адади бутун бошад, ифодаҳои алгебравии $2n$; $2n+1$ чӣ гуна ададҳоро ифода мекунанд?

5. Айниятҳоро исбот кунед:

$$1)\ \frac{(m+n)^2}{2}+\frac{(m-n)^2}{2}=m^2+n^2;$$

$$2)\left(\frac{m+n}{2}\right)^2\left(\frac{m-n}{2}\right)^2=mn;\quad 3)\left(\frac{a^2-6}{a^2+1}\right)^2+\left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2=1.$$

6. Ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

1) m^4+m^3+m+1; 2) n^4+n^3-n-1; 3) $(x+y)^3-(x-y)^3$;
4) $(x+y)^4-(x-y)^4$ 5) a^2-a-12; 6) $m^2+3m-10$; 7) $2x^2+10x+12$.

2. Дараҷаи нишондиҳандааш нул ва адади бутуни манфӣ

Таърифи 1. Ҳар як адади ҳақиқии *а* – и нишондиҳандааш нул ба воҳид баробар мебошад:

Аз таъриф маълум мешавад: $7^0 = 1;\ (2-\sqrt{3})^0 = 1;\ (-0{,}4)^0 = 1.$

Ифодаи 0^0 маъно надорад.

Таърифи 2. Дараҷаи адади ҳақиқии *а* – и нишондиҳандааш адади бутуни манфӣ касреро ифода мекунад, ки сурataш ба 1 баробар буда, махраҷаш дараҷаест, ки асосаш чун аввала буда, аломати нишондиҳандааш баръакс мебошад: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}\,(a \neq 0).$

Мисол: $10^{-2} = 0{,}01; \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{9}{4} = 2{,}25;$

Баръакс, ҳар гуна касри дурусти сурataш ба 1 баробарро ба намуди дараҷаи нишондиҳандааш манфӣ навиштан мумкин аст:

$\dfrac{1}{3} = 3^{-1}; \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2^3} = 2^{-3}.$

Зарби дараҷаҳо $(a \neq 0)$

1) $a^0 \cdot a^{-n} = 1 \cdot \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{a^n} = a^{-n};\ a^{0+(-n)} = a^{-n}.$

2) $a^{-n} \cdot a^{-m} = \dfrac{1}{a^n} \cdot \dfrac{1}{a^m} = \dfrac{1}{a^{n+m}} = a^{-(n+m)};$

$a^{-n} \cdot a^{-m} = a^{-n+(-m)} = a^{-n-m} = a^{-(n+m)}.$

3) $a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}.$

Чӣ тавре, ки аз мисолҳои овардашуда маълум мегардад, дар ҳама мавридҳо **ҳангоми зарби дараҷаҳои асосаш якхела нишондиҳандаи дараҷаҳо ҷамъ карда мешаванд.**

Тақсими дараҷаҳо

1) $a^0 : a^0 = 1;\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n};\ a^0 : a^n = a^{0-n} = a^{-n};$

2) $a^0 : a^{-n} = 1 : \dfrac{1}{a^n} = a^n;\ a^0 : a^{-n} = a^{0-(-n)} = a^n;$

$$3)\ a^{-n}:a^{-m}=\frac{1}{a^n}:\frac{1}{a^m}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n};$$

$$a^{-n}:a^{-m}=a^{-n-(-m)}=a^{-n+m}=a^{m-n}.$$

Аз ин мисолҳо маълум мешавад, ки **дар вақти тақсими дараҷаҳои асосҳояшон якхела нишондиҳандаҳои онҳо тарҳ карда мешаванд.**

Ба дараҷа бардоштани дараҷа.

$$1)\ (a^0)^n=1^n=1;\ (a^0)^n=a^{0\cdot n}=a^0=1;$$

$$2)\ (a^{-n})^m=\left(\frac{1}{a^n}\right)^m=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-nm},\ \left(a^{-n}\right)^m=a^{-nm};$$

$$3)\ \left(a^{-n}\right)^{-m}=\frac{1}{\left(a^{-n}\right)^m}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^n}\right)^m}=\frac{1}{\frac{1^m}{a^{nm}}}=\frac{1}{\frac{1}{a^{nm}}}=a^{nm};$$

$$\left(a^{-n}\right)^{-m}=a^{(-n)(-m)}=a^{nm}.$$

?	**1.** Таърифи нишондиҳандааш нулро диҳед. **2.** Таърифи дараҷаи адади бутуни манфиро диҳед. **3.** Қоидаи зарби дараҷаҳо, тақсими дараҷаҳо ва ба дараҷа бардоштани дараҷаро номбар кунед.

7. а) Ифодаҳоро ҳисоб кунед:

1) 3^{-2}; 2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$; 3) $\frac{2}{5}$; 4) $5^{-2}\cdot 4^8$; 5) $\left(3^2\right)^{-4}$;

6) $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]^3$; 7) $\left[a-(1-a)^{-1}\right]\dfrac{(a-2)+a^0}{\frac{1}{a^{-2}}-a+1}$;

8) $\left(x^{-2}+a^{-3}\right)\left(x^2-a^{-3}\right)$; 9) $\dfrac{a^{-2}b^{-1}+a^{-1}b^{-2}}{a^{-2}b^{-2}}+a^3\left(a^2-2ab+b^2\right)^{-2}$.

б) Ифодаҳоро содда намоед: 1) $4a^{-3}b^2c^{-1}\cdot 0{,}25ab^{-5}c^{-2}$; 2) $\dfrac{6a^5x^7z^{-8}}{4^{-1}a^{-8}x^{-4}z}$; 3) $\left(-3\cdot 2^{-1}am^{-n}x\right)^{-2}$; 4) $\left(4a^{-2}-b^{-4}\right):\left(2b^2-a\right)$; 5) $\left(x^{-2}+1\right)^{-2}$; 6) $\left(8\cdot 0{,}25^{2-x}+6\cdot 2^{2x}-0{,}5^{-2x+1}\right):2^{2x-3}$.

Машқҳо барои такрор

8. а) Амалҳоро иҷро кунед:

1) $3\frac{1}{2}-7\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$; 2) $7\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\left(7\frac{1}{5}-4\frac{2}{3}\right)$; 3) $\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$.

б) Ҳисоб кунед: 1) $\sqrt{(5-a)^2}$ агар $a\le 5$ бошад; 2) $\sqrt{(5-a)^2}$ агар $a>5$ бошад; 3) $\sqrt{8(5-a)^2}$ агар $a\ge 5$ бошад.

в) Муодиларо ҳал кунед: $\left(\frac{2\sqrt{3}}{x^2}\right)^{-3}=\left[\left(x\sqrt{x}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}$.

3. Решаи дараҷаи *n* – ум ва хосиятҳои он

Аз курси арифметика маълум аст, ки амали ҷамъ ва тарҳ амалҳои байни ҳамдигар баръакс мебошанд, яъне:

$(a+b)-b=a$ ё ки тартиби иҷрои амалҳоро тағйир диҳем $(a-b)+b=a$ мешавад.

Монанди ҳамин амали зарб ва тақсим низ амалҳои байни якдигар чаппа номида мешаванд, зеро $(a\cdot b):b=a,\quad (b\ne 0)$, $(a:b)\cdot b=a$ мебошад.

Амали чапаи бадараҷабардорӣ азрешабарорӣ номида мешавад. Бо ёрии ин амал аз рӯи дараҷа ва нишондиҳандаи додашуда асоси дараҷаро меёбанд, масалан, агар:

1) $a^3=27$ бошад, он гоҳ $a=\sqrt[3]{27}=3$;

2) $b^5=-32$ бошад, он гоҳ $b=\sqrt[5]{-32}=-2$; мешавад. Амали аз **решабарорӣ бо рамзи $\sqrt{}$ (аломати реша ё радикал) ишора карда мешавад. Ғайр аз он дар болои аломат нишондиҳандаи реша навишта мешавад. Дар мавриди квадратӣ будани реша нишондиҳандаи реша 2 навишта намешавад.**

Таърифи 1. Решаи дараҷаи *n* – ум аз ададаи *a* гуфта чунин ададеро меноманд, ки дараҷаи *n* – уми он ба *a* баробар аст.

Аз ин таъриф натиҷа мебарорем, ки агар $\sqrt[n]{a}=b$ бошад, он гоҳ $b^n=a$ аст, яъне $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$ мебошад.

Масалан, $\sqrt[3]{-8}=-2$, чунки $(-2)^3=-8$ ва $\sqrt[4]{81}=3$ аст, чунки $3^4=81$ мебошад.

Адади -3 ҳам решаи дараҷаи чорум аз адади 81 мебошад, чунки $(-3)^4=81$, пас $\sqrt[4]{81}=\pm 3$ аст.

Мувофиқи таъриф решаи дараҷаи n – ум аз адади a ин ҳалли муодилаи $x^n=a$ мебошад. Миқдори решаҳои ин муодила аз n ва a вобастаанд.

I. Решаи нишондиҳандааш ҷуфт ду адади қимати ҳақиқии байни якдигар муқобилро дорад:

$$\sqrt{49}=\pm 7, \text{ чунки } (\pm 7)^2=49; \; \sqrt[4]{81}=\pm 3, \text{ чунки } (\pm 3)^4=81\text{аст.}$$

II. Адади тахти реша кадом аломате, ки дошта бошад, решаи нишондиҳандааш тоқ низ ҳамон аломатро дорад;

$$\sqrt[3]{64}=4, \text{ чунки } 4^3=64; \; \sqrt[5]{-32}=-5, \text{ чунки } (-2)^5=-32.$$

III. Решаи нишондиҳандааш ҷуфт аз адади манфӣ адади ҳақиқӣ нест;

Масалан, $\sqrt{-9}$ ба +3 ва -3 баробар нест, чунки $(\pm 3)^2=9$ аст.

Гуфтаҳои болоро ҷамъбаст карда ба хулосаи зерин меоем:

– аз адади мусбат як решаи дараҷаи тоқ вуҷуд дорад. Ин реша мусбат аст.

аз адади мусбат ду решаи дараҷаи ҷуфт вуҷуд дорад. ин решаҳо аз рӯи бузургии мутлақашон баробар буда, аз рӯи аломаташон муқобиланд.

– решаи дараҷаи ҷуфт аз адади манфӣ вуҷуд надорад.

– якто решаи дараҷаи тоқ аз адади манфӣ мавҷуд аст. Ин реша манфӣ мебошад.

Таърифи 2. Қимати ғайриманфии реша аз адади ғайриманфӣ қимати арифметикии реша ё решаи арифметкӣ номида мешавад.

Решаи арифметикиро дар назар дошта чунин навиштан лозим аст:

$$1)\ \sqrt{16}=4;\ 2)\ \sqrt[4]{81}=3;\ 3)\ \sqrt{(-\alpha)^2}=\begin{cases}-\alpha, \text{агар } \alpha \ge 0,\\ \alpha, \text{агар } \alpha<0,\end{cases}$$

$$4)\ \sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & \text{агар } \ x>0 \ \text{ бошад,}\\ -x, & \text{агар } \ x<0 \ \text{ бошад,}\\ 0, & \text{агар } \ x=0 \ \text{ бошад.}\end{cases}$$

Ба тарзи дигар $\sqrt{x^2}=|x|$ мебошад. Аммо навишти $\sqrt{x^2}=x$ хатост, чунки ҳангоми қиматҳои манфии x мо бо решаҳои манфӣ (ғайриарифметикӣ) дучор мешудем.

Мисолҳо:

$$1)\sqrt{(4-a)^2}=|4-a|=\begin{cases}4-a, & \text{агар} \quad a<4,\\ a-4, & \text{агар} \quad a>4,\\ 0, & \text{агар} \quad a=4.\end{cases}$$

$$2)\sqrt{\left(x^2+x+1\right)^2}=x^2+x+1.$$

Дар ин маврид аломати модулро навиштан шарт нест, чунки барои ҳамаи қиматҳои x, $x^2+4x+1>0$ аст.

?

1. Таърифи решаи дараҷаи n – умро диҳед.
2. Таърифи решаи арифметикиро диҳед.
3. Чаро решаи дараҷааш ҷуфт аз адади манфӣ вуҷуд надорад?
4. Чаро решаи дараҷаи тоқ аз адади манфӣ мавҷуд аст?

9. а) Ҳисоб кунед: $\sqrt[4]{-81};\sqrt[100]{-25};\sqrt[5]{-32};\sqrt[3]{-125}.$

б) Дуруст будани баробариро санҷед.

$\sqrt[10]{1}=1;\ \sqrt[9]{-1}=-1;\ \sqrt[3]{125}=5;\ \sqrt[10]{0}=0.$

в) Тарафи квадратеро ёбед, ки масоҳаташ ба масоҳати секунҷаи тарафҳояш 20 м ва 80 м буда, баробар аст.

г) Теғаи кубе, ки ҳаҷмаш ба 125 см^3, 8 м^3, 16 дм^3 баробар аст, ёфта шавад.

д) Аз реша набароварда муайян кунед, ки кадоме аз ададҳо калон аст:

$2\sqrt{3}$ ва $3\sqrt{2}.$

е) Амалҳоро иҷро кунед:

1) $a\sqrt{4a}\cdot\sqrt[4]{4a}\cdot a^2\cdot\sqrt[8]{3a^3};$ 2) $\sqrt[12]{a^5}:\sqrt[4]{a}.$

ж) Кадоме аз ин ададҳо калон аст:

$$\frac{\sqrt[15]{3^{10}}}{\sqrt[10]{3^8}} \text{ ё } \frac{\sqrt[4]{3^9}}{\sqrt[9]{3^2}}.$$

з) Радикалҳо ба намуди сода оварда шаванд:

$$1)\frac{x-y}{y}\sqrt{\frac{x^4y^3+x^3y^4}{x^2-2xy+y^2}};\ 2)\frac{a}{a-2b}\sqrt{\frac{a^3b-4a^2b^2+4ab}{a}};$$

$$3)\sqrt{1\frac{1}{8}}-8\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+\sqrt[3]{108}\cdot\sqrt{24{,}5}.$$

Машқҳо барои такрор

10. а) Ҳисоб кунед: $1)\ \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{9}{10}+\frac{15}{14}\right)$; $2)\ \frac{5}{7}\cdot\left(\frac{14}{15}-\frac{7}{45}\right)$.

б) Муодилаҳоро ҳал кунед: $1)\ \left(\frac{2\sqrt{3}}{x^2}\right)^{-3}=\left[\left(x\sqrt{x}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}$;

$$2)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{6}{5}}=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]^{\frac{6}{5}};\quad 3)\left(\frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{-\frac{4}{3}}=\left(\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}\right)^{\frac{6}{7}}.$$

11. Амалҳоро иҷро кунед:

$$1)\left[\left(1-\frac{2}{1-3a}\right)\left(1-\frac{9a-9a^2}{3a+1}\right)\right]:\left[2\left(1-9a^2\right)\right];$$

$$2)\ \frac{2}{a}-\left(\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}-\frac{2}{1-a}\right):\frac{a^3+a^2+2a}{a^2-1}.$$

12. Некрӯз ва Далер 203 дона чормағзро байни худ бо тарзи зерин тақсим карданд: чанд ҷуфте, ки Некрӯз гирифа бошад, Далер низ ҳамон қадар панҷтогӣ гирифт. Ба ҳар кадомашон чандтогӣ чормағз расидааст?

4. Табдилдиҳии айниятии ифодаҳои дараҷа ва решадошта

Табдилдиҳии айниятии ифодаҳои дараҷа ва решадошта ба натиҷаҳои зерин асос карда мешаванд, ки онҳо бевосита аз таърифи решаи дараҷаааш $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$ бармеоянд.

а) Агар нишондиҳандаи реша ва нишондиҳандаи дараҷаи адади таҳти решагиро ба як адад зарб (тақсим) кунем, бузургии реша тағйир намеёбад, яъне $\sqrt[n]{a}=\sqrt[np]{a^p}$ аст.

Масалан: $\sqrt[3]{8}=\sqrt[3\cdot2]{8^2}=\sqrt[6]{2^{3\cdot2}}=\sqrt[6]{2^6}=2.$

б) Барои аз ҳосили зарб баровардани реша, аз ҳар зарбшаванда, ки нишондиҳандааш ба нишондиҳандаи реша як хел аст, алоҳида реша бароварда, натиҷаҳои ҳосилшударо бо якдигар зарб кардан лозим аст.

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}.$$

Масалан: $1)\sqrt{900}=\sqrt{9\cdot100}=\sqrt{3^2\cdot10^2}=3\cdot10=30;$

$2)\sqrt{16\cdot121}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{121}=4\cdot11=44;$

$3)\sqrt[3]{-125\cdot27}=\sqrt[3]{-125}\cdot\sqrt[3]{27}=-5\cdot3=-15.$

в) Барои ба якдигар зарб кардани решаҳои нишондиҳандаашон якхела, ифодаҳои таҳти решаҳоро ба якдигар зарб карда, аз ҳосили зарб реша баровардан лозим аст.

Масалан: $1)\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}=\sqrt{100}=10;\;\; 2)\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{a^3}=a.$

г) Барои ба якдигар зарб кардани решаҳои нишондиҳандаашон гуногун аввал онҳоро ба нишондиҳандаи умумӣ оварда, баъд чун решаҳои нишондиҳандаашон якхела ба якдигар зарб кардан лозим аст.

Масалан, фарз мекунем, ки $\sqrt[n]{a}$ ва $\sqrt[m]{b}$ - ро ба якдигар зарб задан лозим бошад: $\sqrt[n]{a}=\sqrt[am]{m^m};\; \sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{b^n}$.

Аз ин ҷо, $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{a^m}\cdot\sqrt[mn]{b^n}=\sqrt[nm]{a^m b^n}$ аст.

Масалан:

$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{9^2}=\sqrt[6]{3^3\cdot 9^2}=\sqrt[6]{3^3\cdot 3^4}=\sqrt[6]{3^7}=3\sqrt[6]{3}$ мебошад.

Ба сифати нишондиҳандаи умумии решаҳои $\sqrt[n]{a}$ ва $\sqrt[m]{b}$ хурдтарин каратнокии умумии ададҳои n ва m – ро интихоб кардан беҳтар аст.

Масалан, агар ба якдигар зарб кардани $\sqrt[4]{2}$ ва $\sqrt[6]{32}$ лозим бошад, адади 12 – ро, ки хурдтарин каратнокии умумии ададҳои 4 ва 6 аст, чун нишондиҳандаи умумии ин решаҳо қабул кардан қулай мебошад:

$$\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2^3},\;\; \sqrt[6]{32}=\sqrt[12]{32^2}=\sqrt[12]{2^{10}}.$$

Бинобар ин $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{32}=\sqrt[12]{2^3}\cdot\sqrt[12]{2^{10}}=\sqrt[12]{2^{13}}=2\sqrt[12]{2}$ мебошад.

д) Барои аз каср (ҳосили тақсим) реша баровардан аз сурат ва махраҷ бо ҳамон дараҷа алоҳида реша баровარда, натиҷаи якумро ба дуюм тақсим кардан мумкин аст: $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Масалан, $1)\sqrt{\dfrac{36}{49}}=\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}}=\dfrac{6}{7};\;\;\; 2)\sqrt[3]{-\dfrac{64}{23}}=\dfrac{\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[3]{27}}=-\dfrac{4}{3}=-1\dfrac{1}{3}$ аст.

Натиҷа. Айнияти $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ - ро аз рост ба чап хонда, қоидаи зерини тақсими решаҳои нишондиҳандаҳояшон якхеларо ҳосил мекунем: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Барои тақсим кардани решаҳои нишондиҳандаашон якхела ифодаҳои решагиро бетағйир гузоштан кифоя аст.

Масалан, $\dfrac{\sqrt{126}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\dfrac{126}{14}}=\sqrt{9}=3.$

Барои ба дараҷа бардоштани реша нишондиҳандаи решаро тағйир надода адади таҳти решаро ба ҳамон дараҷа бардоштан лозим аст:

Масалан, $1)\left(\sqrt{2}\right)^4=\sqrt{2^4}=\sqrt{16}=4;\quad 2)\left(\sqrt[3]{9}\right)^2=\sqrt[3]{9^2}=\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{27\cdot 3}=3\sqrt[3]{3}.$

Барои аз дараҷа баровардани реша, нишондиҳандаи дараҷаи адади таҳти решаро ба нишондиҳандаи реша (агар бутун тақсим шавад) тақсим кардан лозим аст: $\sqrt[n]{a^m}=a^{n:m}$

Масалан, $1)\sqrt{x^4}=x^2;\ 2)\sqrt[4]{81a^{12}b^8}=\sqrt[4]{3^4a^{12}b^8}=3a^3b^2;$

$3)\sqrt[3]{5^6}=5^2=25;\ 4)\sqrt[4]{3^{12}}=3^3=27.$

Барои аз реша баровардани реша, нишондиҳандаи ин решаҳоро ба якдигар зарб зада ифодаи таҳти решагиро бетағйир гузоштан кифоя аст.

Яъне $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}\qquad (a>0).$

Масалан, $1)\sqrt{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[6]{4};\ 2)\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[15]{2}.$

?

1. Қоидаҳои аз дараҷа баровардани реша, ба дараҷа бардоштани реша, аз реша баровардани решаро баён намоед.
2. Решаҳои нишондиҳандаҳояшон гуногунро чи гуна зарб мекунанд?
3. Дар мисол нишон диҳед, ки нишондиҳандаи реша ва нишондиҳандаи адади таҳти решагиро ба зарбкунандаи умумии онҳо тақсим кардан мумкин аст ё не?

13. Амалҳоро иҷро кунед: (№:13-14)

$$1)\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{4\cdot 5};\ 2)\ \sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x^2};\ 3)4{,}8\sqrt{ab}:12\sqrt{\frac{1}{ab}};$$

$$4)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right);\ 5)\left(a+a^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(a-a^{\frac{1}{2}+1}\right);$$

$$6)\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right);\ 7)\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)^2;$$

$$8)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)^2;\ 9)\left(2\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2;\ 10)\left(\frac{2}{3}\sqrt{18}+\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2;$$

$$11)\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}-\frac{2x\sqrt{x^2-y^2}}{y^2\left(xy^{-1}+1\right)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1-yx^{-1}}{1+yx^{-1}}};$$

$$12)\left\{\left[\left(\frac{2\sqrt[4]{xy}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}+1\right]:\frac{4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+2+2\sqrt{xy}}\right\}^{\frac{1}{2}};\ 13)\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2}+1}.$$

14. $1)\left(x\sqrt[6]{a^5x}+2a\sqrt[6]{ax^5}-3ax\right):\left(\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt{ax}\right);$

$2)\left(2a\sqrt[3]{ax^2}-a\sqrt[6]{ax^5}-ax\right):\left(\sqrt[3]{a^2x}-\sqrt{ax}\right).$

Машқҳо барои такрор

15. а) Ҳисоб кунед:

$$1)\frac{5}{4-\sqrt{11}}+\frac{1}{3+\sqrt{7}}-\frac{6}{\sqrt{7}-2}-\frac{\sqrt{7}-5}{2};$$

$$2)\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}};$$

$$3)\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+1}{5-1};\ 4)\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};$$

$$5)\frac{1}{a+a\sqrt{b}}-\frac{1}{a-a\sqrt{b}};\ 6)\frac{1}{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{1}{a-\sqrt{a^2-b^2}};$$

$$7)\sqrt[3]{a\sqrt{a}};\ 8)\sqrt[3]{0{,}25}\cdot\sqrt[6]{50}.$$

б) Муодилаҳоро ҳал кунед:

$$1)\frac{2}{a+2x}-\frac{2}{a-2x}-\frac{4x^2-4a-a^2}{4x^2-a^2}=0;$$

$$2)(x-7)(x-4)(x+3)(x+1)=96-(x-1)(x+3)(x+4)(x+7).$$

§2. Муодилаҳои ирратсионалӣ

5. Дараҷаи нишондиҳандааш ирратсионалӣ

Дар §1 мафҳумҳои дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалии дилхоҳро омӯхта будем. Масалан, $a^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{a^5}$; $a^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$; $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

дар ин ҷо $a > 0$ ва $a \neq 1$. Ҳоло мавриди аз адади иррационалӣ иборат будани нишондиҳандаи дараҷаро меомӯзем, ки он **бо рамзи** a^{α} **(**α **- адади иррационалӣ,** $a > 0;$ $\alpha \neq 1$**) ишорат карда мешавад**. Ин масъаларо дар намуди умумӣ дида набаромада, аввал маънои ин рамзро дар мисоли $2^{\sqrt{2}}$ шарҳ медиҳем.

Ба адади иррационалии $\sqrt{2}$ бо пайдарпайии ададҳои ратсионалии зерин:

$$1; 1,4; 1,41; 1,414, \ldots\ldots \quad (1)$$

ё ки

$$2; 1,5; 1,42; 1,415, \ldots\ldots \quad (2)$$

наздик шудан мумкин аст.
Пайдарпайии якум монотонӣ, афзуншаванда буда, аъзоҳои он қиматҳои тақрибии решаи квадратӣ аз ду бо барзиёдӣ гирифташуда мебошад, ки дар ин ҷо вобаста ба зиёд шудани рақами тақрибии аъзоҳои пайдарпаӣ, аъзоҳои он ҳам саҳеҳ наздик мешаванд.

Ду пайдарпаии навро тартиб медиҳем:

$$2^1; 2^{1,4}; 2^{1,41}; 2^{1,414} \ldots\ldots \quad (1^1); \qquad 2^2; 2^{1,5}; 2^{1,42}; 2^{1,415} \ldots\ldots (2^1)$$

Аз ин ду пайдарпаи якумаш монотон, афзуншаванда буда, дуюмаш монотон, камшаванда аст.

Бо беҳад афзудани рақами тартибии аъзоҳои пайдарпаӣ, ҳар ду пайдарпаӣ ҳам ба як адад майл мекунанд.

Ин адади умумиро (мувофиқи таъриф) ба сифати адади $2^{\sqrt{2}}$ қабул мекунанд.

Эзоҳ. Амалҳо бо дараҷаҳои нишондиҳандааш иррационалӣ айнан аз рӯи қоидаҳое, ки барои дараҷаҳои нишондиҳандааш ратсионалӣ баён карда будем, иҷро карда мешаванд. Масалан, $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$, $a^{\alpha} : a^{\beta} = a^{\alpha-\beta}$ (α, β ададҳои иррационалӣ).

16. Ифодаҳои зеринро ба дараҷа бардоред:

$$1)\left(\sqrt[n]{ab}\right)^{2n};\ 2)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2;\ 3)\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)^2;$$

$$4)\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2.$$

17. Махраҷро аз радикал озод намоед:

$$1)\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}; \qquad 2)\frac{10}{3\sqrt{5}}; \qquad 3)\frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

18. Ифодаҳоро содда кунед:

$$1)\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}-\frac{2x\sqrt{x^2-y^2}}{y^2\left(xy^{-1}+1\right)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1-yx^{-1}}{1+yx^{-1}}};\quad 2)\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2}+1}.$$

Машқҳо барои такрор

19. Ҳосили зарби ду адад 135 буда, фарқи ин ададҳо 6 аст. Ададҳоро ёбед.

20. Амалҳоро иҷро кунед: $1)4a^{-3}b^2c^{-1}\cdot 0{,}25a^4b^{-5}c^{-2}$;

$2)\left(4a^{-2}-b^{-4}\right):\left(2a^2-a\right)$;

$$3)\left(\sqrt{a}+\frac{ab^2+c}{\sqrt{ab^2+c}}\right):\left(b\sqrt{a}+b\sqrt{ab^2+c}\right).$$

6. Муодилаҳои ирратсионалӣ

Таъриф: Муодилаҳое, ки номаълум дар таҳти аломати радикал (реша) аст, муодилаҳои ирратсионалӣ номида мешаванд.

Масалан, муодилаҳои зерин муодилаҳои ирратсионалианд:

$$\sqrt{x}=7,\ \sqrt{x-1}+2x=23,\sqrt[3]{2-x}=\sqrt[4]{x+6}+7x.$$

Пеш аз он, ки ҳалли муодилаҳои ирратсионалиро дида бароем, ду теоремаро дар бораи баробарқуввагии муодилаҳо бе исбот хотиррасон мекунем:

Ду муодила баробарқувва номида мешавад, агар онҳо решаҳои якхела дошта бошанд.

Теоремаи 1. Агар ба ҳар ду қисми муодила ягон адад, ё ки ягон бисёраъзогиро ҷамъ кунем, он гоҳ муодилаи нави ҳосилшуда ба муодилаи аввала баробарқувва аст.

Теоремаи 2. Агар ҳар ду тарафи муодиларо ба ягон адади $a\neq 0$ зарб кунем, он гоҳ муодилаи нави ҳосилшуда ба муодилаи аввала баробарқувва мешавад.

Муодилаҳои ирратсионалиро асосан бо ду усул ҳал мекунанд:

а). Ҳар ду қисми муодиларо ба ҳамон як дараҷа мебардоранд;

б). Усули дохил намудани тағйирёбандаи нав.

в). Усули ба ҳамон як дараҷа бардоштани муодила дар аксар мавридҳо, ҳангоми як ё якчанд маротиба ба дараҷа бардоштани ҳар ду қисми муодилаи ирратсионалӣ, онро ба муодилаи алгебравии ин ё он дараҷа овардан мумкин аст.

Азбаски дар вақти ба дараҷа бардоштани муодила решаҳои бегона пайдо мешаванд, бинобар ин муодилаи алгебравии ҳосилшударо, ки он аз муодилаи ирратсионалӣ бар меояд, ҳал намудан, бояд решаҳои ёфташударо бо методи гузориш ба муодилаи додашуда гузошта санҷем ва ҳамонашро ба сифати ҷавоб қабул менамоем, ки он муодиларо қаноат кунонад ва решаҳои бегонаро мепартоем.

Акнун ҳар ду усули асосии ҳалли муодилаҳои ирратсионалиро дар мисолҳо дида мебароем.

Мисоли 1. Муодилаи ирратсионалиро ҳал намуда, решаҳои ҳосилшударо месанҷем:

$$16-\sqrt{\frac{2}{3}x}=12.$$

Ҳал. Муодила фақат як радикалро дар бар мегирад, бинобар ин онро дар тарафи чап гузошта, 16 – ро ба тарафи рост бо аломати муқобилаш гузаронида, ҳар ду тарафро ба квадрат бардошта ҳосил мекунем:

$$-\sqrt{\frac{2}{3}x}=12-16, \left(-\sqrt{\frac{2}{3}x}\right)^2=(-4)^2, \ \frac{2}{3}x=16, x=\frac{48}{2}=24.$$

Санҷиш. Дар муодилаи додашуда ба ҷои x решаи ҳосилшуда адади 24 – ро гузошта ҳисоб мекунем:

$$16-\sqrt{\frac{2}{3}\cdot 24}=16-\sqrt{16}=16-4=12.$$

Ҷавоб: $x=24.$

Мисоли 2. Муодилаи зеринро ҳал мекунем:

$$\sqrt{25-x^2}=7-x.$$

Ҳал. Айнан ба монанди мисоли 1 ҳал мекунем:

$$\left(\sqrt{25-x^2}\right)=(7-x)^2$$

$$25-x^2=49-14x+x^2, \ 2x^2-14x+24=0$$

ё $x^2-7x+12=0.$

Муодилаи квадратии ҳосилшударо ҳал намуда меёбем:

$$x_{1,2}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-12}=\frac{7}{2}\pm\frac{1}{2}; \ x_1=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=4, \ x_2=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=3.$$

Санҷиш. Аввал қимати решаи якум ва баъд қимати решаи дуюмро дар муодилаи додашуда гузошта ҳосил мекунем:

$$4+\sqrt{25-4^2}=4+\sqrt{25-16}=4+\sqrt{9}=4+3=7,$$

$$3+\sqrt{25-3^2}=4+\sqrt{25-9}=3+\sqrt{16}=3+4=7.$$

Санҷиш нишон медиҳад, ки ҳам решаи якум $x_1 = 4$ ва ҳам решаи дуюм $x_2 = 3$ муодилаи додашударо қаноат мекунад.

Ҷавоб: $x_1 = 4,\ x_2 = 3.$

Мисоли 3. Муодилаи ирратсионалиро ҳал намуда решаҳои ҳосилшударо месанҷем: $\sqrt{16+\sqrt{x+4}} = 5.$

Ҳал. Ҳарду қисми муодиларо (баробариро) ба квадрат бардошта ҳосил мекунем: $\left(\sqrt{16+\sqrt{x+4}}\right)^2 = 5^2,\ 16+\sqrt{x+4} = 25.$

Аъзои дорои решаро дар тарафи чап гузошта, адади 16 – ро ба тарафи рост бо аломати муқобилаш мегузорем: $\left(\sqrt{x+4}\right)^2 = 9^2, \left[(x+4)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = 81,$ $(x+4)^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 81,\ x+4 = 81,$ $x = 81-4,\ x = 77.$

Санҷиш. Дар муодилаи додашуда ба ҷои x – решаи ёфташуда, адади 77 – ро гузошта ҳисоб мекунем:

$$\sqrt{16+\sqrt{77+4}} = \sqrt{16+\sqrt{81}} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

Санҷиш нишон дод, ки решаи ёфташуда муодилаи додашударо қаноат мекунад.

Ҷавоб: x=77.

Мисоли 4. Муодилаи ирратсионалии зеринро ҳал намуда, решаҳои ҳосилшударо месанҷем: $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-11}.$

Ҳал. Ҳарду қисми муодилаи додашударо ба квадрат бардошта, аъзоҳои монандро ислоҳ мекунем:

$$\left(\sqrt{2x+6} - \sqrt{x-1}\right)^2 = \left(\sqrt{3x-11}\right)^2,$$

$$2x+6-2\sqrt{(2x+6)(x-1)}+x-1 = 3x-11,$$

$$3x+5-2\sqrt{(2x+6)(x-1)} = 3x-11,\ -2\sqrt{(2x+6)(x-1)} = -16.$$

Ҳарду қисми муодилаи ҳосилшударо ба -2 тақсим мекунем $\sqrt{(2x+6)(x-1)} = 8$.

Боз ҳар ду тарафро ба квадрат бардошта, қавсҳои тарафи чапро кушода, ҳосил мекунем:

$$(2x+6)(x-1) = 64,\ x^2-2x+4x-64 = 6,\quad x^2+4x-70 = 0.$$

Ҳар ду тарафи муодилаи ҳосилшударо ба ду тақсим намуда, баъд онро ҳал мекунем:

$$x^2+2x-35=0,\ x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+36}=-1\pm\sqrt{36}=-1\pm 6.$$

$$x_1=-1+6=5,\quad x_2=-1-6=-7.$$

Санҷиш. Аввал решаи якум $x_1=5$ ва баъд аз он решаи дуюм $x_2=-7$ - ро дар муодилаи додашуда гузошта ҳисоб мекунем:

$$\sqrt{2\cdot 5+6}-\sqrt{5-1}-\sqrt{3\cdot 5-11}=\sqrt{16}-\sqrt{4}-\sqrt{4}=4-2-2=0,$$

$$\sqrt{2\cdot(-7)+6}-\sqrt{-7-1}-\sqrt{3\cdot(-7)-11}=\sqrt{-8}-\sqrt{-3}\sqrt{-33}\neq 0$$

Ҳамин тариқ, $x_1=5$ решаи муодила буда онро қаноат мекунад, аммо $x_2=-7$ муодиларо қаноат намекунад ва бинобар ин он партофта мешавад.

Ҷавоб: $x=5$

?	**1.** Таърифи муодилаи ирратсионалиро диҳед. **2.** Ду муодиларо дар кадом вақт баробарқувва меноманд? **3.** Муодилаи ирратсионалиро асосан бо кадом усулҳо ҳал мекунанд?

21. Муодилаҳои ирратсионалиро ҳал намуда, решаҳои ҳосилшударо санҷед:

а) $x=\sqrt{2-x}$; б) $x-1=\sqrt{x+5}$; в) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10}=3$;

г) $x+\sqrt{25-x^2}=7$; д) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-4}=5$; е) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$; ж) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+2}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{3x}$; з) $3+5\sqrt{x}=13$; и) $11-3\sqrt{x}=5$; к) $\sqrt{5+\sqrt{3+x}}=3$.

Машқҳо барои такрор

22. Амали зарбро иҷро кунед:

1) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$; 2) $\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)$; 3) $\frac{2}{7}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$.

23. Аз ду қатора яке масофаи байни ду истгоҳро дар $4\frac{1}{2}$ соат, дигаре дар 5 соат тай мекунад. Якум нисбат ба дуюм дар ҳар соат 3 км роҳ зиёд мегардад. Масофаи байни ҳарду истгоҳ ва миқдори километрҳое, ки ҳар як қатора дар 1 соат тай мекунад, ҳисоб карда шавад.

24. Муодиларо ҳал кунед: $x+\frac{6x}{x-2a}=\frac{2a}{x-2a}$.

2). ***Усули дохил намудани тағйирёбандаҳои нав***

Муодилаҳои зеринро бо усули дохил намудани тағйирёбандаҳои нав, яъне бо усули гузориш ҳал намудан қулай аст.

Мисоли 1. $2\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}=3.$

Ҳал. $\sqrt[4]{x-1}=u,$ он гоҳ $x-1=u^4$ ва муодилаи додашуда намуди зайлро мегирад.

$$2\sqrt{u^4}+u-3=0,\ 2u^2+u-3=0,\ D=1^2-4\cdot 2\cdot(-3)=25,$$

$$u_1=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\cdot 2}=\frac{-1+5}{4}=\frac{4}{4}=1, \text{ ва } u_2=-\frac{3}{2}.$$

Акнун қиматҳои u_1 ва u_2 - ро дар $x-1=u^4$ гузошта мувофиқан решаҳои x_1 ва x_2 - ро меёбем:

$$x_1-1=1,\ x_1=2;\ x_2-1=\left(-\frac{3}{2}\right)^4. \text{ Аз ин ҷо } x_2-1=\frac{81}{16} \text{ ва } x_2=\frac{97}{16}.$$

Санҷиш: Қимати решаи якум $x_1=2$ - ро дар муодилаи додашуда гузошта ҳисоб мекунем: $2\sqrt{2-1}+\sqrt[4]{2-1}=2+1=3.$

Аз ин ҷо мебарояд, ки решаи ёфташудаи $x_1=2$ муодиларо қаноат мекунад. Акнун $x_2=\dfrac{97}{16}$ - ро месанҷем.

$$2\sqrt{\frac{97}{16}-1}+\sqrt[4]{\frac{97}{16}-1}=2\sqrt{\frac{97-16}{16}}+\sqrt[4]{\frac{97-16}{16}}=2\sqrt{\frac{81}{16}}+\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=$$

$$=2\cdot\frac{9}{4}+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=6\neq 3$$

Ҳамин тариқ, x_2 муодилаи додашударо қаноат намекунонад.

Ҷавоб: $x=2.$

Мисоли 2. $\sqrt[4]{x-5}=30-\sqrt{x-5}\,.$

Ҳал. $x-5=u^4$. Он гоҳ

$$\sqrt[4]{u^4}=30-\sqrt{u^4},\quad u=30-u^2 \quad \text{ё} \quad u^2+u-30=0.$$

Муодилаи квадратии ҳосилшударо нисбат ба *u* ҳал мекунем.

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30) = 1 + 120 = 121, \quad u_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{11}{2},$$

$u_1 = 5,\ u_2 = -6.$

Дар гузориши $x - 5 = u^4$ аввал қимати u_1 ва баъд қимати u_2 -ро гузошта мувофиқан қиматҳои x_1 *ва* x_2 -ро меёбем:

$x_1 - 5 = 5^4$, аз ин ҷо $x_1 = 625 + 5 = 630$; $x_2 - 5 = (-6)^4$ аз ин ҷо $x_2 = 46656 + 5 = 46661.$

Санҷиш. Бо роҳи дар муодилаи додашуда гузоштани қимати решаҳои ёфташуда боварӣ ҳосил менамоем, ки ададҳои 630 ва 46661 муодиларо қаноат мекунад ё не?

$\sqrt[4]{630 - 5} = \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$ (қисми чапи муодила)

$30 = \sqrt{630 - 5} = 30 - \sqrt{625} = 30 - 25 = 5$ (қисми рости муодила).

Бо ҳамин боварӣ ҳосил намудем, ки $x_1 = 630$ решаи муодилаи додашуда мебошад.

Айнан ҳамин тавр решаи дуюмро месанҷем:

$$\sqrt[4]{46661 - 5} = \sqrt[4]{46656} = \sqrt[4]{6^4} = 6,$$

$$30 = \sqrt{46661 - 5} = 30 - \sqrt{46656} = 30 - 216 = -186 \neq 6.$$

Решаи дуюм муодиларо қаноат намекунад.

Ҷавоб: x=630.

Мисоли 3. $\sqrt[3]{3x+1} - \sqrt{3x+1} = 0.$

Ҳал. Аз гузориши $3x + 1 = u^6$ истифода бурда, муодилаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\sqrt[3]{u^6} - \sqrt{u^6} = 0,$$

аз ин ҷо $u^2 - u^3 = 0$ ва $u^2(u - 1) = 0;$ $u_{1,2} = 0;$ $u_3 = 1.$

Акнун дар гузориши $3x + 1 = u^6$ қимати u=*0*-ро гузошта ҳосил мекунем:

$$3x + 1 = 0 \text{ аз ин ҷо } 3x = -1 \text{ ва } x = -\frac{1}{3}.$$

Ҳангоми u=1 будан $3x + 1 = 1$ ва $x = 0$ мешавад.

Санҷиш. Дар муодилаи додашуда ба ҷои x қимати решаи якум $x = -\frac{1}{3}$ -ро гузошта меёбем:

$$\sqrt[3]{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1}-\sqrt{3\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)+1}=\sqrt[3]{-1+1}-\sqrt{-1+1}=0.$$

Решаи якум муодилаи додашударо қаноат мекунонад. Айнан бо ҳамин тарз решаи дуюм $x=0$ -ро месанҷем:

$$\sqrt[3]{3\cdot 0+1}-\sqrt{3\cdot 0+1}=\sqrt[3]{1}-\sqrt{1}=0.$$

Ҳамин тариқ, ҳам решаи якум ва ҳам решаи дуюм муодиларо қаноат мекунонанд.

Ҷавоб: $x_1=x_2=-\dfrac{1}{3};\quad x_3=0$

> **?**
> **1.** Намудҳои муодилаи ирратсионалиро нависед.
> **2.** Зинаҳои тарзи гузоришро баён кунед.
> **3.** Кадом тарзҳои ҳалли муодилаҳои ирратсионалиро медонед?

25. Муодилаҳои ирратсионалии зеринро бо усули дохил намудани тағйирёбандаи нав ҳал намоед.

$$а)\sqrt{5+\sqrt[3]{x+3}}=3;\qquad б)\sqrt[4]{x-5}=30-\sqrt{x-1};$$

$$в)\sqrt[3]{x-2}+2=x;\qquad г)\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-2=0.$$

Машқҳо барои такрор

26. Сумаи ду касри байни якдигар чаппа ба $2\dfrac{1}{6}$ ва фарқашон ба $\dfrac{5}{6}$ баробар аст. Ин касрҳоро ёбед.

27. Амалҳоро иҷро кунед:

$$1)\sqrt[4]{25^6};\ 2)\sqrt[3]{(-2)^{16}};\ 3)a^{\frac{2}{3}}:\sqrt[6]{a};\ 4)\left(a^{0,1}\right)^5.$$

28. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$1)\begin{cases}10x+3y=13,\\ xy=-1;\end{cases}\quad 2)\begin{cases}5x+2y=22,\\ xy=-4;\end{cases}\quad 3)\begin{cases}2x+2y=12\sqrt{2},\\ xy=1;\end{cases}$$

7. *Системаи муодилаҳои ирратсионалӣ*

Пеш аз ҳалли системаи муодилаҳои ирратсионалӣ баъзе маълумотҳоро хотиррасон менамоем.

1) Агар масъалаи ёфтани маҷмӯи ҳалли ду ва ё зиёда аз ду муодила гузошта шуда бошад, он гоҳ мегӯянд, ки системаи муодилаҳоро ҳал кардан лозим аст.

2) Шумораи тағйирёбандаҳо метавонад ба шумораи муодилаҳо баробар бошад ва метавонад баробар набошад.

3) Системаро ҳамҷоя меноманд, агар он ақалан як ҳал дошта бошад ва ғайри ҳамҷоя меноманд, агар ягон ҳал надошта бошад.

4) Системаро ҳал кардан, ин ёфтани ҳамаи ҳалҳои он мебошад.

5) Системаро муайян меноманд, агар он ҳалҳои шумораашон охирнок дошта бошад.

6) Ду система баробарқувва номида мешаванд, агар онҳо маҷмӯи ҳалҳои якхела дошта бошанд.

Мисоли 1. Системаи муодилаҳои ирратсионали зеринро ҳал менамоем:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ x + y - \sqrt{xy} = 3. \end{cases}$$

Ҳал. Муодилаи дуюми системаро табдил медиҳем:

$$x + y - \sqrt{xy = 3}, \quad x + y + 2\sqrt{xy} - 3\sqrt{xy} = 3, \quad \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 - 3\sqrt{xy} = 3$$

Аммо $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$. Бинобар ин, $9 - 3\sqrt{xy} = 3$ ё $\sqrt{xy} = 2$ мебошад. Ҳамин тавр системаи ба системаи додашуда баробарқувваро ҳосил мекунем: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{xy} = 2. \end{cases}$

Барои ҳалли ин система аз теоремаи Виет истифода мебарем. Муодилаи квадратие тартиб медиҳем, ки решаҳои он ба $\sqrt{x}$ ва $\sqrt{y}$ баробар бошад:

$m^2 - 3m + 2 = 0,\ m_1 = 2$ ва $m_2 = 1$ ё $\sqrt{x} = 2,\ x = 4,$ $y_1 = 1;\ \sqrt{x} = 1,\ x = 1,\ y = 4.$

Ҷавоб: (4;1), (1;4).

Мисоли 2. Системаи муодилаҳои ирратсионалии зеринро ҳал менамоем: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} + 3\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = 4, \\ x^2 + 4x + y^2 - 3y = 0. \end{cases}$

Гузориши $\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = t,\ \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = \dfrac{1}{t}$ - ро истифода бурда ҳосил мекунем: $t + \dfrac{3}{t} = 4,\ t^2 + 4t - 3 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 3.$

Системаи додашударо ба системаи муодилаҳои зерин ҷудо мекунем:

$$1)\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=1,\\ x^2+4x+y^2-3y=0,\end{cases}\qquad 2)\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=3,\\ x^2+4x+y^2-3y=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=0\\ x^2+4x+y^2-3y=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}y=\dfrac{4}{5}x,\\ x^2+4x+y^2-3y=0.\end{cases}$$

$$x_1=0,\ \ y_1=0;\ x_2=-4,\ y_2=0;\ x_3=-\frac{40}{41},\ y_3=-\frac{32}{41};\ (0;0)$$

ҳалли бегона мебошад.

Ҷавоб: $(-4;0),\left(-\dfrac{40}{41};\dfrac{32}{41}\right).$

?	**1.** Системаро ҳал кардан чӣ маъно дорад? **2.** Системаро дар кадом ҳолат якҷинса меноманд? **3.** Чӣ гуна системаро муайян меноманд?

29. Системаи муодилаҳои ирратсионалиро ҳал кунед:

$$1)\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6,\\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^3}=8.\end{cases}\quad 2)\begin{cases}\dfrac{7}{\sqrt{x-7}}-\dfrac{4}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{5}{3},\\ \dfrac{5}{\sqrt{x-7}}+\dfrac{3}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{13}{3}.\end{cases}\quad 3)\begin{cases}\sqrt{y}=\dfrac{1}{\sqrt{x}},\\ y=\dfrac{-1}{4}x+1.\end{cases}$$

$$4)\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2,\\ xy=27.\end{cases}\quad 5)\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{xy},\\ x+y=20.\end{cases}\quad 6)\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=2{,}5\\ x+y=10,\end{cases}$$

$$7)\begin{cases}x+y-\sqrt{xy}=7,\\ x^2+y^2+xy=133\end{cases}\quad 8)\begin{cases}x+y=a\sqrt{xy},\\ x-y=b\sqrt{\dfrac{x}{y}},\end{cases}\quad 9)\begin{cases}x+y=72,\\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6,\end{cases}$$

$$10)\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1,\\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{y^3x}=78,\end{cases}\quad 11)\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=a(a>0),\\ \sqrt{xy}=b,\end{cases}\quad 12)\begin{cases}\sqrt{x+3y+1}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6.\end{cases}$$

Машқҳо барои такрор

30. Аъзои панҷуми прогрессияи геометрии (c_n) – ро ёбед, ки дар он

$$c = 3\sqrt{3}; \quad q = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ бошад.

31. Амалҳоро иҷро кунед:

$$1)\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right):\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right);\quad 2)\left(\frac{3}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right):\left(\frac{3}{\sqrt{1-x}}+1\right);$$

$$3)\left(\sqrt{a}+\frac{ab^2+c}{\sqrt{ab^2+c}}\right):\left(b\sqrt{a}+b\sqrt{ab^2+c}\right);\quad 4)\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.$$

Маълумоти таърихӣ

Ҳанӯз аз замонҳои қадим ба амали бадараҷабардорию азрешабарорӣ, махсусан ба дараҷаю решаи квадратӣ ва кубӣ, марoқ зоҳир карда буданд. Дар Бобулистони қадим шаклҳои ҳамворе ёфт шуда буданд, ки дар рӯи онҳо ҷадвалҳои ба квадрат ва куб бардоштани ададҳо навишта шуда буд.

Аз тарафи олимони Юнони қадим мавҷудияти порчае, ки дарозиаш ба адади бутун ва каср ченнашаванда аст, муайян карда шуда буд.

Евклид дар асари машҳури худ «Ибтидо» ки аз 13 китоб иборат буд, нишон додааст, ки агар нисбати масоҳати ду квадрат аз нисбати квадратӣ ду адади натуралӣ фарқ кунад, он гоҳ нисбати тарафҳои ин квадратро ба воситаи адади ратсионалӣ ифода кардан мумкин нест. Юнониҳо дар он давра фақат ададҳои ратсионалиро медонистанду халос. Аз ин ҷост, ки дар «Ибтидо» ададҳои ирратсионалӣ фақат бо тарзи геометрӣ шарҳ дода шудаанд.

Дар омӯзиши радикалҳо хизматҳои олимони Ҳиндустон бузург аст. Масалан дар китоби Бахаскари (XII то эраи нав) табдилдиҳиҳои зерин дида мешавад:

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$

Тарзҳои навишти дараҷа ва реша оҳиста – оҳиста дигаргун мешуданд. Масалан, дар дастнависи математики франсавӣ Шюке (1484) нишондиҳандаи дараҷа ин тавр навишта шудааст: - Зарби 8^3 ва 7^{-1} нишон медиҳад, ки $8x^3 \cdot 7x^{-1} = 56x^2$ аст. Математики франсавии дигар Эригон дар «Курси математика» (1643) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^4$ - ро ин тавр ишора мекунад: a^9.

Аввалин маротиба математик ва файласуфи машҳури франсавӣ Декарт дар асари «Геометрия» (1637) дараҷаро бо нишондиҳандаи натуралӣ бо тарзе, ки мо имрӯз истифода мебарем ишора кардааст (ба ҷои a^2 Декарт $a \cdot a$ навиштааст).

Баъзе нишондиҳандаҳои касриро математики франсавӣ Орем (1323-1382) истифода кардааст. Баъдтар математики голландӣ Стевин (1548-1620) низ нишондиҳандаи касриро истифода кардааст. Аммо ба таври системавӣ математики бузурги англис Нютон дараҷа бо нишондиҳандаи касриро истифода бурда тарзи ҳозиразамони навиштро додааст.

Дар баъзе дастнависҳо радикалро ба намуди нуқта истифода кардаанд. Дар яке аз дастнависҳои алгебра (1480) бо забони лотинӣ як нуқтае, ки пеш аз адад гузошта шудааст решаи квадратӣ аз ин ададро, ду нуқтаи пеш аз адад гузошташуда решаи дараҷаи чор аз адад ва се нуқтаи решаи дараҷаи се аз адади додашударо мефаҳмонид.

Математики олмонӣ Рудолф дар китоби алгебра (1525) ишораҳои зеринро истифода мебарад: - Дар болои нуқта штрих мегузорад, решаи квадратӣ □1, решаи кубӣ □-□-□-□1, решаи дараҷаи чор, □□1. Стевин ишораҳои радикалро интавр истифода бурдааст: - Ин ишораҳо мувофиқан $\sqrt{2}, \sqrt[3]{\ }, \sqrt[4]{\ }$ - ро ифода мекунад. Декарт ба ҷои $\sqrt[3]{c+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ ишораи зеринро истифода кардааст: $\sqrt{c+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, ки дар ин ҷо *c* калимаи кӯтоҳкардашудаи лотинӣ **cubicus** кубро мефаҳмонад. Ниҳоят, математики франсавӣ Рол дар «Нишондоди алгебра» (1690) ишораи ҳозиразамонро истифода кардааст.

Машқҳои иловагӣ ба боби I

32. Муодилаҳоро ҳал кунед:

$$1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0;\quad 2)(9-x):(7+x)+(7-x)(9+x)=76;$$

$$3)\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}=3\frac{1}{3};\qquad 4)\frac{x-2}{3x+14}=\frac{3(8-x)}{28-x}.$$

33. Амалҳоро иҷро кунед:

$$\frac{a^{-1}b^{-1}+a^{-1}b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}+a^3\left(a^2-2ab+b^2\right)^{-2}.$$

34. Ифодаҳоро содда намуда қимати ададии онро, ҳангоми $x=3;\ y=0;\ n=1$ будан ҳисоб кунед:

$$\left(1+\frac{x^{-n}+y^{-n}}{x^{-n}+y^{-n}}\right)^{-2}$$

35. Ифодаро содда намуда қимати онро ҳангоми $a=-4,\ b=-\frac{1}{2}$ будан ҳисоб кунед:

$$\frac{[1{,}5(a-1)]^{-1}}{[3(a-b)]^{-2}}:\left[1+a^{-1}2ab^{-1}+\frac{(a-b)^2}{a^{-1}-1}\right].$$

36. Зарбшавандаро аз зери радикал бароред:

1) $\sqrt{(a-1)^3}$ ҳангоми $a\geq 1,$ будан;

2) $\sqrt[4]{x^7(a-2)^2}$ ҳангоми $x\geq 0,\ a\geq 2,$ будан; 3) $\sqrt{8(a-5)^2}.$

37. Содда намоед;

1) $\frac{x^2}{y}\sqrt[3]{\frac{3y}{3x^2}}$; 2) $\sqrt{4x^6y^2+12x^4y^3}$; 3) $\frac{2a^2}{3b}\sqrt[3]{\frac{b^3}{a^4}-\frac{b^3}{a^4}-\frac{b^5}{a^6}}$;

4) $\frac{3ab}{4a}\sqrt[5]{\frac{32a^6}{3b^5}-\frac{64a^5}{27b^4}}$; 5) $\frac{4}{ab}\sqrt[n]{a^{n+1}b^{2n+2}}$; 6) $\frac{x}{y}\sqrt[n]{\frac{y^{3n+2}}{x^{n-2}}}$.

38. Амалҳоро ичро намуда ифодаҳоро содда намоед;

1) $\left(2\sqrt{18}+3\sqrt{8}\right)+\left(3\sqrt{32}-\sqrt{50}\right)$;

2) $\left(2\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18}\right)+\left(\sqrt{72}+\sqrt{80}\right)$;

3) $\left(\sqrt{32}+\sqrt{0{,}5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{48}\right)$.

39. Муодилаҳоро ҳал кунед.

1) $2\sqrt{3x}-4\sqrt{3x}=27-3\sqrt{3x}$; 2) $\frac{3}{2}\sqrt{x}7=2\sqrt{3}$;

3) $\frac{5}{3}\sqrt{15x}-\frac{3}{5}\sqrt{15x}-11=\frac{1}{3}\sqrt{15}$; 4) $3\sqrt{2x}-2\sqrt{8x}+7\sqrt{18x}=28.$

40. Амалҳоро ичро кунед:

1) $\left(5\sqrt{4x}+4\sqrt{x}-6\sqrt{9x}-2\sqrt{2x}\right)+\left(8\sqrt{\frac{1}{4}x}+4\sqrt{8x}+1\right)$;

2) $\left(3\sqrt{8x}-\sqrt{18x}-5\sqrt{\frac{1}{2}x}\right)+\left(\sqrt{4\frac{1}{2}x}+\sqrt{50x}-\sqrt{32x}+\sqrt{72x}\right)$;

$$3)\ 4b\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}+\frac{2}{a}\sqrt[3]{a^5b}-3a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}-\sqrt[3]{a^2b^4}.$$

41. Зарбро иҷро кунед:

$$1)\left(\sqrt{12}-3\sqrt{75}\right)\cdot\sqrt{3};\qquad 2)\left(\sqrt{6}-3\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{8}\right)\cdot 2\sqrt{6};$$

$$3)\left(5+\sqrt{6}\right)\cdot\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right);\quad 4)\left(5-\sqrt{6}\right)\left(5\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right).$$

42. Амалҳоро иҷро намуда ифодаҳоро содда намоед:

$$1)\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{3};\qquad 2)\ \frac{5+3\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}-1}{6};$$

$$3)\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{5}-\frac{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}5\sqrt{3}}{15}.$$

43. Муодилаҳоро ҳал кунед:

$$1)\ \frac{17-3\sqrt{x}}{11}=\frac{23-4\sqrt{4}}{15};\qquad 2)\ \frac{29-5\sqrt{5}}{5}=\frac{39-5\sqrt{x}}{19};$$

$$3)\ \frac{3\sqrt{x}-5}{2}-\frac{2\sqrt{x}-7}{3}=\sqrt{x}-1;\qquad 4)\ \frac{17+3\sqrt{11}}{11}=\frac{23+4\sqrt{4}}{15};$$

$$5)\ \sqrt{2x-9}=\sqrt{6-x};\qquad 6)\ \sqrt{x-9}=\frac{36}{\sqrt{x-9}}-\sqrt{x};$$

$$7)\ 5\sqrt{2x+3}-\sqrt{18x-5}=\frac{4(x+3)}{\sqrt{2x+3}};\qquad 8)\ \sqrt{3x-1}+\frac{2}{\sqrt{3x-1}}=\sqrt{5x+3};$$

$$9)\ \sqrt{3-x}+\frac{6}{\sqrt{3-x}}=\sqrt{9-5x}.$$

44. Баробариҳоро исбот намоед:

$$1)\left(\sqrt{0{,}6}+\sqrt{0{,}3}-\sqrt{0{,}9}\right)\left(3\sqrt{0{,}2}+2\sqrt{0{,}3}+\sqrt{0{,}6}\right)=1{,}2;$$

$$2)\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}+2\sqrt{\frac{3}{2}}-4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(3\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{12}-\sqrt{6}\right)=-\sqrt{2}.$$

45. Амалҳоро иҷро кунед:

$$1)\left(10\sqrt{48}-6\sqrt{27}+4\sqrt{12}\right):\sqrt{3};$$

$$2)\left(15\sqrt{50}+2\sqrt{200}-3\sqrt{450}\right):\sqrt{10};\qquad 3)\left(\sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}\right):\sqrt{xy};$$

$$4)\left(\sqrt{a^5b^3}-\sqrt{a^3b^5}\right):\sqrt{a^3b^3}.$$

46. Амалҳоро иҷро кунед:

$$1)\left(4\sqrt{8}-6\sqrt[3]{2}\right):\sqrt{2};\qquad 2)\left(10\sqrt[3]{9}+5\sqrt{3}\right):\sqrt[6]{3};$$

$$3)\left(\sqrt{4+\sqrt{4}}+\sqrt{4+\sqrt{4}}\right)^2;\quad 4)\left(\sqrt{7+\sqrt{13}}+\sqrt{7+\sqrt{13}}\right)^2;$$

$$5)\left(2x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{4}}\right)\left(2x^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{4}}\right);\quad 6)\left(a^{\frac{2}{3}}-3b^{-1}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+3b^{-1}\right).$$

47. Аз реша озод кунед:

$$1)\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}};\ 2)\sqrt{\frac{m}{n}\sqrt[3]{\frac{n}{m}}};\ 3)\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}};\ 4)\sqrt[3]{3\sqrt{3\sqrt{3}}}.$$

48. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$1)\begin{cases}2\sqrt{2x+3y}+\sqrt{5-x-y}=7,\\ 3\sqrt{5-x-y}-\sqrt{2x+y-3}=1.\end{cases}\quad 2)\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2},\\ x+y=10,\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}\frac{x}{y}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{41}{20},\\ x+y=41\end{cases};\quad 4)\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{6},\\ y-x=5,\end{cases}\quad 5)\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ xy=4.\end{cases}$$

Ҷавобҳо

<u>**1.**</u> 25 см²; 100 см²; 10000 м². <u>**2.**</u> 961; 2601; 1764; 1680; 7056. <u>**3.**</u> $1)6x^{2n}$; $2)2^{n+1}x^{n^2-1}$; $3)10a^{x+1}-20a^4+30a^5$; $4)\,3$. <u>**4.**</u> адади ҷуфт; адади тоқ; <u>**6.**</u> $1)(m+1)^2(m^2-m+1)$; $2)(n+1)(n-1)(n^2+n+1)$; $3)2y(3x^2+y^2)$; $4)x^2+y^2$; $5)(a-4)(a+3)$; $6)(m+5)(m-2)$; $7)2(x+3)(x+2))$. <u>**7.**</u> а) 1) $\frac{1}{9}$; $2)-8$; $3)2\cdot5^{-1}$; 4) 64; $5)\frac{1}{6561}$; $6)15625$; $7)1$; $8)x^{-4}-a^{-6}$; $9)\frac{b(b^2-3ab+3a^2)}{(b-a^4)}$. б) 1) $ab^{-3}c^{-3}$; $2)4a^{13}x^{-3}z^{-9}$; $3)\frac{4}{9}a^{-2}m^{2n}x^{-2}$; 4) $\frac{2b^2+a}{a^2b^2}$; $5)\frac{x^4}{1+12x^2+x^4}$; 6)36. <u>**8.**</u> а) $1)-4\frac{1}{3}$ $2)4;3)\frac{3}{40}$. б) $1)(5-a)$; $2)(a-5)$; $3)2(a-5)\sqrt{2}$. в) $\sqrt[5]{16}$. <u>**9.**</u> а) вуҷуд надорад; вуҷуд надорад; -2; -5; в) 40 м; г) 5 см; 2 м; 40 м; д) $3\sqrt{2}>2\sqrt{3}$; е) $1)2a\sqrt[48]{64a}$;

2)$\sqrt[8]{a}, a>0$; ж) $\dfrac{\sqrt[8]{3^{10}}}{\sqrt[10]{3^{2}}} < \dfrac{\sqrt[14]{3^{3}}}{\sqrt[8]{3^{2}}}$; з) 1)$x\sqrt[3]{x^2-y^2}$; 2)$a\sqrt{a}$; 3)$\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}$.

10. а) 1)$\dfrac{46}{35}$; 2)$\dfrac{5}{9}$; б) 1)$\sqrt[3]{16}$; 2)2; 3)1. **11.** 1)$-\dfrac{1}{2(3a+1)}$; 2)$\dfrac{2a}{a^2+a+1}$. **12.** 58 чормағз; 145 чормағз. **13.** 1)$\sqrt{10}$; 2)$x\sqrt[15]{x}$; 3)$0,4ab$; 4)$x-y$; 5)a^2+a+1; 6)x^2+2. 11)$\dfrac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 12)$\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{4\sqrt{xy}}$; 13)$\dfrac{x+y}{x-y}$. **14.** 1)$\sqrt{ax}-2\sqrt[3]{a^2x}$. **15.** а) 1)$4-3\sqrt{7}+\sqrt{11}$; 2)$\dfrac{10-3\sqrt{2}}{2}$; 3)$\dfrac{13-\sqrt{5}}{2}$; 4)$\dfrac{a+b}{a-b}$; 5)$\dfrac{2\sqrt{6}}{a(b-1)}$; 6)$\dfrac{2a}{b^2}$; 7)$a^{\frac{1}{2}}$; 8)$\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}}$; б) 1)$\dfrac{4+a}{2}$; 2)$\pm 2; \pm 3$. **21.** а) 1)1; б)4; в)6;9; г)4;3 д)4; е)9; ж)3; з)4; и)4; к)13. **22.** 1)$\dfrac{6}{35}$; 2)$-\dfrac{6}{35}$; **23.** 30 км/соат; 27км/соат; 135 км. **25.** а)61; в)3; г)1; **26.** $\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{2}$. **27.** 1)125; 2) -8; 3) $a^{\frac{1}{2}}(a>0)$; 4)$\left(a^{0,1}\right)\cdot\sqrt[5]{a}$. **28.** 1)$\left(1,5;-\dfrac{2}{3}\right);(-0,2;5)$; 2)$(4;-1);(0,4;-10)$; 3) ҳал надорад. **29.** 1) нишондод: $u=\sqrt{x+y}$, $v=\sqrt[3]{x-y}$ Ҷавоб: (12;4), (34;-30) 2) нишондод: $\dfrac{1}{\sqrt{x-7}}=u$, $\dfrac{1}{\sqrt{y+6}}=v$ Ҷавоб: (16;-30) 3)$\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$; (2;-1) 4)$(27;1);(-1;-27)$; 5)$(10+4\sqrt{6};10-\sqrt{6})$; $(10-4\sqrt{6};10+4\sqrt{6})$; 6)$(8;2);(2;8)$; 7)$(9;4);(4;9)$; 8)$\left(\dfrac{b}{(1-m)\sqrt{m}};\dfrac{b\sqrt{m}}{1-m}\right)$, дар ин чо

$m=\dfrac{a^2-2\pm\sqrt{a^2(a^2-1)}}{2}$. 10) (9;4), 12)(0;1) **31.** 1) $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2-b^2}$; 2) $\sqrt{1-x}$; 3) $\dfrac{1}{6}$; 4) $a\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}$. **32.** 1) $\pm\dfrac{3}{4}$; 2) ± 5; 3) ± 8; 4) ± 7. **33.** $\dfrac{b\left(3a^2-3ab+b^2\right)}{(a-b)^2}$. **34.** $2\dfrac{1}{4}$. **35.** 6. **36.** 1) $(a-1)\sqrt{a-1}$; 2) $x(a-2)\sqrt[4]{x^3(a-2)}$; 3) $2(a-5)\sqrt{2},\ a\geq 5$. **37.** 1) $\dfrac{x}{2y}\sqrt[3]{12xy}$; 2) $2x^2y\sqrt{x^2+3y}$; 3) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{a^2-b^2}$; 4) $\dfrac{1}{2}\sqrt[5]{9(9a-2b)}$; 5) $4b\sqrt[n]{ab^2}$; 6) $y^2\sqrt[n]{x^2y^2}$. **38.** 1) $19\sqrt{2}$; 2) $15\sqrt{2}-3\sqrt{5}$; 3) $4\dfrac{1}{4}\sqrt{2}+3\dfrac{1}{3}\sqrt{3}$. **39.** 1)243; 2)36; 3)15; 4)2. **40.** 1)1; 2) $9\sqrt{2x}$; 3) $(a-b)\sqrt[3]{a^2b}$. **41.** 1) -39; 2) $12-18\sqrt{2}+16\sqrt{3}$; 3) $19\sqrt{2}$. **42.** 1) $\dfrac{7+\sqrt{3}}{6}$; 2) $\dfrac{17+7\sqrt{2}}{12}$; 3) $\dfrac{6\sqrt{2}+5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{15}$. **43.** 1)4; 2)16; 3)25; 5)5; 6)25; 7)3; 8)1; 9) -3. **45.** 1)30; 2) $6\sqrt{5}$; 3) $x+y$; 4) $a-b$. **46.** 1) $8-3\sqrt[6]{32}$; 2) $10\sqrt[3]{3}+5\sqrt[6]{3}$; 3)14; 4)26; 5) $4x-\dfrac{\sqrt{y}}{y}$; 6) $\dfrac{ab^2\sqrt[3]{a}-9}{b^2}$. **47.** 1) $\sqrt[4]{\dfrac{x}{y}}$; 2) $\sqrt[3]{\dfrac{m}{n}}$; 3) $\sqrt[8]{128}$; 4) $\sqrt[12]{2187}$, **48.** Нишондод. 1) Гузориши зеринро истифода бурда системаро содда менамоем.

$\sqrt{3x+2y}=u,\ \sqrt{5-x-y}=v,\ \sqrt{2x-y-3}=w,$

$u^2=2x+3y,\ v^2=5-x-y,\qquad w^2=2x-y-3.$

$\begin{cases}2u+v=7,\\3u-w=7,\\u^2+4v^2+w^2=17.\end{cases}$ 2) (8;2); (2;8), 3)(25;16); (16;25), 4)(9;4), 5)(1;4); (4;1).

БОБИ 2
Функсияҳои тригонометрӣ

§3. Формулаҳои тригонометрии фарқ, сумма ва натиҷаҳои онҳо
§4. Табдилдиҳии айниятии ифодаҳои тригонометрӣ.
Хосиятҳо ва графики функсияҳои тригонометрӣ

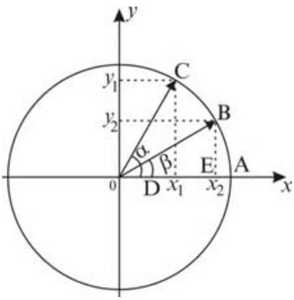
§3. Формулаҳои тригонометрии фарқ, сумма ва натиҷаҳои онҳо

8. Косинуси фарқ ва суммаи кунҷҳо

Формулаҳоеро муқаррар мекунем, ки аз рӯи онҳо қимати функсияҳои тригонометрии кунҷҳои α ва β - ро дониста, функсияҳои тригонометрии сумма ва фарқи ин кунҷҳоро ҳисоб кардан мумкин аст.

Теорема 1. ***Косинуси фарқи ду кунҷ ба ҳосили зарби косинусҳои ин кунҷҳо плюс ҳосили зарби синусҳои ин кунҷҳо баробар аст:***

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$



Расми 1

Исбот. Дар тарафи рости тири OX нуқтаи A – ро нишона мекунем ва аз он давраи марказаш дар нуқтаи 0 воқеъбударо мегузаронем.

Радиуси OA – ро, ки ба R баробар аст, дар атрофи нуқтаи O ба кунҷи α ва ба кунҷи β гардиш медиҳем (расми 1). Пас, радиусҳои OB ва OC ҳосил мешаванд.

Зарби склярии векторҳои $\vec{OB}(x_1, y_1)$ ва $\vec{OC}(x_2, y_2)$ - ро тартиб медиҳем:

$$\vec{OB}\cdot\vec{OC}=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2 \qquad (1)$$

Мувофикан аз ΔOBE ва ΔOCD ҳосил менамоем:

$$OE=x_2=R\cos\beta,\ BE=y_1=R\sin\beta,\ OD=x_1=R\cos\alpha,\ CD=y_2=R\sin\alpha$$

Қиматҳои x_1, x_2, y_1, y_2 -ро ба (1) мегузорем.

$$\vec{OB}\cdot\vec{OC}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=R^2\cos\alpha\cdot\cos\beta+R^2\sin\alpha\cdot\sin\beta \quad (2)$$

Аз тарафи дигар, зарби склярии векторҳои $\vec{a}\cdot\vec{b}$ чунин навишта мешавад: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)$, ки дар ин ҷо $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=R,\ \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\alpha-\beta$ мебошад. Аз ин ҷо чунин ҳосил мекунем:

$$\vec{OB}\cdot\vec{OC}=\left|\vec{OB}\right|\cdot\left|\vec{OC}\right|\cos(\alpha-\beta)=R^2\cos(\alpha-\beta). \qquad (3)$$

Формулаҳои (1), (2), (3) – ро муқоиса намуда, ҳосил мекунем:

$$R^2\cos(\alpha-\beta)=R^2\cos\alpha\cdot\cos\beta+R^2\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta \qquad (4)$$

Мисоли 1. $\cos 15^\circ$-ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. Азбаски $15^\circ=45^\circ-30^\circ$ ва маълум аст, ки $\cos 45^\circ=\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ва $\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$, бинобар ин

$$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$$ мешавад.

Теоремаи 2. ***Косинуси суммаи ду кунҷ ба ҳосили зарби косинусҳои ин кунҷҳо минус ҳосили зарби синусҳои ин кунҷҳо баробар аст:***

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

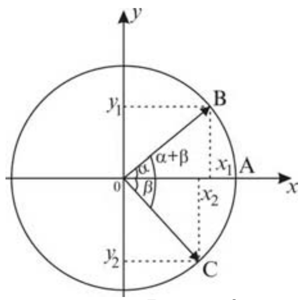
Исбот. Дар формулаи (4) ба ҷои $\beta, -\beta$ гузошта, онро дар расм тасвир намуда, ҳосил мекунем:

$x_1=R\cos\alpha, y_1=R\sin\alpha, x_1=R\cos(-\beta),$

$y_2=\sin(-\beta)$ ё $x_2=\cos\beta, y_2-\sin\beta,$

Он гоҳ формулаи (4) намуди зеринро мегирад:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$



Расми 2

Мисоли 2. $\cos 105^\circ$-ро ҳисоб мекунем.

Ҳал: 105°-ро ба намуди суммаи $60^\circ+45^\circ$ менависем, он гоҳ

$$\cos 105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)=\cos 60^\circ\cdot\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\cdot\sin 45^\circ=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right)$$ мешавад.

?

1. Формулаи косинуси фарқи ду кунҷро нависед.
2. Формулаи косинуси суммаи ду кунҷро нависед.
3. Теоремаҳои косинуси фарқ ва суммаи ду кунҷро баён кунед.

49. 75°-ро чун суммаи 30°+45° навишта $\cos 75°$ -ро ҳисоб кунед.

50. Аз формулаҳои фарқ ва суммаи косинуси ду кунҷ истифода карда, ифодаи $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$ -ро ҳисоб кунед.

51. Бо ёрии формулаҳои фарқ ва суммаи косинуси ду кунҷ, ифодаҳои зеринро табдил диҳед:

а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\varphi\right)$; б) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\varphi\right)$.

52. Аз формулаҳои фарқ ва суммаи косинуси ду кунҷ истифода бурда, баробариҳои зеринро исбот кунед:

$а)\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha;$ $б)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha.$

53. 135°-ро чун суммаи 45°+90° навишта $\cos 135°$ -ро ҳисоб кунед.

54. Ифодаи зеринро содда кунед:

$а)\,2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha;$ $б)\sqrt{3}\cos\alpha-2\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right).$

55. Қимати ифодаро ёбед:

$а)\cos(\alpha+\beta);$ $б)\cos(\alpha-\beta),$ агар $\sin\alpha=\dfrac{8}{17}, \cos\beta=\dfrac{4}{5},$ α ва β кунҷҳои чоряки якум бошанд.

56. Қимати ифодаҳоро ёбед:

$а)\cos 24°\cdot\cos 31°-\sin 24°\sin 31°;$ $б)\cos 107°\cdot\cos 17°+\sin 107°\cdot\sin 17°$

$в)\cos 36°\cdot\cos 24°-\sin 36°\cdot\cos 24°;$ $г)\cos 18°\cdot\cos 63°+\sin 18°\cdot\cos 63°$

$д)\cos 32°\cdot\cos 58°-\sin 32°\cdot\sin 58°$

57. Ифодаро содда кунед:

$а)\cos 2\varphi\cos\varphi+\sin 2\varphi\sin\varphi;$

$б)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\beta\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\beta\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta\right);$

$в)\cos(60°-\alpha)+\cos(60°+\alpha);$ $г)\cos(30°+\alpha)-\cos(30°-\alpha).$

58. Айниятро исбот кунед:

$а)\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

$б)\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin^2\alpha-\sin\beta$

Машқҳо барои такрор

59. Амалҳоро иҷро кунед:

$$a)\frac{x^2+4x+3}{x-5}\cdot\frac{x^2-5x}{x+3} \qquad б)\frac{x^2-16}{4x+12}:\frac{x^2+3x-4}{x-3}.$$

60. Аломати ифодаи зеринро муайян кунед:

$а)\sin 153°$; $б)\sin 273°$; $в)\sin 301°$; $г)\sin(-401°)$;

$д)\cos 73°$; $е)\sin 910°$; $ж)\cos(-1230°)$ $з)\sin 140°$;

61. Исбот кунед, ки

$$а)\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha};$$

$б)\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=1-2\sin^2\alpha$ мешавад.

62. Нобаробариро ҳал кунед:

$$а)0{,}8x<\frac{1}{3}x-\frac{7}{15}; \qquad б)\frac{5x-3}{4}<1{,}25x+1.$$

63. Ду мошин кореро дар муддати 20 соат иҷро карданд. Мошини дуюм ин корро назар ба мошини якум 9 соат тезтар иҷро мекунад. Ҳар як мошин ин корро дар чанд муддат иҷро мекунад?

9. Синуси сумма ва фарқи кунҷҳо

Теоремаи 1. ***Синуси суммаи ду кунҷ ба ҳосили зарби синуси кунҷи якум бар косинуси кунҷи дуюм плюс ҳосили зарби косинуси кунҷи якум бар синуси кунҷи дуюм баробар аст:***

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta} \qquad (3)$$

Исбот. Аз формулаи (2) ва формулаҳои мувофиқоварӣ (ниг. Алгебра 9 §3) истифода бурда ҳосил мекунем:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta$$

Пас, $\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$

Мисоли 1. $\sin 105°$ -ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. 105°-ро ба намуди суммаи 60°+45° менависем.

Он гоҳ

$$\sin 105°=\sin(60°+45°)=\sin 60°\cdot\cos 45°+\cos 60°\cdot\sin 45°=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3+1}\right)$$ мешавад.

Теоремаи 2. ***Синуси фарқи ду кунҷ ба ҳосили зарби синуси кунҷи якум бар косинуси кунҷи дуюм минус ҳосили зарби косинуси кунҷи якум бар синуси кунҷи дуюм баробар аст:***

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$$

Исбот. Чунин рафтор мекунем:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)=$$

$$=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

Пас, $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$ мешавад.

Мисоли 2. Синуси 75°-ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. 75°-ро ба намуди фарқи 90°-15° менависем. Он гоҳ $\sin 75°=\sin(90°-15°)=\sin 90°\cdot\cos 15°-\cos 90°\cdot\sin 15°=$

$$=1\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-0\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(cos15° дар саҳ. 33 нишон дода шуда буд)

?

1. Формулаи синуси суммаи ду кунҷро нависед.
2. Формулаи синуси фарқи ду кунҷро нависед.
3. Теоремаҳои синуси сумма ва фарқи ду кунҷро баён кунед.

64. 135°-ро чун суммаи 45°+90° навишта $\sin 135°$ -ро ҳисоб кунед.

65. Ифодаҳоро бо ёрии формулаҳои тригонометрии ҷамъ ва фарқ табдил диҳед:

$a)\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right);$ $\qquad$ $б)\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right).$

66. Формулаҳои ҷамъро истифода карда санҷед, ки:

$a)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha;$ $\qquad$ $б)\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$

67. Ифодаро содда кунед:

$a)\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\alpha;$ $\qquad$ $б)\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\alpha.$

68. α ва β кунҷҳои чоряки II ва $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{15}{17}$.

Ёбед: а) $\sin(\alpha+\beta)$; б) $\sin(\alpha-\beta)$.

69. Ифодаро содда кунед:

$а)\sin 38°\cdot\cos 12°+\cos 38°\cdot\sin 12°;$ $б)\sin 137°\cdot\cos 52°-\cos 137°\cdot\sin 52.$

70. Ҳисоб кунед:

$а)\sin 63°\cdot\cos 27°+\cos 63°\cdot\sin °27;$ $б)\sin 51°\cdot\cos 21°-\cos 51°\cdot\sin 21;$

$в)\sin 21°\cdot\cos 9°+\cos 21°\cdot\sin 9°;$ $г)\sin 278°\cdot\cos 68°-\cos 278°\cdot\sin 68°.$

71. Содда кунед:

$а)\sin(90°-\alpha)+\sin(30°+\alpha);$ $б)\sin(\alpha+60°)-\sin(\alpha-60°).$

72. Айниятро исбот кунед:

$а)\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta;$

$б)\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta.$

73. Содда кунед:

$а)\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta};$ $б)\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}.$

Машқҳо барои такрор

74. Қимати ифодаҳоро ёбед:

$а)\sin 480°;$ $б)\cos(-570°);$ $в)\sin 240°;$ $г)\cos(-210°);$

75. Нобаробариро ҳал кунед:

$а)\ (x+4)(x+5)-5\le 7;$ $б)\ 6-(2x+1{,}5)(4-x)\ge 0.$

76. Ифодаро содда кунед:

$а)2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha;$ $б)\sqrt{3}\cos\alpha-2\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right).$

77. Пиёдагард роҳи АВ – ро тай намуда, ҳисоб кард, ки ӯ агар соате 0,8 км зиёдтар роҳ мегашт, ба В як соат пештар омада мерасид ва агар соате 0,8 км камтар роҳ мегашт, ба В якуним соат дертар омада мерасид. Масофаи АВ – ро ёбед.

10. Тангенси сумма ва фарқи кунҷҳо

Теорема. ***Барои ҳар гуна қиматҳои имконпазири кунҷҳои α ва β формулаи зерин дуруст аст:***

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta} \tag{4}$$

Шарҳ. Қимати имконпазири α ва β ҳамон қиматҳое мебошанд, ки барои онҳо тангенсҳои кунҷҳои α ва β, инчунин $\alpha+\beta$ маъно доранд. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки ин камонҳо набояд дар охирҳои диаметрӣ амудӣ тамом шаванд ва он гоҳ барои ҳар яке аз се камоне ки дида мебароем, қимати косинус ба нул баробар нест. Яъне тангенси ҳар се камон адади охирнок аст.

Исбот. Мувофиқи таърифи тангенс (ниг. Алгебра 9 п. 29) ва тасдиқи теоремаҳои 2 ва 3 (§1. п.1)

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\text{ аст.}$$

Сурат ва махраҷро ба $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$ тақсим мекунем:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{tg\alpha tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Дар формулаи (4) β - ро бо -β иваз намуда, аз хосияти тоқ будани тангенс истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$tg(\alpha-\beta)=tg(\alpha+(-\beta))=\frac{tg\alpha+tg(-\beta)}{1-tg\alpha tg(-\beta)}=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}.$$

Ҳамин тавр:

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}\qquad(5)$$

Мисоли 1. $tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$-ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. $tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{tg\dfrac{\pi}{4}+tg\alpha}{1-tg\dfrac{\pi}{4}\cdot tg\alpha}=\dfrac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}.$

Мисоли 2. Тангенси 150°-ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. 150°-ро ба намуди фарқи 180°-30° менависем, он гоҳ

$tg150^\circ=tg(180^\circ-30^\circ)=\dfrac{tg180^\circ-tg30^\circ}{1+tg180^\circ\cdot tg30^\circ}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ мешавад.

Мисоли 3. $\sin 240^\circ$ - ро ва $tg135^\circ$ -ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. 240° -ро ба намуди суммаи $180^\circ+60^\circ$ менависем. Он гоҳ мувофиқи формулаи (3)

$$\sin 240^\circ=\sin(180^\circ+60^\circ)=\sin 180^\circ\cdot\cos 60^\circ+\sin 60^\circ\cdot\cos 180^\circ=$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(-1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$ мешавад.

135°-ро ба намуди фарқи $180° - 45°$ менависем. Он гоҳ аз рӯи формулаи (5)

$$tg135° = tg(180° - 45°) = \frac{tg180° - tg45°}{1 + tg180° \cdot tg45°} = \frac{0-1}{1+0 \cdot 1} = -1$$

мешавад.

?	**1.** Формулаи тангенси суммаи ду кунҷро нависед. **2.** Формулаи тангенси фарқи ду кунҷро нависд. **3.** Теоремаи сумма ва фарқи тангенси ду кунҷро баён намоед. **4.** Қиматҳои имконпазири α ва β -ро, ки барои онҳо тангенс маъно дорад шарҳ диҳед.

78. Агар $tg\alpha = \frac{4}{3}$ ва $tg\beta = \frac{4}{3}$ бошад $tg(\alpha + \beta)$ -ро ёбед.

79. Ҳисоб кунед: $а) tg15°$ $\quad б) tg75°$

80. $tg\alpha = \frac{1}{2};\ tg\beta = \frac{1}{3}$. Ёбед: $а) tg(\alpha + \beta);\quad б) tg(\alpha - \beta)$.

81. Ҳисоб кунед:

$$а) \frac{tg20° + tg10°}{1 - tg20° \cdot tg10°}; \qquad б) \frac{1 + tg2° + tg152°}{tg152° \cdot tg2°}.$$

82. Ҳисоб кунед:

$$а) \frac{tg\frac{\pi}{15} + tg\frac{4\pi}{15}}{1 - tg\frac{\pi}{15} \cdot tg\frac{4\pi}{15}}; \qquad б) \frac{tg\frac{2\pi}{3} - tg\frac{5\pi}{12}}{1 + tg\frac{2\pi}{3} \cdot tg\frac{5\pi}{12}};$$

$$в) \frac{tg22° + tg23°}{1 - tg22° \cdot tg23°}; \qquad г) \frac{tg72° - tg42°}{1 + tg72° \cdot tg42°}.$$

83. *а*) Агар $tg\alpha = 1{,}2$ ва $tg\beta = 0{,}7$ бошад, $tg(\alpha + \beta)$ ва $tg(\alpha - \beta)$ -ро ёбед.

б) Агар $tg\alpha = -0{,}2$ ва $tg\beta = 1{,}5$ бошад, $tg(\alpha + \beta)$ ва $tg(\alpha - \beta)$ -ро ҳисоб кунед.

84. Айниятро исбот кунед:

$$\frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}=tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right);\quad б)\,\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=tg\alpha+tg\beta.$$

85. Содда кунед:

$$а)\,tg(\alpha+\beta)-tg\alpha-tg\beta-tg(\alpha+\beta)tg\alpha\cdot tg\beta;$$

$$б)\,\frac{tg\alpha+tg\beta}{tg(\alpha+\beta)}+\frac{tg\alpha-tg\beta}{tg(\alpha-\beta)}-2;$$

$$в)\,\frac{tg\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)+tg\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)}{1-tg\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)tg\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)}-1;\quad г)\,\frac{tg\frac{\pi}{9}+tg\frac{5\pi}{36}}{1+tg\frac{8\pi}{9}\cdot tg\frac{5\pi}{36}}-1.$$

Машқҳо барои такрор

86. Қимати ифодаҳоро ёбед:

$\sin 300°;\qquad \cos 330°;\qquad \sin 570°;\qquad \sin 810°.$

87. Қимати $\sin(\alpha+\beta)$ ёфта шавад, агар $\sin\alpha=\frac{8}{17},\ \cos\beta=\frac{4}{5}$ буда, α ва β кунҷҳои чоряки якум бошанд.

88. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$а)\begin{cases}x^2+xy-y^2=11\\ x-2y=1\end{cases}\qquad б)\begin{cases}x^2+xy-3y=9\\ 3x+2y=-1\end{cases}$$

89. Ҳосили зарби ду адад аз суммаи онҳо 15 маротиба калон аст. агар ба адади якум дучанди адади дуюмро ҷамъ кунем, 100 ҳосил мешавад. Ин ададҳоро ёбед.

11. Формулаҳои кунҷҳои дучанда

Ифодаҳои $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha$ ва $tg2\alpha$-ро ба воситаи функсияи тригонометрии кунҷи α ифода мекунем.

Дар формулаи ҷамъ барои косинус (ниг. ба п.8) $\alpha=\beta$ ҳисобида, ҳосил мекунем:

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Бинобар ин, **косинуси кунҷи дучанда ба фарқи квадратҳои косинус ва синуси кунҷ баробар аст.**

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

Дар формулаи ҷамъ барои синус (ниг. ба п.9) $\alpha=\beta$ ҳисобида, ҳосил мекунем:

$$\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha.$$

Ҳамин тавр, **синуси кунҷи дучанда ба ҳосили зарби дучандаи синус ва косинуси кунҷи додашуда баробар аст.**

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha.}$$

Монанди ин формула аргументи дучанда барои тангенс бароварда мешавад:

$$\boxed{tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}}$$

Мисоли 1. Ифодаҳои тригонометрии $\cos 3\alpha$-ро ба воситаи функсияи тригонометрии кунҷи α ифода мекунем.

Ҳал. $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha =$

$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha \cdot$

$\cdot \sin^2\alpha$ -ро ба $1 - \cos^2\alpha$ иваз карда ҳосил мекунем:

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$

Мисоли 2. Ифодаҳои тригонометрии $\sin 3\alpha$ -ро ба воситаи функсияи тригонометрии кунҷи α ифода мекунем.

Ҳал.

$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin\alpha = 2\sin\alpha \cdot$

$\cdot \cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha = 3\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha - \sin^3\alpha =$

$= 3(1 - \sin^2\alpha)\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$

Мисоли 3. $tg\alpha = \dfrac{3}{4}$ дода шуда аст ва $180° < \alpha < 270°$; $tg2\alpha$ -ро меёбем.

Ҳал. $tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \dfrac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{16-9}{16}} = \dfrac{24}{7} = 3\dfrac{3}{7}.$

Мисоли 4. Дода шуда аст:

$\sin\alpha = 0{,}8° < \alpha < 90°$

$а)\sin 2\alpha;$ $\quad б)\cos 2\alpha;$ $\quad в)tg2\alpha$ -ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. *а*) $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - 0{,}64} = 0{,}6$

Қимати функсияи $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ -ро дар формулаи $\sin 2\alpha = 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha$ гузошта ҳосил мекунем:

$\sin 2\alpha = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}96.$

б) Қимати функсияи $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ -ро дар формулаи $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ гузошта ҳосил мекунем:

$$\cos 2\alpha = (0{,}6)^2 - (0{,}8)^2 = -0{,}28.$$

в) Қимати $\sin 2\alpha$ ва $\cos 2\alpha$ -ро дар формулаи $tg 2\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ гузошта ҳосил мекунем:

$$tg 2\alpha = -\frac{0{,}96}{0{,}28} = -\frac{24}{7} = -3\frac{3}{7}.$$

?

1. Формулаи кунҷи дучандаро барои тангенс нависед. Онро исбот намоед.

2. $\sin 2\alpha$ ва $\cos 2\alpha$ -ро ба воситаи *а*) $\sin\alpha$; *б*) $\cos\alpha$ ифода намоед.

90. $\cos\alpha = -0{,}8$ ва α кунҷи чоряки II аст. Қимати $\sin 2\alpha$ -ро ёбед.

91. Ифодаи $\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha - \sin^3\alpha\cdot\cos\alpha$ -ро содда кунед.

92. Ифодаро содда кунед:

$$а)\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha};\ б)\frac{2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha};\ в)\frac{\sin 2\beta}{\cos\beta} - \sin\beta;\ г)\cos 2\alpha + \sin^2\alpha;$$

$$д)\cos^2\beta - \cos 2\alpha;\quad е)\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} - \cos\alpha.$$

93. Касрро ихтисор кунед:

$а)\dfrac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ};$ $б)\dfrac{\sin 100^\circ}{\sin 50^\circ};$

$в)\dfrac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ};$ $г)\dfrac{\cos 36^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ}.$

94. Ифодаро содда кунед:

$а)\cos 2\alpha + \sin^2\alpha;$ $б)\dfrac{\sin 40^\circ}{2\cos 20^\circ};$

$в)\dfrac{\sin 100^\circ}{\cos 50^\circ};$ $г)\dfrac{\cos 36^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ}.$

95. Ифодаро содда кунед:

$$а)\frac{\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha};\ б)\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} - \cos\alpha;\ в)\cos 2\beta + \sin^2\beta.$$

96. Ифодаро содда кунед:

$а) 2\sin 165^\circ \cos 165^\circ;$ $б) \cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ.$

97. Ифодаро содда кунед:

$а) \dfrac{\sin 2\beta}{1+\cos 2\beta};$ $б) \dfrac{1-\cos 2\beta}{2\sin\beta};$

$в) \dfrac{1+\cos 4\beta}{\cos^2\beta - \sin^2\beta};$ $г) \dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\beta\right)}{2\sin\beta}.$

98. Айниятро исбот кунед.

$а) (\sin\alpha+\cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha = 1;$ $б) 4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = \sin 4\alpha;$

$в) \sin 2\alpha - tg\alpha = \cos 2\alpha \cdot tg\alpha;$ $г) (tg\alpha + ctg\alpha)\sin 2\alpha = 2.$

99. Ҳисоб кунед:

$а) \sin 105^\circ \cdot \cos 105^\circ;$ $б) \cos^2\dfrac{7\pi}{12} - \sin^2\dfrac{7\pi}{12};$

$в) \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ;$ $г) tg(\alpha+45) + tg(\alpha-45) - 2tg2\alpha.$

100. Айниятро исбот кунед:

$а) \dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = tg\alpha;$ $б) \dfrac{\sin\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 5\alpha} = tg3\alpha;$

$в) (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha;$ $г) \sin 2\alpha - tg\alpha = \cos 2\alpha \cdot tg\alpha;$

$д) (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha = 1;$ $е) 4\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha = \sin 4\alpha.$

Машқҳо барои такрор

101. Қимати ифодаро ёбед:

$а) 2\cos 0^\circ - 4\sin 90^\circ + 5tg180^\circ;$ $б) \dfrac{2tg15^\circ}{1-tg^2 15^\circ};$

$в) \dfrac{2tg75^\circ}{1-tg75^\circ};$ $г) 2tg90^\circ - 3\cos 270^\circ + 5\sin 0^\circ.$

102. Системаи нобаробариҳоро ҳал намоед:

$а) \begin{cases} 4(x-1) - 2(x+1) > 0 \\ 3x - 1 - 4(x-10) < 0 \end{cases}$ $б) \begin{cases} 3x + 8 - (2x-5) < 0 \\ 2(6x-4) - 3(x+1) > 0 \end{cases}$

103. Суммаро, ки ҷамъшавандаҳояшон аъзоҳои пайдарпаи прогрессияи арифметикианд, ҳисоб кунед:

$а) 2+6+10+\ldots+198;$ $б) 95+85+75+\ldots+(-155).$

12. Формулаҳои тригонометрии нисфи кунҷ

Функсияи тригонометрии кунҷи $\frac{\alpha}{2}$-ро бо воситаи функсияҳои тригонометрии кунҷи α ифода менамоем.

Дар формулаи косинуси аргументи дучанда (ниг. ба п.11) α -ро бо $\frac{\alpha}{2}$ иваз мекунем:

$$\boxed{\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (1)$$

Айнияти асосии

$$\boxed{1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (2)$$

ро илова карда, (1) ва (2)-ро аъзо ба аъзо ҷамъ ва тарҳ намуда, ба

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha; \quad 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$$

соҳиб мешавем. Аз ин ҷо,

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} \qquad (3)$$

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}} \qquad (4)$$

мешавад.

Айнияти (4)-ро ба айнияти (3) аъзо ба аъзо тақсим карда, ҳосил мекунем:

$$\boxed{tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}} \qquad (5)$$

Дар формулаҳои (3) – (5) аломати пеш аз реша буда мувофиқан ба он ҳолате, ки дар кадом чоряк кунҷи $\frac{\alpha}{2}$ тамом шудааст, интихоб карда мешавад.

Мисоли 1. $\sin\frac{\pi}{8} = \sin(22°30')$ ва $\cos\frac{\pi}{8} = \cos(22°30')$ - ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. Аз баски $\cos\frac{\pi}{4}=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$ мебошад, кунҷи $22°30'$ дар чоряки якум тамом мешавад ва косинусу синуси он кунҷҳо мусбатанд.

Бинобар ин $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$, $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$.

Мисоли 2. $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ дода шуда аст, ки дар он ҷо $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ мебошад; $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\alpha}{2}$ - ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. $\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$. Аз баски $\frac{\alpha}{2}$ дар чоряки дуюм тамом мешавад, бинобар ин $\cos\frac{\alpha}{2}<0$, $\sin\frac{\alpha}{2}>0$ ва $tg\frac{\alpha}{2}<0$ аст. Аз ин ҷо,

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{10};\quad \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10};$$

$tg\frac{\alpha}{2}=-3$ мебошад.

Мисоли 3. $\sin\frac{\pi}{12}$ - ро меёбем.

Ҳал. $\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

(Қимати реша мусбат аст, зеро $\frac{\pi}{12}$ кунҷи чоряки I буда, $\sin\frac{\pi}{12}>0$ мебошад).

Мисоли 4. $tg\frac{5\pi}{8}$ -ро меёбем.

Ҳал. мебинем, ки $\frac{5\pi}{8}$ дар чоряки II мехобад. Бинобар ин $tg\frac{5\pi}{8} < 0$ аст, пас

$$tg\frac{5\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{5\pi}{4}}{1+\cos\frac{5\pi}{4}}} = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{5\pi}{4}}{1-\cos\frac{5\pi}{4}}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{4-2}} =$$

$$= -\sqrt{(\sqrt{2}+2)^2} = -(\sqrt{2}+1).$$

Мисоли 5. $\cos\alpha = 0{,}8$ ва $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ мебошад, қиматҳои $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}, tg\frac{\alpha}{2}$ - ро меёбем.

Ҳал. Кунҷи $\frac{\alpha}{2}$ дар чоряки якум воқеъ аст ва $\sin\frac{\alpha}{2} > 0,\ \cos\frac{\alpha}{2} > 0,\ tg\frac{\alpha}{2} > 0$ аст. Бинобар ин,

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1-0{,}8}}{2} = \sqrt{0{,}1}; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1+0{,}8}}{2} = \sqrt{0{,}9};$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1-0{,}8}}{1+0{,}8} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$ мешавад.

?

1. Формулаҳо барои нисфи кунҷро барои косинус, синус ва тангенс нависед.
2. Тарзи ҳосилкунии ин формулаҳоро баён кунед.
3. Дар ин формулаҳо аломати пеш аз реша ба чӣ асос карда мешавад?

104. Агар:

$$а)\cos\alpha = -\frac{12}{13},\ \ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}; \quad б)\cos\alpha = \frac{3}{5},\ \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$

бошад, $\sin\frac{\alpha}{2}; \cos\frac{\alpha}{2};$ ва $tg\frac{\alpha}{2}$ -ро ёбед.

105. Ҳисоб кунед:

$a) 4\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{13\pi}{10}$; $б) \sin^4\frac{3}{8}\pi - \cos^4\frac{3}{8}\pi$; $в) tg\frac{\pi}{8}$;

$г) \sin\frac{17\pi}{12}$; $д) \cos\frac{\pi}{12}$; $е) tg\frac{\pi}{12}$

106. Агар:

$a) \cos\alpha = \frac{2}{5}, 270° < \alpha < 360°$; $б) \cos\alpha = 0{,}8 \quad 0 < \alpha < 90°$

бошад, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ва $tg\frac{\alpha}{2}$ -ро ёбед.

107. $\sin\alpha = 0{,}8$ ва $90° < \alpha < 180°$ дода шуда аст:

$a) \sin\frac{\alpha}{2}$; $б) \cos\frac{\alpha}{2}$; $в) tg\frac{\alpha}{2}$ -ро ёбед.

108. Ҳисоб кунед:

$a) \sin 45°$; $б) \sin\frac{7\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$; $в) \cos\frac{5\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}$.

109. $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ва $tg\frac{\alpha}{2}$ - ҳисоб карда шавад, агар $\cos\alpha = 0{,}8$ буда $180° < \alpha < 270°$ бошад.

Машқҳо барои такрор

110. Ифодаро содда кунед:

$$a) \frac{a+b}{a^2+ab+b^2} \cdot \frac{a^3-b^3}{b^2-a^2} : \left(1 - \frac{1+b}{b}\right); \quad б) \frac{ab^2 - a^2b}{a+b} \cdot \frac{a + \frac{ab}{a-b}}{a - \frac{ab}{a+b}}.$$

111. Муодилаи биквадратиро ҳал карда, суммаю ҳосили зарби решаҳои онро ёбед.

$a)\ x^4 - 15x^2 + 50 = 0$; $б)\ x^4 - x^2 - 12 = 0$

в) Агар: $a)\ \alpha = 750^o$; $б)\ \alpha = 810^o$; $в)\ \alpha = 1260^o$ бошад, қиматҳои синус, косинус, тангенси кунҷи α -ро ёбед.

г) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$; $\alpha = 120^o$ бошад, қимати ифодаи $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$ -ро ёбед.

112. Сайёҳ 3 км роҳи кӯҳӣ ва 5 км роҳи ҳамворро дар 2 соат тай кард. Суръати сайёҳ дар роҳи кӯҳӣ нисбат ба роҳи ҳамвор 2 км/соат кам аст. Суръати сайёҳро дар роҳи кӯҳӣ ёбед.

13. Формулаҳои ба сумма ва фарқ табдил додани ҳосили зарби функсияҳои тригонометрӣ

Айнияти зеринро аъзо ба аъзо ҷамъ мекунем (ниг. ба п.1):

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta \qquad (2)$$

Ҳамин тариқ,

$$\boxed{\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}} \qquad (3)$$

мешавад.

Ҳосили зарби косинуси ду кунҷ ба нисфи суммаи косинуси фарқ ва косинуси суммаи кунҷҳои онҳо баробар аст.

Агар аз айнияти (1) айнияти (2) – ро аъзо ба аъзо тарҳ кунем, формулаи шаклдигаркунии ҳосили зарби синусҳоро ҳосил мекунем:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2} \qquad (4)$$

Ҳосили зарби синуси ду кунҷ ба нимфарқи косинуси фарқ ва косинуси суммаи кунҷҳҳои онҳо баробар аст.

Формулаҳои $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ва $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ - ро аъзо ба аъзо ҷамъ намуда, формулаи шаклдигаркунии синус ва косинусро ҳосил мекунем:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2} \qquad (5)$$

Ҳосили зарби синус ва косинуси ду кунҷ ба нимсуммаи синуси сумма ва синуси фарқи кунҷҳои онҳо баробар аст.

Натиҷа. Агар $\alpha=\beta$ бошад, пас аз (3-5) формулаҳои зерин ҳосил мешаванд:

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2};\ \sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2};\ \sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin2\alpha.$$

Мисоли 1. Ҳосили зарби $\cos2\alpha\cdot\cos4\alpha$ -ро ба сумма табдил медиҳем.

Ҳал. $\cos4\alpha\cdot\cos2\alpha=\dfrac{\cos6\alpha+\cos2\alpha}{2}.$

Мисоли 2.

$$\sin^4\alpha\cdot\cos^2\alpha=\sin^2\alpha(\sin\alpha\cdot\cos\alpha)^2=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\cdot\frac{\sin^2 2\alpha}{4}=$$

$$=\frac{1}{8}(1-\cos 2\alpha)\left(\frac{1-\cos 4\alpha}{2}\right)=\frac{1}{16}(1-\cos 2\alpha-\cos 4\alpha+\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha)=$$

$$=\frac{1}{16}\left(1-\cos 2\alpha-\cos 4\alpha+\frac{\cos 6\alpha+\cos 2\alpha}{2}\right)=\frac{1}{16}-\frac{\cos 2\alpha}{32}-\frac{\cos 4\alpha}{16}+\frac{\cos 6\alpha}{32}$$

Мисоли 3. $\sin 75°\cdot\cos 15°$-ро ба сумма табдил медиҳем.

Ҳал. аз формулаи (5) истифода мебарем:

$$\sin 75°\cdot\cos 15°=\frac{\sin 90°+\sin 60°}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4};$$

Мисоли 4. $\sin 45°\cdot\sin 15°$-ро ба сумма табдил медиҳем.

Ҳал. $\sin 45°\cdot\sin 15°=\dfrac{\cos 30°+\cos 60°}{2}=\dfrac{1\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{3-1}}{4}.$

> **?**
>
> **1.** Ҳангоми ба сумма табдил додани ҳосили зарби функсияҳои тригонометрӣ кадом формулаҳо истифода бурда мешаванд?
> **2.** Формулаҳои ба сумма табдил додани ифодаҳои
> *а)* $\cos\alpha\cdot\cos\beta$; *б)* $\sin\alpha\cdot\sin\beta$; *в)* $\sin\alpha\cdot\cos\beta$-ро нависед.

113. Ҳосили зарбро ба сумма табдил диҳед:

а) $\sin 42°\cdot\cos 12°$; *б)* $\sin 40°\cdot\sin 14°$; *в)* $\sin 22°\cdot\sin 8°$;

г) $2\sin 18°\cdot\cos 12°$; *д)* $\cos 20°\cdot\cos 40°$; *е)* $\cos 18°\cdot\cos 56°$.

114. Ба сумма табдил диҳед:

а) $\sin 20°\cdot\cos 10°$; *б)* $\sin 50°\cdot\cos 15°$

в) $\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}$ *г)* $\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha-3\beta)$.

115. Ба сумма табдил диҳед:

а) $\cos 45°\cdot\cos 15°$; *б)* $\sin\dfrac{\pi}{24}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{24}$; *в)* $\cos 20°\cdot\cos 10°$;

г) $\cos\dfrac{\pi}{10}\cdot\cos\dfrac{\pi}{5}$; *д)* $\sin\dfrac{\pi}{5}\cdot\sin\dfrac{\pi}{8}$; *е)* $\sin\dfrac{\pi}{10}\cdot\cos\dfrac{\pi}{8}$.

116. Ҳосили зарбро ба сумма табдил диҳед:

$а)\sin 20^\circ \cdot \sin 10^\circ$; $б)\sin 4\alpha \cdot \cos 2\alpha$; $в)\sin 2\alpha \cdot \cos(\alpha+\beta)$;

$г)\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta)$; $д) 2\sin\alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha$;

$е) 8\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha-\gamma)\cdot\cos(\gamma-\beta)$.

117. Ба сумма табдил диҳед:

$а)\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$; $б) 2\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 50^\circ$;

$в) 4\cos 18^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 16^\circ$; $г) 4\cos\alpha \cdot \cos 3\alpha \cdot \cos 5\alpha$;

$д) 2\sin\alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha$; $е) 8\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha-\gamma)\cdot\cos(\beta-\gamma)$.

118. Ба сумма табдил диҳед:

$а) 2\cos 45^\circ \cdot \sin 15^\circ$; $б)\cos 105^\circ \cdot \cos 75^\circ$; $в)\sin\frac{\pi}{24}\cdot\sin\frac{5\pi}{24}$

119. Ба сумма табдил диҳед:

$а) 2\sin^2\alpha$; $б) 2\cos^2(45-\alpha)$; $в) 2\sin^2(45^\circ-\alpha)$; $г) 4\cos^4\alpha$.

120. Ба сумма табдил диҳед:

$а)\sin 30^\circ \cdot \cos 20^\circ$; $б)\cos 15^\circ \cdot \sin 5^\circ$;

$в)\sin 50^\circ \cdot \sin 15^\circ$; $г)\cos 43^\circ \cdot \cos 43^\circ$.

Машқҳо барои такрор

121. Сеаъзогии квадратиро ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

$а) 3x^2+2x-5$; $б) x^2+3x-28$; $в) 9x^2+6x+1$.

122. Системаро ҳал кунед.

$а)\begin{cases} xy+3x-4x=12 \\ xy+2x-2y=9 \end{cases}$ $б)\begin{cases} x^2+y^2=29 \\ y^2-4x^2=9 \end{cases}$

123. Қимати ифода ёфта шавад:

$а)\cos 24^\circ \cdot \cos 31^\circ - \sin 24^\circ \cdot \sin 31^\circ - \cos 55^\circ$;

$б)\cos 107^\circ \cdot \cos 17^\circ + \sin 107^\circ \cdot \sin 17^\circ$.

124. Ду гурӯҳи сайёҳони ҷавонон аз Душанбе ва Тагоб, ки масофаи байни онҳо 30 км аст, ба пешвози ҳамдигар баромаданд. Агар гурӯҳи якум нисбат ба гурӯҳи дуюм 2 соат пештар ба роҳ бароянд, он гоҳ онҳо баъд аз 2,5 соати ба роҳ баромадани гурӯҳи дуюм вомехӯранд. Агар гурӯҳи дуюм нисбат ба гурӯҳи якум 2 соат пештар ба роҳ барояд, он гоҳ вохурӣ баъд аз 3 соати ба роҳ баромадани гурӯҳи якум ба амал меояд. Гурӯҳи сайёҳон бо кадом суръат ҳаракат мекунанд?

14. Формулаҳои ба ҳосили зарб табдил додани сумма ва фарқи функсияҳои тригонометрӣ

Формулаҳои табдил додани ҳосили зарби функсияҳои тригонометрии якхела ба сумма ё фарқ имконият медиҳад, ки сумма ё фарқи онҳо ба намуди ҳосили зарби функсияҳои тригонометрӣ ифода карда шавад.

Суммаи косинуси ду кунҷ ба дучандаи ҳосили зарби косинуси нимсумма ва косинуси нимфарқи кунҷҳои онҳо баробар аст:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Исбот. барои исбот тарафи рости баробарии охиронро ба сумма табдил додан кифоя аст.

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2}=\cos\alpha+\cos\beta$$

Се формулаи зерин низ бо ҳамин усул исбот карда мешавад:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Суммаи синуси ду кунҷ ба ҳосили зарби дучандаи синуси нимсумма ва косинуси нимфарқи кунҷҳои онҳо баробар аст.

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Фарқи косинуси ду кунҷ ба минуси ҳосили зарби дучанди синуси нимсумма ва синуси нимфарқи кунҷҳои онҳо баробар аст.

$$\boxed{\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Фарқи синуси ду кунҷ ба ҳосили зарби дучанди косинуси нимсумма ба синуси нимфарқи кунҷҳои онҳо баробар аст. Ин чунин формулаҳои зерин ҷой доранд:

$$\boxed{tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}\qquad\boxed{tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

агар $\cos\alpha\neq 0$ ва $\cos\beta\neq 0$ бошад $\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2},\ \beta\neq\frac{\pi}{2}\right)$.

Мисоли 1. $\cos 40°+\cos 50°$ - ро ба ҳосили зарб табдил медиҳем.

Ҳал. $\cos 40° + \cos 50° = 2\cos\frac{40° + 50°}{2}\cos\frac{50° - 40°}{2} =$

$= 2\cos 45° \cdot \cos 5° = \sqrt{2}\cos 5°.$

Мисоли 2. $\sin 20° + \cos 30°$ - ро ба намуди ҳосили зарб табдил медиҳем:

Ҳал. $\sin 20° + \cos 30° = \sin 20° + \sin 60° =$

$2\sin\frac{60° + 20°}{2}\cos\frac{60° - 20°}{2} = 2\sin 40° \cdot \cos 20°.$

Мисоли 3.

$$tg\frac{\pi}{4} + tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\sin\frac{5}{12}\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{6}\sin\frac{5\pi}{12}}{3}.$$

?

1. Формулаҳои ба ҳосили зарб табдил додани сумма ва фарқи синусҳо, сумма ва фарқи косинусҳоро нависед ва онҳоро исбот кунед.

2. Сумма ва фарқи тангенсҳои ду кунҷро дар кадом ҳолат ба ҳосили зарб табдил додан мумкин аст?

125. Ифодаҳоро ба ҳосили зарб табдил диҳед:

а) $\sin 50° + \sin 20°$; *б*) $\sin 18° - \sin 10°$; в) $\cos 26° + \cos 14°$;

г) $\cos 7° - \cos 19°$; д) $\sin 36° - \cos 16°$; е) $\sin\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{12}$.

126. Ба ҳосили зарб табдил диҳед:

а) $tg\frac{4\pi}{5} - tg\frac{3\pi}{5}$; б) $tg\frac{\pi}{12} + tg\frac{\pi}{3}$; в) $\sin 5\alpha - \sin 3\alpha$;

127. Ба ҳосили зарб табдил диҳед:

а) $\cos 4\alpha - \cos 6\alpha$; б) $tg3\alpha - tg\alpha$; в) $tg2\alpha + tg3\alpha$;

128. Ба ҳосили зарб табдил диҳед ва содда кунед:

а) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$; б) $\sin\frac{\pi}{10} + \sin\frac{\pi}{12}$; в) $\cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{18}$;

г) $\sin 4\alpha + \sin 2\beta$; д) $\sin(40° + \alpha) - \sin(40° - \alpha)$;

е) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$.

129. Айниятро исбот кунед:

а) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=tg\dfrac{\alpha+\beta}{2}$; б) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

в) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$; г) $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

Машқҳо барои такрор

130. Ҳосили зарбро ба сумма табдил диҳед:

а) $\sin 20°\cdot\cos 10°$; б) $\cos 15°\cdot\sin 5°$;

в) $\sin 50°\cdot\sin 15°$; г) $\cos 43°\cdot\cos 45°$.

131. Қимати ифодаро ёбед:

а) $2\sin\pi-2\cos\dfrac{3\pi}{2}+3tg\dfrac{\pi}{4}-ctg\dfrac{\pi}{2}$; б)

$\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+3\cos\dfrac{\pi}{3}-tg\dfrac{\pi}{6}+ctg\dfrac{\pi}{3}$.

132. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $x^2-2x-48>0$; б) $3x^2-4x-15>0$.

133. Асоси секунҷа аз баландиаш 5 см зиёд буда, масоҳаташ ба 42 см^2 баробар аст. Асос ва баландии секунҷаро ёбед.

§4. Табдилдиҳии айниятии ифодаҳои тригонометрӣ Хосиятҳо ва графики функсияҳои тригонометрӣ

15. Формулаҳое, ки функсияҳои тригонометриро ба воситаи тангенси нисфи кунҷ ифода мекунанд

Дар алгебраи синфи 9 айниятҳои асосии тригонометрии $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $ctg\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ - ро ба табдилдиҳии ифодаҳои тригонометрӣ истифода бурда будем (ниг. алгебра 9. §2 п. 31). Ҳоло табдилдиҳиҳои нисбатан мураккабро меомӯзем. Функсияҳои тригонометрии синус, косинус, тангенс ва котангенс ба мо имконият медиҳанд, ки як ифодаро ба тарзҳои гуногун нависем. Савол ба миён меояд, ки оё мумкин нест, ки ягон функсияро гирифта, функсияҳои боқимондаро ба воситаи он ифода намоем. Агар ба сифати ин гуна функсия синусро гирем, он гоҳ дар бисёр фомулаҳо решаи квадратӣ ҳосил мешавад. Масалан, агар $\sin 2\alpha$ - ро ба воситаи $\sin\alpha$ ифода намоем, он гоҳ ҳосил мекунем:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\sin\alpha(\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha})=\pm 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Ин гуна формулаҳо барои истифода ноқулай мебошанд. Агар ба сифати ин гуна функсия $tg\frac{\alpha}{2}$ - ро гирем, он гоҳ $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\alpha,$ $ctg\alpha$ ба таври ратсионалӣ, яъне бе решаи квадратӣ ба воситаи он ифода карда метавонем. Ҳоло ин формулаҳоро меорем:

$$\sin\alpha=\sin 2\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos\alpha=\cos 2\frac{\alpha}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Адади 1 – ро ба намуди $1=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}$ ифода намуда формулаҳои болоиро ин тавр менависем:

$$\sin\alpha=\sin 2\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}},\quad \cos\alpha=\cos 2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Сурат ва махраҷи ҳар кадоме аз касрҳоро ба $\cos^2\frac{\alpha}{2}\neq 0$ тақсим карда, баъд $\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ - ро ба $tg^2\frac{\alpha}{2}$ ва $\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ - ро ба $tg\frac{\alpha}{2}$ иваз намуда, ба ифодаҳои зерин соҳиб мешавем:

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};}\quad \boxed{\cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};}\quad \boxed{tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}};}\quad \boxed{ctg\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\alpha}.}$$

Ин формулаҳоро истифода бурда, функсияи $y=a\sin\alpha+b\cos\alpha+c$ - ро ба таври ратсионалӣ ба воситаи $tg\frac{\alpha}{2}$ ифода мекунем.

Мисоли 1. $2\sin\alpha+3\cos\alpha-1$ - ро ба воситаи $tg\frac{\alpha}{2}$ - ифода мекунем.

Ҳал. $2\sin\alpha+3\cos\alpha-1=2\dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}+3-3\dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}-1=$

$$=\frac{4tg\frac{\alpha}{2}+3-tg^2\frac{\alpha}{2}-1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{-4tg^2\frac{\alpha}{2}+4tg\frac{\alpha}{2}+2}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Мисоли 2. $\sin 4\alpha+\cos 4\alpha\cdot tg2\alpha$ - ро ҳангоми $tg2\alpha=4$ будан ҳисоб мекунем.

Ҳал. $\sin 4\alpha+\cos 4\alpha\cdot tg2\alpha=\dfrac{2tg2\alpha}{1+tg^2 2\alpha}+\dfrac{1-tg^2 2\alpha}{1+tg^2 2\alpha}\cdot\dfrac{1}{tg2\alpha}=$

$$=\frac{2\cdot 4}{1+16}+\frac{1-16}{1+16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{8}{17}-\frac{15}{17}\cdot\frac{1}{4}=\frac{32-15}{17\cdot 4}=\frac{17}{17\cdot 4}=\frac{1}{4}.$$

Мисоли 3. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ - ро ҳангоми $tg\dfrac{\alpha}{2}=0{,}5$ будан ҳисоб мекунем.

Ҳал. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=-\left(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha\right)=-\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\cdot$

$$\cdot\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=-\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5};$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\frac{9}{25}-1=-\frac{7}{25}$$

Ҳамин тариқ, $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=-\dfrac{7}{25}$ мебошад.

?

1. Формулаҳое, ки $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\alpha$ - ро ба воситаи тангенси нисфи кунҷ ифода мекунад, нависед.

2. Ин формулаҳо дар кадом ҳолат маъно доранд?

134. Ҳисоб кунед:

а) $\sin 4\alpha$, агар $tg2\alpha=3$; б) $\cos 4\alpha$, агар $tg2\alpha=8$;

в) $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha,$ агар $tg\frac{\alpha}{2} = 0,5$ бошад.

135. Ёбед:

а) $\cos\alpha + \sin\alpha,$ агар $tg\frac{\alpha}{2} = 3;$ б) $\sin\alpha - \cos\alpha,$ агар $tg\frac{\alpha}{2} = 3$ бошад.

136. Кадоме аз инҳо калонанд:

$tg2\alpha$ ё $2tg\alpha$, ки дар ин ҷо $0° < \alpha < 90°$ буда, $\alpha \neq 45°$ аст?

137. Дода шуда аст: $tg\alpha = -0,75,\ tg\beta = 2,4;\quad 90° < \alpha < 180°;$ $0° < \beta < 90°.$

Ёбед: а) $\sin(\alpha - 2\beta);$ б) $\cos(\alpha + 2\beta)$ - ро.

138. $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ - ро ҳисоб кунед, агар $tg\frac{\alpha}{2} = -2,4$ ва $90° < \frac{\alpha}{2} < 135°$ бошад.

Машқҳо барои такрор

139. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\frac{\cos 68° - \cos 22°}{\sin 68° - \sin 22°};$ б) $\frac{\sin 130° + \sin 110°}{\cos 30° + \cos 110°}.$

140. $\sin 2\alpha$ - ро ҳисоб кунед, агар $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ ва $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бошад.

141. Суммаи ду адад ба 20 ва ҳосили зарбашон ба 96 баробар аст. ин ададҳоро ёбед.

16. Функсияҳои тригонометрии аргументи ададӣ ва хосиятҳои онҳо

Дар мавзӯъҳои гузашта функсияҳои тригонометриро омӯхтем, ки аргументи онҳо аз кунҷ ва камонҳо иборат буданд. Акнун функсияҳои тригонометрии аргументи ададиро дида мебароем. Масалан, агар мо дар бораи функсияи квадратии $y = ax^2$ сухан ронем, он гоҳ x танҳо ададро ифода мекунад.

Масалан, он адад дар қонуни Ҷоул – Лентс $(Q = JR^2)$ муқовимати занҷири электрониро ифода мекунад.

Таъриф. ***Синуси адади х гуфта, адади ба синуси кунҷи х радиан баробарро меноманд. Косинуси адади х гуфта ба косинуси кунҷи х радиан баробарро меноманд.***

Айнан ҳамин тавр дигар функсияҳои тригонометрии аргументашон ададӣ муайян карда мешавад. Масалан $\cos 3$ (яъне косинуси адади 3) косинуси кунҷест, ки бо 3 радиан чен карда мешавад, $\sin 0{,}5$ синуси кунҷеро ифода мекунад, ки вай ба 0,5 радиан баробар аст, $\cos 1{,}2$ косинуси кунҷеро ифода мекунад, ки он ба 1,2 радиан баробар аст, $tg(\cos\pi) = tg(-1) = -tg1,$ ки дар ин ҷо $tg1$ тангенси кунҷеро ифода мекунад, ки он ба 1 радиан баробар аст.

Дар ин ҷо хосиятҳои функсияҳои тригонометрии аргументи ададиро меомӯзем.

Чи тавре, ки мо медонем, y функсияи аргументи x мебошад, ки ин чунин маъно дорад: қонуни мувофиқати байни тағйирёбандаҳо мавҷуд аст, ки аз рӯи он ба ҳар гуна қимати аргументи x ягон қимати муайяни функсияи y мувофиқ меояд. Ин мувофиқкуниро мо рамзан $y = f(x)$ менависем.

Маҷмӯи ҳамаи қиматҳои аргумент, ки барояшон функсия дорои маъно аст, соҳаи муайянии функсия номида мешавад.

Функсияҳои тригонометрӣ соҳаи зерини муайянӣ доранд:

а) Ҳар яке аз функсияҳои $\cos\alpha$ ва $\sin\alpha$ қимати муайян доранд. Дар ҳақиқат, дар давра аз нуқтаи аввалаи $P_0(1;0)$ сар карда, камони ба адади дилхоҳи α ченшвандаро кашидан мумкин аст. (Расми 3).

Инак, ***маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ соҳаи муайянии функсияҳои* cosα *ва* sinα *аст.***

б) Функсияи $tg\alpha$ барои камони дилхоҳ ғайр аз камонҳое, ки бо ададҳои $\frac{\pi}{2} + k\pi$ тангенс надорад. Ин аз таърифи тангенс ҳамчун нисбати синус бар косинус бармеояд.

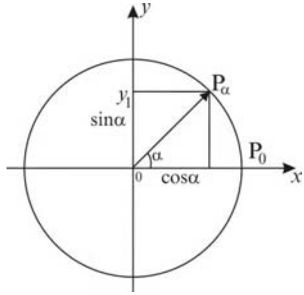
Маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқие, ки ба $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ***баробар нестанд, яъне фосилаҳои беохир бисёри ...,*** $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}),(\frac{\pi}{2};3\frac{\pi}{2}),\quad ...(3\frac{\pi}{2};5\frac{\pi}{2})$ ***соҳаи муайянии тангенс мебошад.***

в) Маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқие, ки ба $k\pi$ ***баробар набуда, яъне фосилаҳои беохир бисёри ...,*** $(-\pi;0),(0;\pi),(\pi;2\pi)$ ***..., соҳаи муайянии функсияи ctgα мебошад.***

(камонҳои бо $k\pi$ ченшаванда котангенс надоранд).

Хосиятҳои маҳдудӣ ва номаҳдудии функсияҳои тригонометриро муоина менамоем.

Агар чунин адади мусбати M мавҷуд бошад, ки барои ҳамаи қиматҳои аргумент бузургии мутлақи функсия аз адади M калон набошад, функсияи маҳдуд номида мешавад. Агар бузургии мутлақӣ функсия ҳаргуна қимати калон гирифта тавонад, он гоҳ вай номаҳдуд номида мешавад.



Расми 3

Функсияҳои cosα ва sinα маҳдуд мебошанд, чунки бузургии мутлақи қиматҳои онҳо аз 1 калон шуда наметавонанд:

$$|\cos\alpha| \le 1, \quad |\sin\alpha| \le 1.$$

Функсияҳои tgα ва ctgα номаҳдуданд, чунки ҳар яки онҳо қимати дилхоҳи ҳақиқӣ гирифта метавонанд.

Ин тасдиқот аз айниятҳои асосии тригонометрии $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ва $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ бармеояд.

Мисоли 1. Кадоме аз ин ададҳо мусбат ва кадоме манфианд:

$\sin 67°, \cos 267°;\ \cos 375°, \sin(-68°);\ \cos(-68°), \sin 2.$

Ҳал. $\sin 67° > 0,$ чунки кунҷи $67°$ дар чоряки якум ҷойгир аст.

Дар ин маврид синус мусбат хоҳад буд. $\cos 267° < 0$ чунки $267°$ дар чоряки сеюм ҷойгир аст, ки дар он ҷо косинус манфӣ мебошад.

$\cos 375° > 0,$ чунки кунҷи $375°$ дар чоряки якум ҷойгир аст, дар ин чоряк косинус мусбат аст.

$\sin(-68°) < 0,$ чунки $-68°$ дар чоряки чорум ҷойгир аст, дар ин ҷо синус манфӣ аст.

$\cos(-68°) > 0,$ чунки $-68°$ дар чоряки чорум ҷойгир мебошад, дар ин ҷо косинус мусбат аст.

$\sin 2 > 0,$ чунки кунҷе, ки бузургиаш ба 2 радиан баробар аст, дар чоряки дуюм ҷойгир мебошад, ки дар ин ҷо синус мусбат аст.

$$\sin 2 = \sin\frac{2\cdot 180°}{\pi} = \sin\frac{360°}{3{,}14} = \sin 115°3' > 0.$$

Мисоли 2. Аломати ифодаҳоро муайян мекунем:

а) $\sin 3$; б) $\cos 6$; в) $tg9$; г) $ctg12$; д) $\cos(-5)$;

е) $tg(-10)$; ж) $\sin(-15)$; з) $ctg(-20)$.

Ҳал. $\sin 3 > 0$ зеро кунҷе, ки бузургиаш ба 3 радиан баробар аст, дар чоряки дуюм ҷойгир мебошад. $\cos 6 > 0,$ зеро кунҷе, ки бузургиаш ба 6 радиан баробар аст, дар чоряки чорум ҷойгир мебошад.

$tg9 < 0$ зеро кунҷе, ки бузургиаш ба 12 радиан баробар аст, кунҷи чоряки чорум мебошад.

Айнан ба монанди боло муҳокима ронда, ҳосил мекунем:

$\cos(-5) > 0;\ tg(-10) < 0;\ \sin(-15) < 0;\ ctg(-20) < 0.$

Мисоли 3. Ҳангоми маълум будани $\sin\alpha = -\frac{1}{8}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ қимати $\cos\alpha$ - ро меёбем.

Ҳал. $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{64}} = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}.$

Аломати пеш аз решаро муайян мекунем. Аз рӯи шарт $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ (яъне ин кунҷ дар чоряки сеюм ҷойгир аст), ки косинус дар он манфӣ мебошад, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{63}}{8}$ хоҳад шуд.

?

1. Ба синус ва косинуси адади x таъриф диҳед.
2. Соҳаи муайянии функсияро таъриф диҳед.
3. Соҳаи муайянии функсияҳои $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\alpha,$ $ctg\alpha$ - ро баён кунед.
4. Чигуна функсияро маҳдуд меноманд?
5. Оё функсияҳои $tg\alpha$ ва $ctg\alpha$ маҳдуданд?

142. Аломати ифодаро муайян кунед:

а) $\sin 70°\cdot\cos 70°\cdot tg100°$; б) $\sin 130°\cdot\cos(-15°)\cdot tg(-100°)$; в) $\sin 1\cdot\cos 3\cdot tg7$; г) $\sin 8\cdot\cos 0{,}2\cdot tg(-6{,}2)$.

143. Агар қимати α ба:

а) $\frac{3}{7}\pi$; б) $\frac{8}{9}\pi$; в) $\frac{12}{7}\pi$; г) $-\frac{7}{9}\pi$, баробар бошад, қиматҳои $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\alpha,\ ctg\alpha$ - ро муайян кунед.

144. Магар синус ва косинуси як адад мувофиқан ба ададҳои зер баробар шуда метавонанд:

а) $-\frac{7}{25}$ ва $\frac{24}{25}$; б) 0,4 ва 0,7; в) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ва $-\frac{\sqrt{5}}{3}$; г) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ ва $\frac{1}{\sqrt{5}}$?

145. Магар тангенс ва котангенси як адад мувофиқан ба ададҳои зер баробар шуда метавонанад:

а) $-\frac{3}{5}$ ва $-\frac{5}{3}$; б) $\left(\sqrt{3}-2\right)$ ва $\left(\sqrt{3}+2\right)$;

в) 2,4 ва $-\frac{5}{12}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ва $\frac{2\sqrt{5}}{5}$?

146. Аз рӯи қимати маълуми яке аз функсияҳои тригонометрӣ ва фосилае, ки дар он α воқеъ аст, қиматҳои се функсияи асосии тригонометрии дигарро ёбед:

а) $\sin\alpha = -0{,}8,\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

в) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; г) $\cos\alpha = \frac{15}{17}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

147. Қимати ифодаҳои зеринро муқоиса кунед:

$\sin 0°;\ \cos 90°;\ \cos 270°;\ \sin 180°;\ \sin 270°;\ \cos 180°.$

Машқҳо барои такрор

148. Бе сохтан, координатаҳои нуқтаҳои буриши:

а) параболаи $y = x^2 - 3x + 3$ ва хати рости $2x - y - 1 = 0$ - ро ёбед;

б) параболаи $y = 2x^2 - x + 1$ ва хати рости $x = 1{,}5$ - ро ёбед;

в) давраи $x^2 + y^2 = 100$ ва хати рости $x + y = 14$ - ро ёбед;

149. Экстремум ва экстремалҳои функсияи $y = -x^2 + 6x - 8$ - ро ёбед.

150. Як адад аз адади дигар 7 воҳид калон аст ва ҳосили зарбашон ба 12 баробар аст мебошад. Ин ададҳоро ёбед.

151. Ҳисоб кунед:

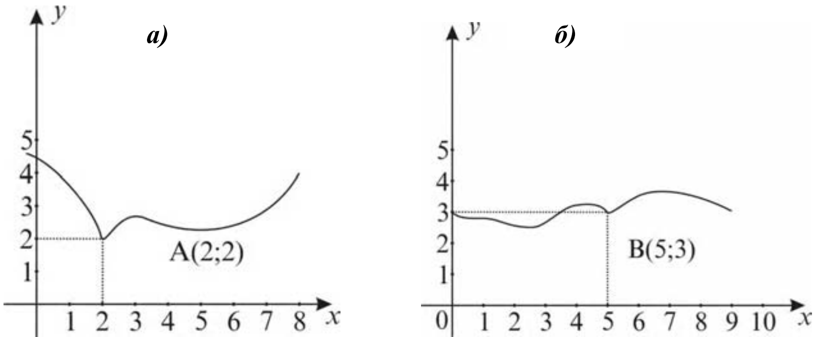
а) $\cos 0{,}3\pi \sin 0{,}2\pi + \sin 0{,}3\pi \cdot \cos 0{,}2\pi$;

б) $\cos 35° \cdot \sin 65° - \sin 35° \cdot \cos 65°$.

17. Экстремуми функсияҳо

Мо дар алгебраи синфи 9 экстремуми функсияҳои ихтиёриро истисно намуда, фақат экстремуми функсияҳои квадратиро омӯхта будем (ниг. ба алгебра 9, п.8). Дар он ҷо қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияҳоро қиматҳои экстремалӣ ё экстремуми он номида будем. Нуқтаҳое, ки дар онҳо ин қиматҳо қабул карда мешаванд, экстремалӣ ё экстремал номида шуда буд.

Ҳангоми тадқиқ кардани функсияи ихтиёрӣ аз мафҳуми «атроф» истифода мебаранд. Атрофи нуқтаи $x = a$ гуфта фосилаи хурдеро меноманд, ки ин нуқтаро дар бар мегирад. (барои маълумоти пурра ба саҳ. 147 нигаред).



Расми 4

Масалан фосилаи (1;4) яке аз атрофҳои 3, фосилаи (-3,3; -2] атрофи нуқтаи -3 мебошад.

Графики дар расми 4 а, б тасвиршударо омӯхта, якчанд нуқтаҳои ҷолиби диққатро ёфтан мумкин аст. онҳо нуқтаҳое мебошанд, ки камшавӣ ва афзуншавии функсияро аз ҳамдигар ҷудо мекунанд.

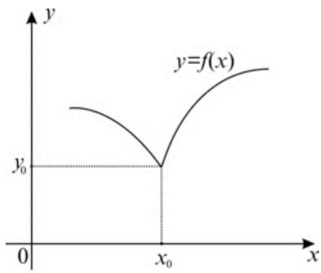
Ин нуқтаҳо нуқтаҳои A(2;2) B(5;3) (расми 4 а, б) мебошанд.

Онҳоро мувофиқан нуқтаҳои минимум, максимум ё нуқтаҳои экстремалии функсия меноманд.

Ҳангоми сохтани графики функсияи мушаххас чунин нуқтаҳоро пешакӣ меёбем. Масалан, барои функсияи $\sin x$ ин нуқтаҳо $\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (k – адади ихтиёрии бутун) мебошад. барои муайянӣ $x_0 = \frac{\pi}{2}$ - ро мегирем. Ин нуқта нӯги тарафи рости яке аз фосилаҳои афуншавии синус мебошад ва аз ҳамин сабаб агар $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ бошад, $1 = \sin x_0 > \sin x$ аст. ғайр аз ин $x_0 = \frac{\pi}{2}$ нӯги тарафи чапи фосилаи камшавӣ мебошад ва пас, ҳангоми $\frac{\pi}{2} < x \le \frac{3\pi}{2}$ будан $\sin x = \sin x_0$ аст. Инак, барои ҳар гуна *x*, дар атрофи $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ - и нуқтаи $x_0 = \frac{\pi}{2}$ воқеъ аст, нобаробарии $\sin\frac{\pi}{2} > \sin x$ ҷой дорад; бинобар ин $x_0 = \frac{\pi}{2}$ нуқтаи **максимуми функсияи синус** мебошад.

Баръакс, дар нуқтаи $-\frac{\pi}{2}$ камшавӣ бо афзуншавӣ иваз мешавад (чаптари $-\frac{\pi}{2}$ функсияи кам мешавад ва росттараш меафзояд). Айнан ҳамин тавр муҳокима ронда ҳосил мекунем, ки дар ягон атрофи нуқта $x = -\frac{\pi}{2}$, $\sin x > \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ мебошад ва бинобар ҳамин $x = -\frac{\pi}{2}$ нуқтаи **экстремали минимуми функсияи синус** мебошад.

Қиматҳои максимум ва минимуми функсияҳоро дар якҷоягӣ экстремуми (ё қиматҳои экстремалӣ) функсия меноманд. Таърифи дақиқи нуқтаҳои экстремумро баён мекунем.



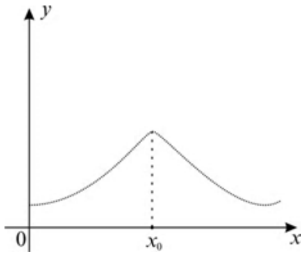
Расми 5

Таърифи 1. ***Нуқтаи x₀ барои функсияи*** $y = f(x)$ ***нуқтаи минимум номида мешавад, агар барои ҳамаи x – ҳои ягон атрофи нуқтаи x₀ нобаробари*** $f(x) \geq f(x_0)$ ***ҷой дошта бошад. (расми 5)***

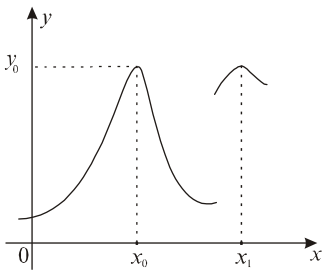
Таърифи 2. ***Нуқтаи x₀ барои функсияи*** $y = f(x)$ ***нуқтаи максимум номида мешавад, агар барои ҳамаи қиматҳои x – ҳои ягон атрофи нуқтаи x₀ нобаробарии*** $f(x) \leq f(x_0)$ ***ҷой дошта бошад. (расми 6 а, б)***

Мувофиқи таъриф қимати функсияи дар нуқтаи максимум (x_0) байни нуқтаҳои ягон атрофи ин нуқта калонтарин мебошад (расми 6 а, б ва расми 7 нуқтаҳои x_1, x_3, x_5, x_7). Қимати функсияи дар нуқтаи минимум дар ягон атрофи ин нуқта хурдтарин мебошад (расми 7 – нуқтаҳои x_2, x_4, x_6).

а)



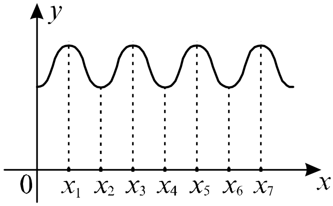
б)



Расми 6

Нуқтаи максимумро бо $x_{\max}$ ***ва нуқтаи минимумро бо*** $x_{\min}$ ***ишорат мекунанд. Қиматҳои функсияро дар ин нуқтаҳо мувофиқан ба*** $\max$ ***ва*** $\min$ ***ишорат мекунанд.*** max(максимум) ва min(минимум) аз калимаҳои лотинии maximum ва minimum гирифта шуда, маънои онҳо мувофиқан аз ҳама калонтарин ва аз ҳама хурдтарин мебошанд. Максимум ва минимуми функсияро дар якҷоягӣ экстремум меноманд.

Акнун ба ёфтани фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавӣ, нуқтаҳои максимум ва минимум, максимум ва минимумҳои функсияҳои мушаххас мисолҳо меорем.



Расми 7

Мисоли 1. Экстремуми $y = \sin\frac{x}{2}$ -ро дар фосилаи $[-\pi;3\pi]$ меёбем.

Ҳал. Функсияро дар порчаи $[-\pi;3\pi]$ меомӯзем.

а) Функсияи дар порчаи $[-\pi;\pi]$ аз -1 то 1 меафзояд, чунки ба қимати хурди аргумент, қимати хурди функсия мувофиқ меояд ва дар порчаи $[\pi;3\pi]$ аз +1 то -1 кам мешавад, чунки ба қимати хурди аргумент қимати калони функсия мувофиқ меояд.

б) Дар нуқтаи $x = \pi$ қимати калонтарини функсия ба 1 баробар аст ва дар нуқтаи $x = 3\pi$ функсия ба қимати хурдтарини -1 доро мешавад.

в) Дар нуқтаи $x = \pi$ афзуншавӣ ба камшавӣ иваз мешавад, бинобар ин $x = \pi$ нуқтаи максимуми функсия мебошад ва баръакс, дар нуқтаи $x = 3\pi$ камшавӣ ба афзуншавӣ иваз мешавад (то чаптари функсия кам мешавад ва баъди росттараш меафзояд) бинобар ин $x = 3\pi$ нуқтаи минимуми функсия мебошад, пас

$$y_{\max} = y(\pi) = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad y_{\min} = y(3\pi) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$$

Ҷавоб: Дар $[-\pi;\pi]$ меафзояд; дар $[\pi;3\pi]$ кам мешавад;

$$y_{\max} = y(\pi) = 1; \quad y_{\min} = y(3\pi) = -1.$$

Мисоли 2. Экстремуми $y = 3\cos\frac{x}{2}$ - ро дар фосилаи $[-\pi;3\pi]$ меёбем.

Ҳал. Функсияро дар порчаи $[-\pi;3\pi]$ меомӯзем.

а) Функсияи дар порчаи $[-\pi;0]$ аз 0 то 3 меафзояд, зеро ба қимати хурди аргумент қимати хурди функсия мувофиқ меояд ва дар порчаи $[0;2\pi]$ аз 3 то -3 кам мешавад, зеро дар фосила ба қимати калони аргумент қимати хурди функсия мувофиқ меояд. Дар порчаи $[2\pi;3\pi]$ функсия аз -3 то 0 меафзояд.

б) Дар нуқтаи $x = 0$ қимати калонтарини функсия ба 3 баробар буда дар нуқтаи $x = 2\pi$ қимати хурдтарин ба -3 баробар аст.

в) Дар атрофи нуқтаи $x = 0$ афзуншавӣ ба камшавӣ иваз мешавад, бинобар ин дар нуқтаи $x = 0$ функсия ба максимум доро буда, максимумаш ба 3 баробар. Дар нуқтаи $x = 2\pi$ камшавии функсия ба афзуншавӣ иваз мешавад, пас

$y_{\max} = y(0) = 3,\ y_{\min} = y(2\pi) = -3.$

Ҷавоб: Дар $[-\pi;0]$ ва $[2\pi;3\pi]$ меафзояд, дар $[0;2\pi]$ кам мешавад;

$$y_{\max} = y(0) = 3;\ y_{\min} = y(2\pi) = -3.$$

?

1. Таърифи функсияҳои синус ва косинусро диҳед.
2. Атрофи нуқта чист?
3. Таърифи афзуншавӣ ва камшавии функсияро баён намоед.
4. Таърифи нуқтаҳои максимум ва минимуми функсияро диҳед.

Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавӣ, нуқтаҳои максимум ва минимум, қиматҳои максимум ва минимумҳои функсияро ёбед (106-108).

152. а) $y = 3\sin x$; б) $y = 0{,}5\sin x$; в) $y = 2\cos x + 1$; г) $y = 0{,}5\sin x - 1{,}5$.

153. а) $y = -\sin 2x$; б) $y = \sin 2x$; в) $y = 1 - 2\sin 2x$; г) $y = 1 - 0{,}5\sin 2x$.

154. а) $y = \cos\dfrac{x}{2}$; б) $y = 2\cos\dfrac{x}{2}$; в) $y = -2\cos x + 1$; г) $y = 2\cos x + 1$.

Машқҳо барои такрор

155. Ифодаро пешакӣ содда карда қиматашро ёбед:

а) $\dfrac{\cos 68^\circ - \cos 22^\circ}{\sin 68^\circ - \sin 22^\circ}$; б) $\dfrac{\sin 130^\circ + \sin 110^\circ}{\cos 130^\circ + \cos 110^\circ}$.

156. Ифодаро содда кунед:

а) $\left(\dfrac{2ab}{a^2 - b^2} + \dfrac{a-b}{2a+2b}\right)\cdot\dfrac{2a}{a+b} + \dfrac{b}{b-a}$;

б) $\frac{x}{x-y}-\frac{x^2-xy^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{x}{(x-y)^2}-\frac{y}{x^2-y^2}\right).$

157. Пайдарпаии $\{C_n\}$ прогрессияи арифметикӣ мебошад. Агар $C_3=-19;\ C_3=-11{,}5$ боашд фарқ ва аъзои чоруми онро ёбед.

158. Фарқи дарозии катетҳои секунҷаи росткунҷа ба 5 дм баробар аст. Агар дарозии катети калонро 4 дм зиёд ва дарозии катети хурдро 8 дм кам кунем, он гоҳ дарозии гипотенузаи секунҷаи росткунҷаи ҳосилшуда ба дарозии гипотенузаи секунҷаи додашуда баробар мешавад. Дарозии катетҳои секунҷаи додашударо ёбед.

159. Решаҳои муодилаи квадратӣ ба $x_1=3-\sqrt{2},\ x_2=3+\sqrt{2}$ баробаранд. Ин муодилаи квадратиро тартиб диҳед.

18. Функсияҳои даврӣ

Бисёр ҳодисаҳое, ки мо бо онҳо дар амалия дучор мешавем, хусусияти такроршавандагӣ доранд. Масалан, мавқеъи байни ҳамдигарии Офтоб ва Замин баъди як сол такрор меёбад. Мавқеъи раққосакро дар лаҳзаи вақте, ки бо бузургии даври лапиши он фарқ мекунад, якхела аст. Чунин проссесҳоро даврӣ ва функсияҳоеро, ки онҳоро тасвир менамоянд, функсияи даврӣ меноманд.

Функсияи $y=f(x)$ даврӣ номида мешавад, агар чунин як адади давр ном доштаи $T\neq 0$ мавҷуд бошад, ки қимати функсияи дар вақти ба қимати дилхоҳи аргументи он илова кардани ин адад тағйир наёбад, яъне барои қимати дилхоҳи x шарти $f(x+T)=f(x)$ иҷро гардад.

Функсияҳои асосии тригонометрии $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\alpha,\ ctg\alpha$ даврӣ мебошад. Масалан, барои адади дилхоҳи x ва адади бутуни ихтиёрии k баробарии $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ ҷой дорад. Аз ин ҷо бармеояд, ки $T=2\pi k$ даври функсияи синус аст ($k\neq 0$ адади бутуни ихтиёрӣ).

Азбаски синус ва косинус дар тамоми тири ададӣ муайян буда, барои x – дилхоҳ $\sin(x+2\pi)=\sin x,\ \cos(x+2\pi)=\cos x$ аст, пас, синус ва косинус функсияҳои даврии даври хурдтаринашон 2π мебошанд. Дар ҳақиқат, соҳаи муайянии ин функсияҳо ҳамроҳи ҳар як адади x адади $x+\pi$ ва $x-\pi$ - ро дар бар мегиранд ва баробариҳои $tg(x+\pi)=tgx,\ ctg(x+\pi)=ctg\pi$ дурустанд.

Гуфтаҳои болоро ба намуди се ҷумлаи зерин ҷамъбаст мекунем:

1) Функсияҳои тригонометрӣ функсияҳои даврӣ мебошанд ва даври умумиашон 2π аст.

2) Хурдтарин даври мусбати функсияҳои $\cos\alpha$ ва $\sin\alpha$ ба 2π баробар аст.

3) хурдтарин даври мусбати функсияҳои $tg\alpha$ ва $ctg\alpha$ ба π баробар аст.

Исбот. Қиматҳои дилхоҳи тригонометрӣ аз аргументҳои α ва $\alpha + 2k\pi$ (дар ин ҷо k – адади дилхоҳи бутун) якхелаанд:

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha + \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha,$$

бинобар он ҳар яке аз ададҳои $\pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi$ ва ғайра даври умумии чор функсияи тригонометрӣ мебошанд.

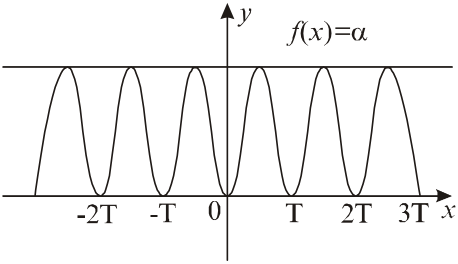
Масалан, 2π даври умумии онҳо.

Барои функсияи $\cos\alpha$ адади 2π даври хурдтарини мусбат мебошад. дар ҳақиқат, агар T даври дилхоҳи косинус бошад, он гоҳ барои қимати дилхоҳи α ифодаи $\cos(\alpha + T)$ ҷой дорад $\alpha = 0$ фарз карда, меёбем, ки $\cos T = \cos 0 = 1$ аст. ба монанди ҳамин исбот карда мешавад, ки 2π даври хурдтарини мусбати синус аст. Барои ин дар айнияти $\sin(\alpha + T) = \sin\alpha$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ гузошта $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ - ро ҳосил мекунем. Аз тарафи дигар мувофиқи формулаҳои мувофиқоварӣ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \cos T$ аст. Пас, $\cos T = 1$ мебошад. Вале дар ҳолати $0 < T < 2\pi$ будан баробарии $\cos T = 1$ ҷой надорад.

Даври функсияи $tg\alpha$ адади π мебошад, зеро барои қимати дилхоҳи α $tg(\alpha + \pi) = tg\alpha$, ки дар ин ҷо $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ҳисоб карда мешавад. Адади π даври хурдтарини мусбати аз π хурдтарини T даври тангенс мешуд, он гоҳ дар айнияти $tg(\alpha + T) = tg\alpha$, $\alpha = 0$ фарз карда мо $tgT = 0$ ҳосил менамудем, ки ин дар ҳолати $0 < T < \pi$ имконпазир аст. ба монанди ҳамин исбот карда мешавад, ки адади π хурдтарин даври мусбати котангенс мебошад.

Даври хурдтарини мусбати функсияро мухтасар даври функсия меноманд. Бинобар ин мегӯянд, ки 2π даври косинус ва синус, π даври тангенс ва котангенс мебошад.

Барои сохтани графики функсияи даврии дорои даври T онро дар порчаи дарозиаш T сохта, баъд хати каҷи ҳосилшударо қад – қади тири *0X* ба таври параллел (ба рост ва ба чап) ба масофаи nT кӯчонидан кифоя аст (расми 8), ки дар ин ҷо n ададӣ натуралии дилхоҳ мебошад.



Дар ҳақиқат, агар $(x_0; y_0)$ нуқтаи графики функсияи даври $y = f(x)$ бошад, он гоҳ нуқтаи $x_0 = nT$ барои қимати дилхоҳи бутуни n ба соҳаи муайяни f муттааллиқ аст ва бинобар даврӣ будани $f(x)$ баробарии $f(x_0 + nT) = f(x_0) = y_0$ дуруст мебошад. Пас, нуқтаи $(x_0 + nT = y_0)$ ки ҳангоми қад – қади тири *0X* параллел кӯчонидни нуқтаи $(x_0; y_0)$ ҳосилшуда низ ба гарафики f тааллуқ дорад.

Эзоҳи 1. Даври функсияе, ки аз сумаи якчанд функсияҳои даврӣ иборат аст, ба хурдтарин каратнокии умумии даври он ҷамъшавандаҳо баробар мебошад.

Эзоҳи 2. Даври функсияҳои $\sin ax$ ва $\cos ax$ ба $\frac{2\pi}{a}$, даври функсияҳои $tgax, ctgax$ мувофиқан ба $\frac{\pi}{a}$ баробар. Дар ин ҷо a ададӣ дилхоҳи ҳақиқӣ мебошад.

Мисолҳои зеринро ҳал мекунем:

1) $\sin(-330°) = \sin(-330° + 360°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$. Дар ин ҷо ба аргумент давраш ҷамъ карда шудааст.

2) $\sin 765° = \sin(45° + 2 \cdot 360°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Дар ин ҷо ба аргумент ду даври синус ҷамъ карда шудааст.

3) $tg\left(-\frac{17\pi}{3}\right) = tg\left(-\frac{17\pi}{3} + 6\pi\right) = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$

Ба аргументи манфӣ $\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$ шаш давр (6π) ҷамъ карда шудааст, ки дар натиҷа аргументи мусбати $\frac{\pi}{3}$ ҳосил шуд.

4) $\sin 1200° = \sin(3 \cdot 360° + 120°) = \sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

5) $\sin\frac{41}{6}\pi = \sin\left(6\pi + \frac{5\pi}{2}\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$

Акнун даври баъзе функсияҳоро меёбем:

6) $y = 3\sin 4x + 6\sin x + \sin(x - \pi) + 5\sin(x + \pi).$

Ҳал. Функсияи додашударо сода менамоем:

$y = 3\sin 4x + 6\sin x + \sin(x - \pi) + 5\sin(x + \pi) =$

$= 3\sin 4x + 6\sin x - \sin x - 5\sin x = 3\sin 4x$

Ҳамин тавр даври $y = 3\sin 4x$. Даври ин функсия мувофиқи эзоҳи ба $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ баробар аст. Ин давр низ даври функсияи додашуда мешавад. Даври ҷамъбастшавандаҳои дигар ба назар гирифта намешавад, чунки суммаи он ҷамъшавандаҳо ба нул баробар аст, яъне

$6\sin x + \sin(x - \pi) + 5\sin(x + \pi) = 0.$

7) $y = \sin 2x + tg\frac{x}{2}.$

Ҳал. Мувофиқи эзоҳи 2 даври ҷамъшавандаи якум $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ буда, даври ҷамъшавандаи дуюм $tg\frac{x}{2}$ ба $T_2 = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$ баробар аст.

Мувофиқи эзоҳи 1 даври функсия додашуда хурдтарин каратнокии ҳар дуи онҳо, яъне $T = 2\pi$ мешавад.

?

1. Даври функсия чист?
2. Чӣ гуна функсияҳоро функсияҳои даврӣ меноманд?
3. Даври функсиҳои $\sin x,\ \cos x,\ tgx,\ ctgx$ - ро номбар кунед.
4. Даври функсияе, ки аз якчанд ҷамъшавандаҳо иборат аст, чӣ гуна ёфта мешавад?

Ҳисоб кунед (114-120):

160. а) $\cos 420°$; б) $\sin 420°$; в) $tg 19\dfrac{\pi}{3}$.

161. а) $ctg 19\dfrac{\pi}{3}$; б) $\cos 405°$; в) $\sin 405°$.

162. а) $tg 1080°$; б) $ctg 1080°$; в) $\cos 390°$.

163. а) $\sin 390°$; б) $\sin 540°$; в) $ctg 540°$.

164. а) $\sin(-330°)$; б) $\sin 765°$; в) $tg\left(-\dfrac{17\pi}{3}\right)$.

165. а) $\sin 1200°$; б) $\sin(-5{,}6\pi)$; в) $tg 135°$.

166. а) $\cos 315°$; б) $\sin\dfrac{5}{4}\pi$; $tg\dfrac{7}{8}\pi$.

Машқҳо барои такрор

167. Ифодаро содда кунед:

а) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{tg\alpha - tg\beta}$; б) $\dfrac{ctg\alpha + ctg\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

168. Графики функсияро созед ва хоситҳояшро баён кунед:

а) $y = 0{,}5x^2 - 3x + 4$; б) $y = 4 - 0{,}5x^2$; в) $y = 6x - 2x^2$.

169. Айниятро исбот кунед:

а) $1-(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin 2\alpha$; б) $y = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$.

170. Ду коргар якҷоя кор карда, супоришро дар 30 соат иҷро карда метавонанд. Агар коргари якум танҳо кор кунад, ба иҷрои ин супориш назар ба коргари дуюм (агар ӯ ҳам танҳо кор кунад) 11 соат зиёдтар вақт сарф мекунад. Ҳар як коргар ин супоришро дар чанд соат иҷро карда метавонад?

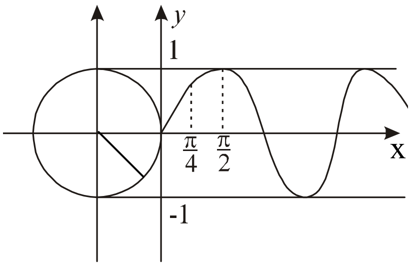
19. Графики функсияи *y*=sin*x*

Сохтани графики функсияҳои гуногунро дар синфҳои 7-9 омӯхта будем. Дар синфи 7 графики функсияи $y = kx + b$, $y = kx$, дар синфи 8 графики функсияи $y=\frac{k}{x}$, дар синфи 9 графики функсияи $y=ax^2+bx+c$ - ро омӯхтем.

Акнун сохтани графики функсиҳои тригонометриро нишон медиҳем.

Дар вақти сохтани график қимати аргумент бо нуқтаҳо дар тири абсисаҳо тасвир карда мешавад, бинобар ин аргументи функсиҳои тригонометриро бо ҳарфи x ифода намудан равост.

Дар вақти аз $x=0$ то $x=2\pi$ ё ки ченаки градуси аз $0°$ то $360°$ тағйир ёфтани қимати функсияи $y=\sin x$ - ро графкӣ тасвир мекунем.



Расми 9

Инро бо тарзи зер иҷро кардан осон аст.

Давраи радиусаш воҳидро кашида, онро ба 16 ҳиссаҳои баробар тақсим мекунем (расми 9). Ба ҳар як тақсимоти камон кунҷи маркази $20°30'$ ё ки бо ченаки радианӣ $\frac{\pi}{8}$ (радиан) мувофиқ меояд. Ин кунҷҳоро ба воситаи радиус ва тири (*0X*) қайд мекунем.

Инчунин дар тири *0X* порчаи $[0;2\pi]$ - ро ба 16 қисми баробар тақсим мекунем. Аз ҳар яке аз нуқтаҳои тақсимоти давра ба тири $0x$ ва аз ҳар яке аз порчаҳои тақсимотии порчаи $[0;2\pi]$ - и тири $0x$ ва тири $0y$ параллел хатҳои рости гузаронидашуда дар нимҳамвории рости $x0y$ 16 – то нуқтаҳо ҳосил мешаванд, онҳоро пайваст намуда хати каҷеро ҳосил мекунем.

Ин хати каҷ синусоида номида мешавад. Мо танҳо як «мавҷи» синусоидаро сохтем, ки он ба аз 0 то 2π тағйир ёфтани қимати аргумент мувофиқ меояд. Аз сабаби даврӣ будани функсияи $y=\sin x$ дар натиҷаи аз 2π то 4π тағйир ёфтани аргументи x мавҷи дигари синусоида ҳосил мешавад, ки он бо аввала якхела мебошад. Агар мо қисми хати каҷ, ки ба он аз 0 то -2π тағйир ёфтани аргумент их мувофиқ меояд, сохтанӣ шавем, боз ҳамон ҳодисаро ҳосил мекунем. График рафти тағйирёбии функсияро инъикос мекунад. Аз график x_0 хосияти функсияи $y=\sin x$–ро нишон додан осон аст.

1) Барои қиматҳои дилхоҳи ҳақиқии аргумети x функсияи $y=\sin x$ муайян аст, яъне ҳамаи ададҳои ҳақиқие, ки ба сифати ченаки радиани кунҷ қабул карда мешаванд, соҳаи муайянии он мебошад.

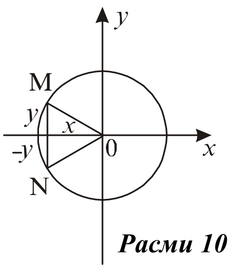
2) Ҳамаи қиматҳои функсияи $\sin x$ порчаи $[-1;1]$ - ро пур мекунад, яъне $-1 \le \sin x \le 1$ аст.

3) Функсия ҷуфт нест, зеро $\sin(-x)=-\sin x$. Дар ҳақиқат, фарз мекунем, ки кунҷи додашуда α бошад; кунҷи $(-\alpha)$ - ро дида мебароем. кунҷҳои ба ҳам муқобили α ва $(-\alpha)$ дар натиҷаи аз вазъияти аввалини умумии 0А ба самтҳои ба ҳам муқобил як хел гардонидани радиуси ҳаракатнок ташкил меёбад; бинобар он тарафҳои охирони оҳо ОМ ва ОN нисбат ба тири абсисса симметрӣ мебошанд (расми 10). Аз ин ҷо, абсиссаҳои нуқтаҳои М ва N баробар буда, ординатаҳои онҳо муқобили якдигар мебошанд. Координатаҳои нуқтаи $M(x;y)$ - ро, ки $x=\cos\alpha$ ва y=sin(α) мебошад, бо координатаҳои нуқтаи $N(x;-y)$, ки дар ин ҷо $x=\cos(-\alpha)$ ва - y=sin(α) аст, муқоиса карда, ҳосил мекунем:

$$\cos\alpha=\cos(-\alpha);\ \sin(-\alpha)=-\sin\alpha.$$

Графики он ҳамчун функсияи тоқ нисбат ба ибтидои координатаҳо симметрӣ мебошад. (ниг. Алгебра 9. §1. п3).

4) Функсияи $y=\sin x$ дар фосилаи $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ аз -1 то 1 меафзояд ва дар фосилаи $\left(\dfrac{\pi}{2},3\dfrac{\pi}{2}\right)$ аз 1 то -1 кам мешавад.



Расми 10

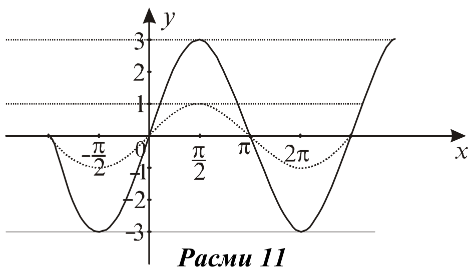
5) Ҳангоми $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$ будан функсия қимати калонтарин дорад. дар ин ҷо k – адади бутуни дилхоҳи мусбат, манфӣ ва нул аст. дар ин нуқтаҳо синус ба 1 баробар мебошад.

6) Ҳангоми $x=-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}+2\pi,\ -\dfrac{\pi}{2}+4\pi,...$ ва умуман ҳангоми $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$ будан, синуси қимати хурдтарини ба -1 баробарро қабул мекунад.

7) Ҳангоми $x = \ldots -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$ ва умуман ҳангоми $x = \pi k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ будан, функсия ба нол баробар мешавад.

Мисоли 1. Графики функсияи $y = 3\sin x$ - ро месозем.

Ҳал. Ҳаминро мушоҳида кардан кифоя аст, ки барои қимати мазкури x ординатаи графики $y = 3\sin x$ ба ординатаи сечанд гирифташудаи синусоидаи муқаррарӣ баробар аст. Пас, графки $y = 3\sin x$ синусоиди деформатсияшуда буда, дар натиҷаи се маротиба калон кардани тамоми ординатаҳои синусоидаи муқаррарӣ ҳосил мешавад (расми 11). Функсияи $y = 3\sin x$ монанди функсияи $y = \sin x$ ҳамон хел фосилаи аломатҳояшон доимӣ ва ҳамон хел даври 2π дорад. Қимати калонтаринаш ба 3 ва хурдтаринаш ба -3 баробар мебошад.



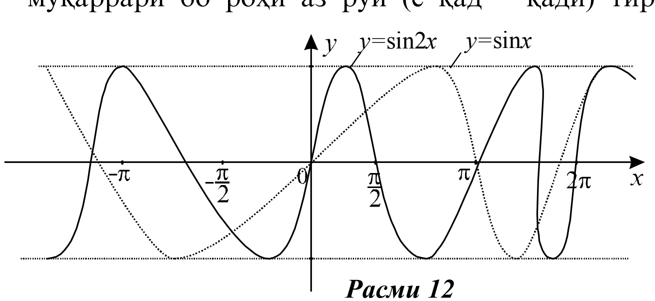
Расми 11

Мисоли 2. Графики функсияи $y = \sin 2x$ - ро месозем.

Ҳал. Ҳаминро мушоҳида кардан кифоя аст, ки барои қимати додашудаи x қимати функсияи $y = \sin 2x$ ба ординатаи синусоидаи муқаррарӣ дар нуқтаи абсиссааш дучанд гирифта шудаи $2x$ баробар аст.

Масалан, барои $x = \dfrac{\pi}{6}$, $y = \sin 2\dfrac{\pi}{6} = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ барои $x = \dfrac{\pi}{4}$, $y = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ аст.

Бинобар ин, графики функсияи $y = \sin 2x$ - ро аз синусоидаи муқаррарӣ бо роҳи аз рӯи (ё қад – қади) тири $0x$ ду маротиба фишурдан (ду маротиба давращро хурд кардан) ҳосил кардан мумкин аст (расми 12).



Расми 12

Функсияи $y = \sin 2x$ даврӣ буда, давраш π

мебошад, зеро дар мавриди аргументи он илова кардани π қимати он тағйир намеёбад:

$\sin 2(x+\pi)=\sin(2x+2\pi)=\sin 2x.$ (Дар ин ҳолат мегӯянд, ки зуддии лапиши синусоида, $\omega=2$ аст)

?	**1.** Таърифи соҳаи мавҷудияти функсияро диҳед. **2.** Нуқтаи буриши графики функсияро бо тирҳои координатаҳо чӣ тавр меёбанд. **3.** Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияро чӣ тавр меёбанд. **4.** Хосиятҳои асосии синусро номбар кунед.

171. Графики функсияро созед:

а) $y=\sin\frac{1}{2}x;$ б) $y=\sin 3x;$ в) $y=\frac{1}{2}\sin x;$

г) $y=\frac{1}{2}\sin 3x;$ д) $y=2\sin\frac{1}{2}x;$ е) $y=\frac{1}{2}\sin 2x.$

Машқҳо барои такрор

172. Баробариҳоро санҷед:

а) $\sin 25°+\sin 35°=\cos 5°;$ б) $\cos 58°-\cos 2°=-\sin 28°;$

в) $tg20°+4\sin 20°=\sqrt{3};$ г) $4\cos 20°-\sqrt{3}\cdot ctg20°=-1.$

173. Муодиларо ҳал кунед:

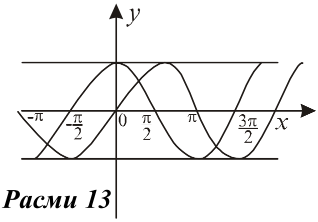
а) $\frac{y+2}{y+1}=\frac{y-2}{1-y}-\frac{4}{y-1};$ б) $7-\frac{48}{9x^2-1}=\frac{6x}{3x-1}-\frac{8}{3x+1}.$

174. Сурати каср аз махраҷи он ба 5 воҳид хурд аст. Агар ба сурати ин каср 17 – ро ва ба махраҷи он адади 2 – ро ҷамъ кунем, он гоҳ касри ба касри додашуда чаппа ҳосил мешавад. Он касрро ёбед.

20. Графики функсияи *y*=cos*x*

Графики функсияи $y=\sin x$ - ро дониста, графики функсияи $y=\cos x$ - ро сохтан осон аст.

Дар ҳақиқат аз формулаҳои мувофиқоварӣ (ниг. п. Алгебра 9 §3) $y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ равшан аст, координатаи графики косинус дар нуқтаи абсиссааш x ба ординатаи синусоидаи муқаррарӣ дар нуқтаи абсиссааш $x+\frac{\pi}{2}$ баробар аст. масалан, дар вақти x=0 ординатаи график $\cos 0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ мебошад; дар вақти $x = \frac{\pi}{2}$ ординатаи он $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ва дар вақти $x = \frac{\pi}{2}$ будан ордината $\sin\pi = 0$ мешавад. Бо роҳи ба тарафи чапи тири абсисаи (расми 13) ба масофаи $\frac{\pi}{2}$ - параллел кӯчонидани синусоида графики пурраи функсияи $y = \cos x$ - ро ҳосил кардан мумкин аст.



Расми 13

Хусусияти ҷуфт будани $\cos x = \cos(-x)$ нишон медиҳад, ки графики он нисбатба тири $0y$ симметрӣ мебошад.

Аз график хосиятҳои зерини косинусро муқаррар мекунем:

1. Функсияи $y = \cos x$ дар тамоми тири ададӣ муайян аст, зеро бо ҳар як адади ҳақиқии x, ки ба сифати ченаки радианӣ қабул карда шудааст, қимати тамоман муайяни косинус мувофиқ меояд.

2. Маҷмӯи қиматҳои функсия порчаи $[-1;1]$ - ро пур мекунад.

3. $y = \cos x$ ҷуфт аст, зеро $\cos(-x) = \cos x$; графики он нисбат ба тири $0y$ симметрӣ мебошад.

4. Функсияи $y = \cos x$ дар фосилаи аз $(0;\pi)$ то -1 кам мешавад ва дар фосилаи $-\pi$; 0 аз -1 то 1 меафзояд.

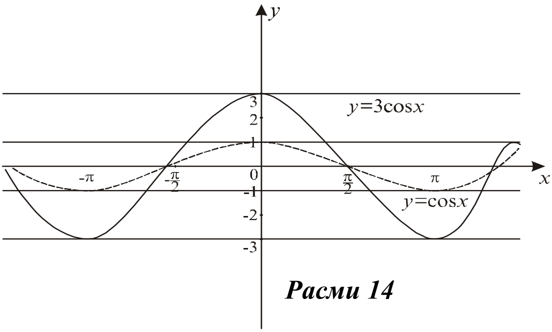
5. Агар $x = 0, 2\pi, 4\pi, ...$ бошад, он гоҳ $\cos x$ дорои қиматҳои калонтарини 1 ва агар $x = \pi, 3\pi, 5\pi, ...$ бошад, он гоҳ $y = \cos x$ дорои қимати хурдтарини -1 аст.

6. Агар аргумент $x = \frac{\pi}{2}$; $3\frac{\pi}{2}$ ва умуман $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ ки $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ бошад қимати функсия ба нол баробар мешавад.

Мисоли 1. Графики функсияи $y = 3\cos x$ - ро месозем.

Ҳал. Барои қимати мазкури x ординатаи графики $y = \cos x$ баробар аст. Пас, графики функсияи матлуб дар натиҷаи се маротиба калон кардани тамоми ординатаҳои $y = \cos x$ ҳосил мешавад. (расми 14)(A=3).

Функсияи $y = 3\cos x$ монанди функсияи $y = \cos x$ ҳамон хел фосилаҳои аломатҳояшон доимӣ ва 2π дорад. Қимати калонтарин ва хурдтарини он ± 3 мебошад.

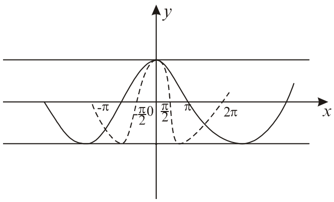


Расми 14

Мисоли 2. Графики функсияи $y = \cos\frac{x}{2}$ - ро месозем.

Ҳал. Ҳаминро мушоҳида кардан кифоя аст, ки барои қимати додашудаи x қимати функсияи $\cos\frac{x}{2}$ ба ординатаи $y = \cos x$ дар нуқтаи абсиссааш ба ду тақсим кардашуда баробар аст.

Масалан, барои $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \cos\frac{\pi}{6}$ барои $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \cos\frac{\pi}{8}$ аст.



Расми 15

Бинобар ин графики функсияи $y = \cos\frac{x}{2}$ аз графики функсияи $y = \cos x$ бо роҳи қад – қади тири абсисса ду маротиба дароз кардани дарозии он ҳосил кардан мумкин аст (расми 15).

?

1. Маҷмӯи кадом ададҳо соҳаи муайянии косинус мешаванд?

2. Оё функсия $y = \cos x$ маҳдуд аст?

3. Даври хурдтарини косинусро нависед

4. Барои кадом қиматҳои x косинус меафзояд ва барои кадом қиматҳояш кам мешавад?

175. Графики функсияи зеринро созед:

а) $y = \frac{1}{3}\cos x$; б) $y = \cos 2x$; в) $y = -\cos 2x$;

г) $y = \frac{1}{3}\cos 3x$; д) $y = \frac{1}{3}\cos 2x$; е) $y = 2\cos x$;

ж) $y = 2 - \cos x$;   з) $y = 2 - \cos 3x$;   и) $y = 1 - 2\cos 2x$;

176. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x - y = 1. \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 3xy = 18, \\ 3y^2 + xy = 6. \end{cases}$

177. а) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$; $0 < \alpha < 90°$ дода шуда аст; $\cos 2\alpha$ - ро ёбед.

б) $tg\alpha = \frac{3}{2}$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, tg2\alpha$ - ро ёбед.

178. Агар периметри квадратро 40 м кӯтоҳтар гирем, он гоҳ масоҳати он $2\frac{7}{9}$ маротиба хурд мешавад. Периметри квадратро ёбед.

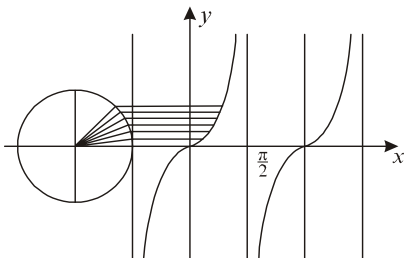
21. Графики функсияи *y=tgx*

Графики функсияи *y=tgx* – ро тангенсоида меноманд. Дар фосилаи $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ функсияи *y=tgx* аз 0 то ∞ меафзояд. Чоряки якуми давраи воҳидӣ ва порчаи $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ тири абсиссаҳо ба якчанд қисмҳои баробар (дар расми 16 ба 8 қисм) тақсим карда шудаанд. Дар тири тангенсҳо аз маркази давра сар карда, проексияи нуқтаҳои тири тангенс ба намуди перпендикулярҳое, ки аз нуқтаҳои мувофиқи тири абсисса гузаронида шудаанд, кӯчонида мешаванд. Охири ин перпендикулярҳоро пайваст кардан лозим аст.

Функсияи $y = tgx$ тоқ, чунки

$$tg(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -tg\alpha.$$

Аз ин ҷо хулоса мебарояд, ки графики он нисбат ба ибтидои координатаҳо симметрӣ мебошад. Бинобар ин, барои фосилаи $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ график сохта,



Расми 16

онро аз рӯи симметрӣ, ба фосилаи $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ (чоряки IV) давом додан мумкин.

Фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ аз ҷиҳати дарозӣ ба даври тангенс баробар аст; барои ҳосил кардани тангенсоидаи пурра хатти ҳосилшударо ба тарафҳои рост ва чап ба масофаҳои $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ параллел кӯчонидан кифоя аст. ба ҳамин тариқ, хатте ҳосил мешавад, ки вай аз шумораи беохири шохаҳои якхелаи даврии такроршаванда иборат мебошад.

Хосиятҳои функсияи $y = tgx$ инҳоянд:

1) Тангенс функсияи даврӣ буда, давраш ба π баробар аст.

2) Функсия дар тамоми тири ададӣ, ғайр аз нуқтаҳои $\frac{\pi}{2}(2k+1),\ k = 0, \pm 1, \pm 2$ муайян мебошад.

3) $y = tgx$ функсия номаҳдуд аст, зеро вай қимати дилхоҳи бузургии мутлақаш калонро қабул карда метавонад.

4) Функсия ҷуфт нест, зеро $tg(-x) = -tgx.$ Графики он нисбат ба ибтидои координатаҳо симметрӣ мебошад.

5) $y = tgx$ дар фосилаи $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k = 0; \pm 1; \ldots$ меафзояд.

6) $y = tgx$ қимати калонтарин ва хурдтарин надорад.

7) Агар $x = \pi k (k = 0; \pm 1; \pm 2, \ldots)$ бошад, функсия ба нол баробар мешавад.

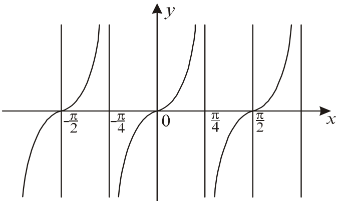
Мисоли 1. Графики функсия $y = tg2x$ - ро месозем.

Ҳал. 1) Соҳаи муайяни функсияи ҳамаи қиматҳои x ғайр аз $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ мебошад, ки дар ин ҷо $k \in Z$ аст, чунки $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ мебошад.

2) Соҳаи қиматҳои функсия тамоми тири ададӣ яъне фосилаи $(-\infty; +\infty)$ аст.

3) Функсия номаҳдуд аст.

4) Функсия ба қиматҳои экстремалӣ доро нест.



Расми 17

5) Функсия даврӣ буда, давраш ба $T = \frac{\pi}{2}$ баробар аст, зеро

$$y = tg2x = tg(2x + \pi) = tg2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

мебошад.

6) Функсия дар тамоми соҳаи мавҷудияташ монотонӣ нест, аммо вай дар фосилаи $\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$ афзуншаванда мебошад.

Графики функсия тирҳои координатаҳоро дар нуқтаҳои $\left(\frac{\pi k}{2};0\right)$, ки $k \in Z$ аст, мебурад.

Графики $y = tg2x$ дар расми 17 тасвир шудааст.

?

1. Соҳаи мавҷудияти функсияи $y = tgx$ - ро нависед.
2. Оё функсияи тангенс маҳдуд аст, ё не?
3. Тангенс функсияи ҷуфт аст ё тоқ?
4. Фосилаи афзуншавӣ ва даври $y = tgx$ - ро нависед.

179. Графики функсияро созед:

а) $y = tg3x$; б) $y = -tg3x$; в) $y = \frac{1}{2}tg3x$; г) $y = \frac{1}{3}tg3x$.

180. Графики функсияро созед:

а) $y = tg\frac{x}{2}$; б) $y = -tg\frac{x}{2}$; в) $y = 3tgx$; г) $y = -3tg2x$.

Машқҳо барои такрор

181. Ифодаи зеринро содда кунед:

а) $\frac{tg2\alpha \cdot tg\alpha}{tg2\alpha - tg\alpha}$; б) $\frac{1}{tg2\alpha \cdot tg\alpha + 1}$.

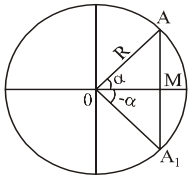
182. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3} = \frac{3x - 10}{4}$; б) $\frac{x(x+4)}{2} - 3 = \frac{7x}{4} - \frac{5x - 4}{6}$.

183. Экстремум ва экстремалҳои функсия $y = 2x^2 - 5x + 3$ - ро ёбед.

184. Суммаи рақамҳои адади дурақама ба 12 баробар аст. агар ҷои рақамҳо иваз карда шавад, адад 75% зиёд мешавад. Ин ададро ёбед.

Маълумоти таърихӣ



Расми 18

Функсияҳои тригонометрӣ ҳанӯз дар асри III пеш аз милод дар асарҳои математикҳои бузурги Юнони Қадим Евклид, Архимед, Аполлони Перги вомехӯранд. Синуси кунҷи α-и ҳозиразамон чун нимхорда, ки ба он кунҷи марказии бузургиаш α такя мекунад, чун хордаи калони дучанда омӯхта мешуд. Минбаъд олимони Ҳинд ва Араб дар ин соҳа саҳми арзанда гузоштаанд. Дар асрҳои IV-V олими Ҳинд Ариабхата (456-550) истилоҳи махсусро истифода кард. Порчаи AM – ро ӯ ардхаҷи (ардха – нисф; ҷивазеҳи – камон, ки хордамонанд аст) номид (расми 21). Баъдтар номи мухтасари ҷива истифода шудан гирифт. Дар асри IX математикҳои Араб калимаи ҷива (ё ҷиба) – ро бо калимаи арабии ҷайб (барҷастагӣ) ива карданд. Ҳангоми тарҷумаи матнҳои арабӣ оид ба математика дар асри XII ин калима ба калимаи лотинии синус (*sinus* – хамӣ, каҷӣ) иваз шуд.

Калимаи косинус баъдтар дохил карда шуд. Косинус ихтисори калимаи лотинии complementy sinus, яъне “синуси илова» мебошад ё ки «синуси камони илова»; cos=sin(90° -α) – ро; ба хотир оред).

Бо функсияҳои тригонометрӣ сару кор дошта, мо асосан аз ҳудуди масъалаи «омӯзиши секунҷаҳо» мебароем. Бинобар ин математики машҳур Ф. Клейн (1849-1925) пешниҳод карда буд, ки таълимоти оид ба функсияҳои «тригонометрӣ» - ро ба таври дигар – гониометрия ном барем (калимаи лотинии gonio маънои «кунҷ» - ро дорад). Вале ин ном ҷорӣ нашуд.

Тангенс бо муносибати ҳал кардани масъала оид ба дарозии соя пайдо шудаанд. Тангенс ва котангенс дар асри X аз тарафи математики Араб Абул – Вафо, ки ҷадвалҳоро аввали барои ёфтани тангенсҳо ва котангенсҳоро низ тартиб дода буд, дохил карда шудааст. Вале ин кашфиёт муддати тӯлонӣ ба олимони аврупоӣ маълум набуд ва тангенсҳо дар асри XIV аввал аз тарафи олими англис Т. Бровердин, баъдтар аз тарафи олими немис Региомонтан (соли 1467) аз нав кашф карда шудаанд. Исми «тангенс», ки аз калимаи лотинии langes (расидан) баромадааст, соли 1583 пайдо шудааст. Tangen «расидаистода» тарҷума мешавад (ба хотир оред: хати тангенсҳо – ин расидан ба давраи воҳидӣ).

Олими форсу тоҷик Муҳаммад ба дунё омад дар Бағдод зиндагӣ кардааст. Абул – Вафо оид ба илмҳои риёзӣ ва нуҷум тадқиқот бурда, асарҳое офарид, ки то имрӯз маълуманд. Асари ӯ «Китоб дар бораи он, ки косиб аз шаклсозиҳои геометрӣ бояд чиро донад?» то замони мо омада расидааст. Дастури «Китоб барои Марзҳо» ба таълими арифметика ва Геометрия бахшида шудааст. Дар тафсияҳояш ба «Алмамачост» - и Птолемей аввалин шуда радиусҳои давраро ба воҳид баробар қабул кард. Ҳамчунин ӯ аввалин шуда дар илми математика тангенсро ҳамчун функсияи тригонометрӣ ворид намуда, ба он ҷадвал тартиб дод. Ӯ бо асарҳои тригонометриаш ҳамчун «Птоломеи дуюм» машҳур шуд. Вобастагиҳои зерини байни функсияҳои тригонометрии зеринро маълум намуд:

$$tg\alpha : r = \sin\alpha;\ tg\alpha : \sec\alpha = \sin\alpha : r,\ \sec\alpha = \sqrt{r^2 + tg^2\alpha};$$

$$ctg\alpha : r = \cos\alpha : \sin\alpha;\ tg\alpha : r = r : ctg\alpha,\ \cos ec\alpha = \sqrt{r^2 + ctg^2\alpha}$$

Абул – вафо синуси сумма ва фарқи ду камонро танҳо ба воситаи синусҳо ифода мекунанд:

$\sin(\alpha+\beta) = \sqrt{\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)} = \sqrt{\sin^2\beta(1-\sin^2\alpha)}$ ин натиҷаҳоро ҳангоми тартиб додани ҷадвалҳои тригонометрии синус ва тангенс истифода менамоянд. Кори ӯро баъдтар шогирдонашАбдураҳмон ибни Юнус (950-1009) идома дода, ҷадвалҳоро тартиб дод ва мукаммал намуд.

Математик ва астрономи суриягӣ Ҷобирал Батонӣ (858-929) бошад, дар қатори ҷадвалҳои синус ва тангенс боз ҷадвалҳои котангенсро тартиб дод, ки на танҳо дар Шарқ, балки дар Аврупо низ маълум буданд. Ҳамин гуна ҷадвалҳоро дар солҳои гуногун Абурайҳони Берунӣ (973-1048), Насриддини Тӯсӣ (1201-1264) ва дигар олимон тартиб доданд. Хусусан, Ҷадвали синусҳои Абурайҳони Берунӣ, ки ба асари «Қонуни Масъудӣ» (1306) дохил шудааст, ҷолиби диққат мебошад. зеро дар онҳо аввалин маротиба интерполи хаттӣ (лотинӣ – интерполиа – тағирот) истифода шудааст. Бо аломатҳои ҳозиразамон онҳоро бо товри зайл навиштан мумкин:

$$\sin x = \sin x_0 = (x + x_0)\cdot\frac{\sin(x_0 - 15') - x_0}{15'}$$

Ӯ барои ҳамаи ҷадвалҳо ин қоидаро татбиқ намуда интерполи квадратиро шарҳ медиҳад.

Машқҳои иловагӣ ба боби 2.

185. Суммаро ба ҳосили зарб табдил диҳед:

$a)\sin 20° + \sin 40°;\ б)\sin 24° - \sin 36°;$

$в)\sin 110° - \sin 130°;\ г)\cos 70° + \cos 50°.$

186. *а*) Маълум, ки $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ ва $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ аст. $\sin 2\alpha$ -ро ёбед.

б) Маълум, ки $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ ва $0 < \alpha < 90°$ аст. $\cos 2\alpha$ -ро ёбед.

187. Ба ҳосили зарб табдил дода қимати ифодаро ёбед.

$а) \sin 40° + \sin 50°$; $б) \sin 75° - \sin 15°$;

$в) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ $г) \cos 35° + \cos 25°$.

188. Айниятро исбот кунед:

$а) 4\sin\alpha \cdot \sin(60° - \alpha) \cdot \sin(60° + \alpha) = \sin 3\alpha$.

$б) \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

189. Ифодаро содда кунед:

$а) \frac{1}{\cos\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + tg^2\alpha)}$; $б) \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{ctg^2\alpha}$

190. Фосилаҳои камшавӣ, афзуншавӣ, нуқтаҳои экстремалӣ ва экстремумҳои функсияро ёбед:

$а) y = x^2 - 2|x|$; $б) y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

191. Ҳисоб кунед:

$\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \cdot ctg 2\alpha$, агар $tg 2\alpha = 4$ бошад.

$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$ -ро ёбед, агар $tg\frac{\alpha}{2} = 0{,}5$ бошад.

192. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$ - ро ёбед, агар $tg\frac{\alpha}{2} = 0{,}5$ бошад.

193. Ифодаро содда кунед:

а) $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$; б) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha$;

в) $\frac{\cos\alpha \cdot tg\alpha}{\sin^2\alpha} - ctg\alpha \cdot \cos\alpha$; г) $(tg\alpha + ctg\alpha)^2 - (tg\alpha - ctg\alpha)^2$.

194. Айниятро исбот кунед:

а) $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; б) $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

в) $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\alpha\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$; г) $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

195. Ифодаро содда кунед: $\sin 4° \cdot \sin 86° - \cos 2° \sin 6° + 0{,}5\sin 4°$.

196. $\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \cdot ctg 2\alpha$ - ро ҳисоб кунед, агар маълум бошад, ки $tg 2\alpha = 4$ аст.

197. Ҳисоб кунед:

$$\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}.$$

Ҷавобҳо:

49. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; **50.** $2\cos\alpha\cdot\cos\beta$; **51.** $б)\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi-\sin\varphi)$; **53.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; **54.** $\cos\alpha$; **55.** $а)\frac{36}{85}; б)\frac{84}{85}$; **56.** $а)\frac{\sqrt{2}}{2}$; $б)0$; $в)\frac{1}{2}$; $г)\frac{\sqrt{2}}{2}$; $д)0$; **57.** $а)\cos\varphi$; $б)\sin 2\alpha$; $в)\cos\alpha$; $г)-\sin\alpha$; **59.** $а)x^2+x$; $б)\frac{x-4}{4(x-1)}$. **60.** Ифодаҳои *а*) ва *д*) мусбатанд; ифодаҳои боқимонда манфӣ. **62.** $а)(-\infty;-1)$; $б)\left(-\infty;-\frac{7}{3}\right)$; **63.** 14,5 соат; 5,5 соат. **64.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **67.** $-\sin\alpha$; **68.** $-\frac{84}{85}; -\frac{36}{85}$; **69.** $а)\sin 50°$; $б)\sin 85°$; **70.** $а)1$; $б)\frac{1}{2}$; $в)\frac{1}{2}$; $г)-0,5$; **71.** $а)\cos\alpha$; $б)\sqrt{3}\cos\alpha$; **73.** $а)1$; $б)1$; **74.** $а)\frac{\sqrt{3}}{2}$; $б)-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $в)-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $г)-\frac{\sqrt{3}}{2}$; **75.** $а)[-\infty;-1]$; $б)(-\infty;0)\cup\left[3\frac{1}{4};+\infty\right)$; **76.** $а)\cos\alpha$; $б)-\sin\alpha$; **77.** 24 км; **78.** $2\frac{3}{8}$; **79.** $а)2-\sqrt{3}$; $б)2+\sqrt{3}$; **80.** $а)1; б)\frac{1}{7}$; **81.** $а)\frac{1}{\sqrt{3}}$; $б)-\sqrt{3}$; **82.** $а)\sqrt{3}$; $б)1$; $в)1$; $г)\frac{1}{\sqrt{3}}$; **83.** $а)11\frac{7}{8}; \frac{25}{62}$; $б)1$ ва $-2\frac{3}{7}$. **85.** $а)0$; $б)0$; $в)0$; $г)0$; **86.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1$.
87. 0; **88.** *а*)(-3;-2),(3;1); *б*) (3;-5),(5;-8); **89.** 60 ва 20 ё 25ва37,5. **90.** -0,96; **91.** $\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha$; **92.** $а)2\cos\alpha$; $б)ctg\alpha$; $в)\sin\beta$; $г)\cos^2\alpha$; $д)\sin^2\beta$; $е)-\sin\alpha$; **93.** $а)2\cos\alpha$; $б)2\sin 50°$; $в)\cos 40°-\sin 40°$; $г)\cos 18°$; **94.** $а)\cos^2\alpha$; $б)\sin 20°$; $в)2\sin 50°$; $г)1$; **95.** *а*) $\sin 2\alpha$ *б*) $\cos\alpha+\sin\alpha$; *в*) $\cos^2\beta$; **96.**

$a)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $б)\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **97.** $а)\ tg\beta$; $б)\ \sin\beta$; $в)\ 2\cos 2\beta$; $г)\ \sin\beta$; **99.** $а)-\dfrac{1}{4}$; $б)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $в)\dfrac{1}{8}$; $г)0$; **101.** $а)$ -2; $б)\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $в)-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $г)0$; **102.** $a)(39;\infty)$; $б)$ ҳал надорад. **103.** $а)5000$; $б)$ -780; **104.** $5\sqrt{26};-1\sqrt{26};-5$ **105.** $а)$ -1; $б)-0{,}5\sqrt{2}$; $в)\sqrt{2}-1$; $д)\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. **107.** $а)\sqrt{0{,}8}$; $б)\sqrt{0{,}2}$ $в)\pm 2$. **108.** $а)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $б)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $в)\sqrt{2}\cos\dfrac{3\pi}{8}$. **109.** $\sqrt{0{,}9};-\sqrt{0{,}1};-3$. **110.** $а)b$; $б)ab$. **111.** $а)-\sqrt{10};\ -\sqrt{5};\ \sqrt{5};\ \sqrt{10}$; $б)2;-2$ **112.** 3 км/соат. **113.** $в)\dfrac{1}{2}\cos 14^\circ-\dfrac{1}{4}\sqrt{3}$. **114.** $а)\dfrac{1}{2}(\sin 30^\circ+\sin 10^\circ)$; $б)\dfrac{1}{2}(\cos 38^\circ-\cos 65^\circ)$; $в)\dfrac{1}{2}\left(\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$; $г)\dfrac{1}{2}[\cos 2(\alpha+\beta)+\cos 4\beta]$.

115. $а)\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$; $б)\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cos 10^\circ$; $д)\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{10}-\cos\dfrac{13\pi}{40}\right)$. **116.** $а)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 10^\circ$; $в)\dfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\cos(3\alpha+\beta)$; $д)\dfrac{1}{2}(\sin 4\alpha-\sin 6\alpha+\sin 2\alpha)$.

117. $а)0{,}5\sin 2\alpha+0{,}5\sin 2\beta$ $б)\ 0{,}5\cos 40^\circ+0{,}25$;
$в)\cos 54^\circ+\cos 22^\circ\cdot\cos 18^\circ+\cos 14^\circ$; $г)\cos 9\alpha+\cos 7\alpha+\cos 3\alpha+\cos\alpha$;
$д)\ 0{,}5\sin 2\alpha+0{,}5\sin 4\alpha-0{,}5\sin 6\alpha$; $е)\ 2\cos(2\alpha-2\beta)+2\cos(2\beta-2\gamma)+2\cos(2\gamma-2\alpha)+2$.

118. $а)\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$; $б)\dfrac{1}{4}(\sqrt{3}-2)$; $в)\dfrac{1}{4}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. **119.** $а)\dfrac{1}{2}(1-\cos 4\alpha)$; $б)1+\sin 2\alpha$; $в)1-\sin 2\alpha$; $г)1{,}5+2\cos 2\alpha+0{,}5\cos 4\alpha$. **120.** $а)\dfrac{1}{2}(\sin 50^\circ+\sin 10^\circ)$; $б)\dfrac{1}{2}(\sin 20^\circ-\sin 10^\circ)$; $в)\dfrac{1}{2}(\cos 35^\circ-\cos 65^\circ)$; $г)\dfrac{1}{2}(\cos 2^\circ+\cos 88^\circ)$. **121.** $а)3\left(x+\dfrac{5}{3}\right)(x-1)$; $б)(x+7)(x-4)$; $в)9x^2+6x+1=9\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2$. **122.** $а)(-3;-3);(4;0{,}5)$; $б)(2;5),(2;-5),(-2;5),(-2;-5)$.

123. $а)0$; $б)0$. **124.** $\begin{cases}4{,}5x+2{,}5y=30\\5x+3y=30\end{cases}$ 5 км/с; 3 км/с. **125.**

$a) 2\sin 35°\cos 15°$; $б) 2\sin 4°\cos 14°$; $в) 2\cos 20°\cos 6°$; $г) 2\sin 13°\sin 6°$; д) $-2\sin 19°\cos 65°$; е) $-2\sin\frac{7\pi}{48}\cdot\cos\frac{17}{48}\pi$. **126.** а) $\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{4}{5}\cdot\cos\frac{3\pi}{4}}$; б) 2; в) $2\sin\alpha\cdot\cos 4\alpha$; г) $2\sin 5\alpha\cdot\sin\alpha$; д) $\frac{2\sin\alpha}{\cos 3\alpha}$; е) $\frac{\sin 5\alpha}{\cos 2\alpha\cdot\cos 3\alpha}$. **127.** а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; в) 0; д) $ctg5°\cdot tg20°$; ж) $\sqrt{2}\sin 25°$. **128.** а) $-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$; в) $-\sin\frac{13}{144}\pi\sin\frac{5}{144}\pi$.

130. а) $\frac{1}{2}(\sin 30°+\sin 10°)$; б) $\frac{1}{2}(\sin 20°-\sin 10°)$; в) $\frac{1}{2}(\cos 35°-\cos 65°)$; г) $\frac{1}{2}(\cos 2°+\cos 88°)$. **131.** а) 3; б) $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$.

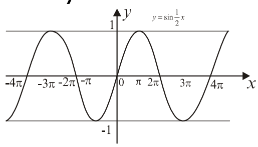
132. а) $(-\infty;-6)\cup(8;\infty)$; б) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup(3;\infty)$. **133.** 7 см ва 12 см.

134. а) 0,6; б) $-\frac{63}{65}$; в) $\frac{4}{5};\frac{3}{5};\frac{4}{3};\frac{3}{4}$. **135.** а) -0,2; б) 1,4. **136.** агар $0°<\alpha<90°$. **137.** а) $\frac{123}{845}$; б) $\frac{323}{325}$. **138.** $-\frac{120}{169};-\frac{119}{169}$. **139.** а) -1; б) $-\sqrt{3}$. **140.** $\sin 2\alpha=\frac{4\sqrt{2}}{9}$. **141.** 8 ва 12. **142.** а) манфӣ; б) мусбат; в) манфӣ; г) манфӣ. **143.** а) ҳама мусбат; б) манфӣ, мусбат, манфӣ, манфӣ. **144.** в) не; г) ҳа. **145.** в) не; г) ҳа. **146.** г) $\sin\alpha=-\frac{8}{17}, tg\alpha=-\frac{8}{15}, ctg\alpha=-\frac{15}{8}$. **147.** $\sin 270°=\cos 180°<\sin 0°= =\cos 90°=\cos 270°=180°$. **149.** $x_{max}=3$, $y_{max}=1$. **150.** 3 ва -4 ё 4 ва -3. **151.** а) 1; б) 0,5. **152.** а) $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ камшаванда, $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ афзуншаванда, $\left[\frac{\pi}{3},3\frac{\pi}{2}\right]$ камшаванда, $y_{min}=y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-3$,

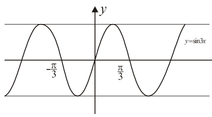
$y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=3,\quad y_{\min}=y\left(3\frac{\pi}{2}\right)=-3;$ б) $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ камшаванда, $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ афзуншаванда, $\left[\frac{\pi}{3},3\frac{\pi}{2}\right]$ камшаванда, $y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1,$ $y_{\max}=y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2,$ **153.** а) $\left[-\pi,-3\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда, $\left[-3\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right]$ афзуншаванда, $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда, $\left[\frac{\pi}{4};3\frac{\pi}{4}\right]$ афзуншаванда, $y_{\min}=y\left(-3\frac{\pi}{4}\right)=-1,\quad y_{\max}=y\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1,\quad y_{\min}=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1;$ $y_{\max}=y\left(3\frac{\pi}{2}\right)=1;$ б) $\left[-\pi,-3\frac{\pi}{4}\right]$ афзуншаванда, $\left[-3\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда, $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ афзуншаванда, $\left[\frac{\pi}{4};3\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда, $y_{\max}=y\left(-3\frac{\pi}{2}\right)=1,\ y_{\min}=y\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1,\ y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1,\ y_{\min}=y\left(3\frac{\pi}{4}\right)=-1;$ в) $\left[-\pi,-3\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда, $\left[-3\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right]$ афзуншаванда, $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда, $\left[\frac{\pi}{4};3\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда, $y_{\min}=y\left(-3\frac{\pi}{4}\right)=-1,$ $y_{\max}=y\left(-\frac{\pi}{4}\right)=3,\quad y_{\min}=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1;\quad y_{\max}=y\left(3\frac{\pi}{2}\right)=3;$ г) $\left[-\pi,-3\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда, $\left[-3\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{2}\right]$ афзуншаванда, $\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда, $\left[\frac{\pi}{4};3\frac{\pi}{4}\right]$ афзуншаванда, $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда, $y_{\min}=y\left(-3\frac{\pi}{4}\right)=0{,}6,$ $y_{\max}=y\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1{,}5,\quad y_{\min}=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0{,}5;\quad y_{\max}=y\left(3\frac{\pi}{4}\right)=1{,}5.$ **154.** а) $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ афзуншаванда, $[0;2\pi]$ камшаванда, $[2\pi;3\pi]$ афзуншаванда, $y_{\max}=y(0)=1,\ y_{\min}=y(2\pi)=-1.$ **156.** а) -1; б) $-\sqrt{3}$. **157.** а) 1; 0. **158.** $d=7{,}5,\ C_4=4.$ **159.** 15 дм ва 20 дм. **160.** $x^2-6x+7=0.$ **161.**

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sqrt{3}$. **<u>162.</u>** а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **<u>163.</u>** а) 1; б) 1; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **<u>164.</u>** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{3}$. **<u>165.</u>** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sqrt{3}$. **<u>166.</u>** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 0,305; в) -1. **<u>167.</u>** а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **<u>168.</u>** а) $\cos\alpha\cdot\cos\beta$; б) $\frac{1}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$. **<u>170.</u>** 9,5 соат, 20,5 соат.

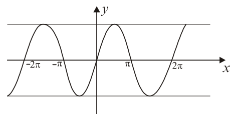
<u>171.</u>



Расми 19



Расми 20



Расми 27

<u>173.</u> а) -2; 0; б) -1,4; 1. **<u>174.</u>** $\frac{7}{12}$; **<u>176.</u>** а) -1; -2 ва 2; 1; б) -3; -1 ва 3; 1. **<u>177.</u>** а) $-\frac{1}{8}$; б) $-\frac{12}{5}$. **<u>178.</u>** 160 м. **<u>181.</u>** а) $\sin 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$ **<u>182.</u>** а) 2,5; 6; б) -4; $1\frac{5}{6}$. **<u>183.</u>** $x_{\min}=\frac{5}{4}$; $y_{\min}=\frac{1}{8}$. **<u>184.</u>** 48. **<u>185.</u>** а) $\cos 10°$; б) $-\sqrt{3}\sin 6°$; в) $\cos 10°$; г) $\cos 10°$. **<u>186.</u>** а) $\sin 2\alpha=\frac{4}{9}\sqrt{5}$; б) $\cos 2\alpha=-\frac{1}{8}$. **<u>187.</u>** а) $\sqrt{2}\cos 5°$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\sqrt{3}\cos 5°$. **<u>190.</u>** а) $(-\infty;-1);[0,1]$ камшаванда, $[-1;0];[1;\infty]$ афзуншаванда, $x_{\max}=0$; $y(0)=0$, $x_{\min}=\pm 1$, $y(-1)=y(1)=-1$; б) $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right]$ афзуншаванда, $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;4\frac{\pi}{3}+2\pi n\right]$ камшаванда, $x_{\max}=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $y\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=1$, $x_{\max}=\frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $y\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n\right)=-1$.

БОБИ III
Муодилаҳои тригонометрӣ

§5. Арксинус, арккосинус, арктангенс ва арккотангенси адад §6. Ҳалли муодилаҳои тригонометрӣ ва системаи муодилаҳо §7. Ҳалли нобаробариҳои тригонометрӣ

§5. Арксинус, арккосинус, арктангенс ва арккотангенси адад

Теоремаеро исбот мекунем, ки аз он ҳангоми ҳал кардани муодилаҳо истифода кардан муфид аст.

Теорема. *Агар f дар фосилаи l афзуншаванда (камшаванда) буда, адади a ягон қимати дилхоҳи f дар ин фосила бошад, он гоҳ муодилаи $f(x)=a$ дар фосилаи l решаи ягона дорад.*

Исбот. Функсияи афзуншавандаи f-ро дида мебароем, (дар ҳолати камшаванда будани функсия муҳокимаронии монанд гузаронида мешавад). Мувофиқи шарти теорема дар фосилаи l чунин адади b мавҷуд аст, ки $f(b)=a$ мебошад. Нишон медиҳем, ки b решаи ягонаи муодилаи $f(x)=a$.

Фарз мекунем, ки дар фосилаи l боз адади $c \neq b$ мавҷуд аст, ки $f(c)=a$ мебошад. Дар он сурат ё $c<b$ ё, ки $c>b$ мебошад. Вале функсияи f дар фосилаи l меафзояд, бинобар ин мувофиқан ё $f(c)<f(b)$ ё ки $f(c)>f(b)$ мебошад. Ин ба баробарии $f(c)=f(b)=a$ мухолиф аст. Пас, фарзи кардаамон нодуруст мебошад ва дар фосилаи l ғайр аз адади b решаҳои дигари муодилаи $f(x)=a$ вуҷуд надорад.

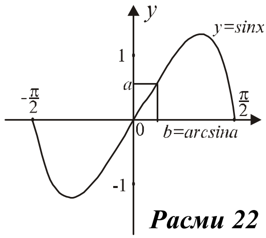
Мисоли 1. Муодилаи $x^3+2x=3$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. Функсияи $f(x)=x^3+2x$ дар тамоми тири ададӣ меафзояд (ҳамчун ду функсияи афзуншаванда).

Бинобар ин муодилаи додашуда на зиёд аз як реша дорад. Бо осонӣ дидан мумкин аст, ки ин реша $x=1$ мебошад.

22. Арксинус, арккосинус, арктангенс ва арккотангенси адад
22.1. Арксинус

Маълум аст, ки функсияи синус дар порчаи $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ меафзояд ва аз -1 то 1 ҳамаи қиматҳоро қабул мекунад. Бинобар ин, мувофиқи теоремаи дар боло исбот кардашуда барои адади a – и дилхоҳ, ки $|a| \le 1$ аст, дар фосилаи $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ решаи ягонаи b –и муодилаи $\sin x = a$ вуҷуд дорад. Ин адади b-ро арксинуси адади a меноманд ва бо $\arcsin a$ ишорат мекунанд. (расми 22).



Расми 22

Таъриф. $\arcsin x$ кунҷест, ки синуси он ба x баробар аст.

Функсияи $\arcsin x$ ба функсияи $\sin x$ чаппа мебошад (ба монанди он, ки $\sqrt{x}$ ба функсияи x^2 чаппа аст).

Мисоли 2. $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ - ро меёбем.

Ҳал. $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ аст, чунки $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ва $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

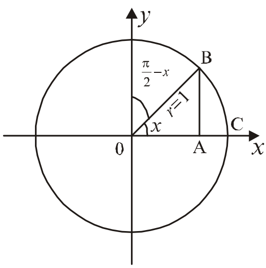
Мисоли 3. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$-ро меёбем.

Ҳал. Ададе, ки синусаш ба $-\frac{1}{2}$ баробар аст (аз фосилаи $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$) $-\frac{\pi}{6}$ мебошад. Бинобар ин $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ аст.

Якчанд айниятҳое, ки ба арксинус мансубанд меорем:

1) $\sin(\arcsin a) = a$.

Ин айният аз таърифи арксинус бармеояд $\arcsin a$ инчунин x мебошад, чунки $\sin x = a$ аст.



Расми 23

2) $\arcsin(\sin x) = x$, агар $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ бошад.

Дар ҳақиқат агар $\sin x$-ро ба a ишорат кунем, он гоҳ айнияти мо ба таърифи арксинус баробарқувва мешавад. Қайд мекунем, ки ифодаи $\arcsin(\sin x)$ барои қимати дилхоҳи x маъно дошта, ҳангоми

$x \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ будан ба x баробар нест. Аз таърифи синус ошкор аст, ки $AB = \sin x$, онгоҳ камони CB, ки ба кунҷи маркази и x такя мекунад, $\arcsin x$ аст, чунки дар инҷо arc аз калимаи $arcus$, яъне камон гирифта шудааст. Айнан ҳамин тавр $OA = \cos x,\ \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ аст, бинобар ба кунҷи маркази камони BD такя мекунад $BD = \arccos x$ мебошад (расми 23) $\arccos(\cos x) = x$, $\arccos(\cos x) = x + 2n\pi$, $\arcsin(\sin x) = x + 2n\pi$ мебошад.

3) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Дар ҳақиқат, синусҳои тарафҳои рост ва чап ба ҳамдигар баробаранд:

$$\sin(\arcsin(-a)) = a \textit{ ва } \sin(-\arcsin a) = -\sin(\arcsin a) = -a .$$

Дар айни замон қисми рости баробарии исботшаванда кунҷе мебошад, ки мутаалиқи порчаи $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ аст. Бинобар он қисмҳои чап ва рост бо ҳам баробаранд.

?

1. $\arcsin a$ чист?
2. Нисбат ба арксинус кадом айниятҳоро медонед?
3. $\arcsin a$ барои кадом қиматҳои a муайян аст?
4. $\arcsin a$ чӣ гуна қиматҳоро қабул менамояд?
5. Оё $y = \arcsin x$ *ва* $\sin x = y$ баробарқувваанд?

198. Оё ифода маъно дорад?

а) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$; *б*) $\arcsin 1{,}5$; *в*) $\arcsin\left(3 - \sqrt{20}\right)$; *г*) $\arcsin\frac{2}{7}$.

199. Ҳисоб кунед:

а) $\arcsin 0$; *б*) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; *в*) $\arcsin 1$; *г*) $\arcsin -\frac{\sqrt{2}}{2}$; *д*) $\arcsin\frac{1}{2}$;

и) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$; *к*) $\arcsin(-1)$; *л*) $\arcsin 2$; *м*) $\arcsin\frac{\pi}{2}$.

е) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$; *ж*) $\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{12}{13}\right)$; *з*) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

200. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$; *б*) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$;

в) $\arcsin\left(\sin\frac{5}{4}\pi\right)$; *г*) $\arcsin(\sin x)$, *агар* $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ *бошад.*

Машқҳо барои такрор

201. Амалҳоро иҷро кунед:

1) $\dfrac{22\cdot\frac{8}{33}}{15:\frac{5}{8}}:\dfrac{2\frac{1}{3}:3\frac{1}{2}}{3\frac{1}{8}\cdot1\frac{3}{5}}$; 2) $\dfrac{1:1\frac{1}{15}}{3\frac{1}{8}:6\frac{2}{3}}:\dfrac{4\frac{7}{8}:13}{5:1\frac{7}{8}}$.

202. x-ро ёбед:

а) $7\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x=22\frac{1}{2}$; *б*) $\frac{2}{3}x\cdot\frac{1}{3}=8$.

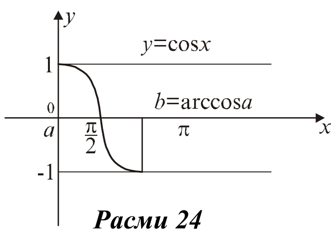
203. Дар мактаб 880 нафар таҳсил мекунанд. Аз онҳо 75% ба туризм машғуланд. Аз шумораи умумии ба туризм машғулбуда 55%-ро духтарон ташкил медиҳанд. Духтарон чанд нафаранд?

204. Ҳисоб кунед:

а) $\sin\frac{41}{6}\pi$; *б*) $\cos\frac{82}{3}\pi$; *в*) $tg\frac{5\pi}{8}$.

22.2. Арккосинус

Функсияи косинус дар порчаи $[0;\pi]$ кам мешавад ва ҳамаи қиматҳои аз -1 то 1 бударо қабул мекунад. Бинобар ин барои адади дилхоҳи a ки ин ҷо $|a|\le 1$ аст, дар порчаи $[0;\pi]$ решаи ягонаи b –и муодилаи $\cos x=a$ вуҷуд дорад. Ҳамин ададӣ b-ро арккосинуси ададӣ a меноманд ва бо $\arccos a$ ишорат мекунанд. (расми 24).



Расми 24

Таъриф. $\arccos x$ кунҷест, ки косинуси он ба x баробар аст. функсияи $\arccos x$ ба функсияи $\cos x$ чаппа мебошад.

Мисоли 1. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ -ро меёбем.

Ҳал. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$ мебошад, чунки $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ *ва* $\frac{\pi}{6}\in[0;\,\pi]$ аст.

Мисоли 2. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$-ро меёбем.

Ҳал. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$ мебошад, чунки $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{3\pi}{4}\in[0;\pi]$ аст.

Айниятҳоеро меорем, ки онҳо ба арккосинус мансубанд:

1) $\cos(\arccos a)=a$. Ин айният аз таърифи арккосинус бармеояд.

2) $\arccos(\cos x)=x,\quad агар\quad x\in[0;\,\pi]$ бошад.

Ишораи $\cos x=a$ - ро истифода бурда, таърифи арккосинусро ҳосил мекунем: $\arccos a=x,\quad агар\quad x\in[0;\,\pi]$ ва $\cos x=a$ бошад.

3) $\arccos(-a)=\pi-\arccos a.$

Аз ҳар ду тарафи ин ифода косинус гирифта онро ҳисоб мекунем:

$\cos(\arccos(-a))=-a;\ \ \cos(\pi-\arccos a)=-\cos(\arccos a)=-a$

Дар ҳолати умумӣ аз баробар будани косинуси ду адад, баробар будани ин адаҳо барнамеояд. Вале агар ин ададҳо ба порчаи $[0;\pi]$ тааллуқ дошта бошанд, он гоҳ ин ададҳо низ баробар мешаванд.

Қисми чапи баробарӣ $\arccos(-a)$ мутаалиқи порчаи $[0;\pi]$ мебошад. Агар нишон диҳем, ки қисми рости баробарӣ $\pi-\arccos a$ низ мутаалиқи порчаи $[0;\pi]$ мебошад, онгоҳ аз баробарии косинуси онҳо баробарии ададҳо бармеояд. Ҳамин тавр исбот кардан лозим аст, ки $\pi-\arccos a$ мутаалиқи $[0;\pi]$ мебошад. Дар ҳақиқат, $\arccos\in[0;\pi],\ -\arccos a\in[-\pi;0],$ пас $\pi-\arccos a\in[0;\pi]$ мебошад. Айнияти 3) исбот шуд.

?

1. Таърифи $\arccos a$ -ро диҳед.
2. $\arcsin a$ барои кадом қиматҳои a муайян аст?
3. $\arccos a$ чӣ гуна қиматҳоро қабул мекунад?
4. Чӣ гуна айниятҳоро барои $\arccos a$ медонед?
5. Оё $y = \arccos x$ *ва* $\cos y = x$ баробарқувваанд?

205. Ҳисоб кунед:

$a)\ \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\quad б)\ \arccos(-1);\quad в)\ \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\quad г)\ \arccos 1;$

$д)\ \arccos(-3);\quad е)\ \arccos 0;\quad ж)\ \arccos\left(-\frac{1}{2}\right);\quad з)\ \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$

$и)\ \arccos\frac{1}{2}.$

206. Қимати ифодаро ёбед:

$a)\ \cos\left(\arccos\frac{1}{5}\right);\quad б)\ \arccos\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right);\quad в)\ \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right);$

$г)\ \arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right).$

207. Оё ин ифодаҳо маъно доранд?

$a)\ \arccos\sqrt{5};\quad б)\ \arccos\sqrt{\frac{2}{3}};\quad в)\ \arccos\pi.$

208. Ҳисоб кунед:

$a)\ \cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right);\quad б)\ \arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right);\quad в)\ \arcsin\left(\cos\frac{\pi}{9}\right);$

$г)\ \arccos\left(\cos\left(-40^0\right)\right);\quad д)\ \arccos(\cos 6\pi).$

209. Айниятро исбот кунед:

$a)\ \arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2};\quad б)\ \sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{6};$

$в)\ \cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{3};\quad г)\ \arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right).$

Машқҳо барои такрор

210. Амалҳоро иҷро кунед:

$a)\ 5{,}75\cdot 2{,}08\cdot(3{,}6-1{,}2\cdot 3);\quad б)\ 0{,}008+0{,}992\cdot 5\cdot 0{,}6\cdot 1{,}4.$

211. Ададро ёбед, агар:

$a)$ 8% – *и ин адад ба* 24 *баробар бошад*;

$б)$ 45% – *и он* 225 *баробар бошад.*

212. Ифодаро содда кунед:

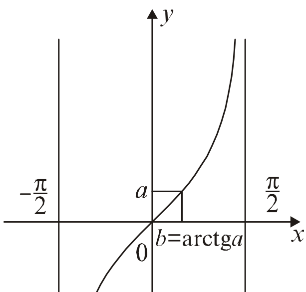
$a)\ \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{tg\alpha-tg\beta};\qquad б)\ \dfrac{ctg\alpha+ctg\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$

213. Аз 750 нафар хонандагони мактаб 80% дар маҳфилҳои гуногун иштирок доранд, аз онҳо 5% иштирокчиёни радио маҳфил мебошанд. Иштирокчиёни маҳфил чанд нафаранд?

22.3. Арктангенс

Функсияи тангенс дар фосилаи $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ меафзояд ва тамоми қиматҳоро аз маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ қабул мекунад. Бинобар ин, барои адади дилхоҳи a дар фосилаи $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ решаи ягонаи b –и муодилаи $tgx=a$ вуҷуд дорад. Адади b-ро арктангенси адади a меноманд ва бо $arctga$ ишорат мекунанд. (расми 25).

Таъриф. $arctgx$ кунҷест, ки тангенси он ба x баробар аст.



Расми 25

Функсияи $arctgx$ ба функсияи tgx чаппа мебошад.

Мисоли 1. $arctg1$ - ро меёбем.

Ҳал. $arctg1=\dfrac{\pi}{4}$ аст, чунки $tg\dfrac{\pi}{4}=1$ ва $\dfrac{\pi}{4}\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ мебошад.

Мисоли 2. $arctg\left(-\sqrt{3}\right)$ -ро меёбем.

Ҳал. $arctg\left(-\sqrt{3}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$ аст, чунки

$tg\left(-\frac{\pi}{3}=\right)-\sqrt{3}$ ва $-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ мебошад.

Мисоли 3.

$\sin\left(arctg\left(-\sqrt{3}\right)+\arcsin(-1)+\arccos 0\right)$-ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. Фарз мекунем, ки $arctg\left(-\sqrt{3}\right)=\alpha$ аст, он гоҳ $tg\alpha=-\sqrt{3}$ ва $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Аз ин ҷо $\alpha=-\frac{\pi}{3}$.

Бигузор $\arcsin(-1)=\beta$ бошад, он гоҳ $\sin\beta=-1$ ва $\beta\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, бинобар ин $\beta=-\frac{\pi}{2}$;

Агар $arctg0=\gamma$ фарз кунем, он гоҳ $tg\gamma=0$ мешавад, $\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Аз ин ҷо $\gamma=0$.

Қиматҳои ёфташударо ҷамъбаст намуда ҳосил мекунем:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}-0\right)=\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{1}{2}.$$

Айниятҳои зерин ҷой доранд:

1) $arctg(tgx)=x$ агар $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ бошад, масалан, $arctg\left(tg\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$.

2) $tg(arctgx)=x$ барои адади дилхоҳи ҳақиқии x масалан, $tg(arctg1)=1$.

?	**1.** Ифодаҳои $y=arctgx$ ва $tgy=x$ баробарқувваанд, ё не? **2.** Таърифи арктангенсро баён кунед. **3.** Кадом айниятҳоро барои арктангенс медонед? **4.** Функсияи арктангенс афзуншаванда аст ё камшаванда?

214. Ҳисоб кунед:

$a)\ arctg\sqrt{3};\quad б)\ arctg(-1);\quad в)\ arctg0;\quad г)\ arctg\frac{\sqrt{3}}{3};\quad д)\ arctg\left(-\frac{\pi}{2}\right);$

$е)\ arctg\frac{\pi}{2};\quad ж)\ arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right);\quad з)\ arctg\frac{1}{\sqrt{3}};\quad и)\ arctg\left(tg\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$

215. Қимати ифодаро ёбед:

$a)\ tgarctg2;\quad б)\ tg\left(arctg\left(-\frac{1}{3}\right)\right);\quad в)\ arctg\left(tg\frac{5}{6}\pi\right);$

$г)\ arctg\left(tg\frac{\pi}{10}\right);\quad д)\ arctg(tg3);\quad е)\ tg\left(3arctg\frac{4}{3}\right).$

216. Ҳисоб кунед:

$a)\ tg(arctg1+arctg(-1));\qquad б)\ tg\left(arctg\frac{1}{\sqrt{3}}-arctg\sqrt{3}\right);$

$в)\ tg\left(arctg0+arctg\left(-\sqrt{3}\right)\right);\quad г)\ tg\left(arctg0+arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right).$

217. Ҳисоб кунед:

$a)\ arctg\left(-\sqrt{3}\right)+\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin 1;$

$б)\ \arcsin(-1)-\frac{3}{2}\arccos\frac{1}{2}+3arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$

Машқҳо барои такрор

218. Ифодаро содда кунед:

$a)\ \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6};\quad б)\ \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}.$

219. Ҳисоб кунед:

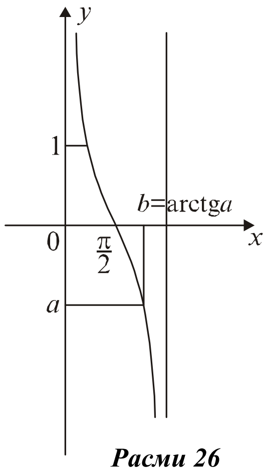
$a)\ \arccos 1+2\arcsin\frac{1}{2};\qquad б)\ \arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}.$

220. Нобаробариро ҳал кунед:

$a)\ x(x+5)\le 2x^2+4;\qquad б)\ 10-(2x-1)\ge 1-7x.$

221. Поезд мебоист масофаи байни шаҳрҳои А ва В-ро мувофиқи ҷадвал дар 4 соату 30 дақиқа тай мекард. Лекин поезд бо сабабҳои техникӣ аз шаҳри А 30 дақиқа дертар ба роҳ баромад. Поезд барои он, ки ба шаҳри В ба вақташ омада расад суръаташро 10 км/соат зиёд кард. Масофаи байни шаҳрҳои А ва В-ро ёбед.

22.4. Арккотангенс



Расми 26

Функсияи котангенс дар фосилаи $[0;\ \pi]$ кам мешавад ва тамоми қиматҳоро аз маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ қабул мекунад. Бинобар ин барои адади дилхоҳи дар фосилаи $[0;\ \pi]$ решаи ягонаи b –и муодилаи $ctgx = a$ вуҷуд дорад. Ин адади b-ро арккотангенси адади a меноманд ва бо $arcctga$ ишорат мекунанд. (расми 28).

Таъриф. $arcctgx$ кунҷест, ки котангенси он ба x баробар аст. функсияи $arcctgx$ ба функсияи $ctgx$ чаппа мебошанд.

Мисоли 1. $arcctg\frac{1}{\sqrt{3}}$ -ро меёбем.

Ҳал. $arcctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ аст, чунки $ctg\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *ва* $\frac{\pi}{3} \in [0;\ \pi]$ мебошад.

Мисоли 2. $arcctg\left(-\sqrt{3}\right)$-ро меёбем.

Ҳал. $arcctg\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$ аст, чунки $ctg\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$ ва $\frac{5\pi}{6} \in (0;\pi)$ мебошад.

Мисоли 3. $tg\left(arctg(-1) + 2arctg(-1) + arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$-ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. Фарз мекунем, ки $arctg(-1) = \alpha$, он гоҳ $tg\alpha = -1,\ \alpha = -\frac{\pi}{4}$. Бигузор $arctg(-1) = \beta$ он гоҳ

$ctg\beta = -1,\ \beta = \frac{3\pi}{4}$. Бигузор $arcctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \gamma$, он гоҳ $ctg\frac{1}{\sqrt{3}},\ \gamma = \frac{\pi}{3}$ мешавад.

Қиматҳои ҳосилшударо ба назар гирифта ҳосил мекунем:

$$ctg\left(-\frac{\pi}{4} + 2\cdot\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = -ctg15^0 = -ctg\left(45^0 + 30^0\right) =$$

$$= -\frac{1 + ctg45^0 \cdot ctg30^0}{ctg45^0 - ctg30^0} = -2 - \sqrt{3}$$

?

1. Функсияи котангенс дар кадом фосила кам мешавад?
2. Таърифи арккотангенсро диҳед.
3. Маҷмӯи қиматҳои арккотангенсро нависед?
4. Функсияи арккотангенс афзуншаванда аст ё камшаванда?

222. Ҳисоб кунед:

$а)\ arcctg\sqrt{3};\quad б)\ arcctg0;\quad в)\ arcctg1;\quad г)\ arcctg\left(-\sqrt{3}\right);$

$д)\ arcctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right);\quad е)\ arcctg(-1).$

223. Ҳисоб кунед:

$а)\ tg\left(arctg\left(-\frac{3}{5}\right)\right);\quad б)\ ctg\left(arctg\frac{5}{6}\right);\quad в)\ tg\left(arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{4}\right);$

$г)\ arcctg\left(ctg\frac{\pi}{2}\right);\quad д)\ ctg\left(arcctg\sqrt{3}\right);\quad е)\ arcctg\left(ctg\frac{\pi}{4}\right).$

Машқҳо барои такрор

224. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$а)\ \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18; \\ x^2 - y^2 + x - y = 6; \end{cases}\qquad б)\ \begin{cases} x^2y^2 + xy = 72; \\ x + y = 6. \end{cases}$

225. Айниятро исбот кунед:

$а)\ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha \cdot \sin\beta;$

$б)\ \cos(\alpha + \beta)\cdot\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha \cdot \sin^2\beta.$

226. Завод мебоист дар мўҳлати муайян 800-то детал месохт. Завод мувофиқи график кор карда, 25%-и супоришро иҷро кард ва баъд ҳар рўз аз норма 10-тогӣ зиёдтар детал сохта супоришро 2 рўз пештар иҷро кард. Завод супоришро дар чанд рўз иҷро кард?

22.5. Алоқаи байни функсияҳои роста ва чаппаи тригонометрӣ

Ҳангоми омўзиши функсияҳои чаппаи тригонометрӣ қайд карда шуда буд, ки синус бо арксинус, косинус бо арккосинус, тангенс бо арктангенс ва котангенс бо арккотангенс байни ҳам чаппа буда $\sin(\arcsin x) = x, \cos(\arccos x) = x, tg(arctgx) = x, ctg(arcctgx) = x$ мебошанд

Ингуна алоқамандии функсияҳои роста ва чаппаи тригонометриро меорем:

1. $\sin(\arccos x)$ ёфта шавад.

Ошкор аст, ки $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$, бинобар он $\sin x(\arccos x) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \pm\sqrt{1-x^2}$, яъне $\sin(\arccos x) = \pm\sqrt{1-x^2}$.

2. $\sin(arctgx) = y$ ишора намуда ҳосил мекунем: $arctgx = \arcsin y$. Тангенси ҳарду тарафи ин формуларо меёбем:

$$tg(arctgx) = tg(\arcsin y) = \frac{\sin(\arcsin y)}{\cos(\arcsin y)}.$$

Айнан ба монанди боло муҳокима ронда ҳосил мекунем:

$$\cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2},\ \sin(\arcsin y) = y,\ tg(arctgx) = 1.$$

Аз ин ҷо $x = \dfrac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}}$. Ҳар ду тарафи ин формуларо ба квадрат бардошта y - ро муайян менамоем:

$$x^2 = \frac{y^2}{1-y^2},\ y^2 = \frac{x^2}{1+x^2},\ y = \pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

Азбаски синус ва арктангенс дар чоряки якум барои қиматҳои $x > 0,\ y > 0$ дорои аломати якхелаанд, бинобар ин: $\sin(arctgx) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Айнан ҳамин тавр ҳосил мекунем $\sin(arcctgx) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Акнун ҷадвали алоқамандии функсияҳои роста ва чаппаи тригонометриро тартиб медиҳем:

1) $\sin x(\arcsin x) = x;$ 2) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2};$ 3) $\sin(arctgx) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}};$ 4) $\sin(arcctgx) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}};$	1) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2};$ 2) $\cos(\arccos x) = x;$ 3) $\cos(arctgx) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}};$ 4) $\cos(arcctgx) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

§6. Ҳалли муодилаҳои тригонометрӣ ва системаи муодилаҳо

Муодилаи тригонометрӣ гуфта, баробарии ифодаҳои тригонометриро меноманд, ки номаълум (тағйирёбанда) фақат дар зери аломати функсияҳои тригонометрӣ омада бошад. Масалан,

$$\cos x - 1, \sqrt{3}tg3x + 1 = 0,\ \cos 3x - \sin x = 0,$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right) - tg\left(\frac{3}{2}\pi - 5x\right) = 0,\ \sin 3x + \sin 5x - \sin 4x = 0$$

ва ғайра намуди муодилаҳои тригонометрианд: Аммо

$$\sin x = \frac{1}{2}x, \cos 2x = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}, tg2x = x$$

муодилаҳои тригонометрӣ набуда, онҳоро муодилаҳои трассендентӣ меноманд.

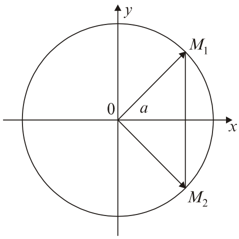
$\sin x = a;$ $\cos x = a;$ $tgx = a$ муодилаҳои оддитарини тригонометрӣ мебошанд, ки дар ин ҷо a – адади додашуда аст.

Ҳал кардани муодилаҳои оддитарини тригонометри ин ёфтани маҷмӯи ҳамаи кунҷҳо (камонҳо) мебошад, ки қимати додашудаи функсияҳои тригонометрӣ ба a баробаранд.

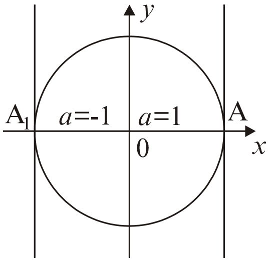
Пеш аз он, ки ба ҳалли муодилаҳои тригонометрӣ шурӯъ намоем, сохтани кунҷ аз рӯи қимати функсияи тригонометрии онро дида мебароем.

Масъалаи 1. Адади a дода шуда аст, кунҷи (камони) α сохта шавад, ки косинуси он ба a баробар аст.

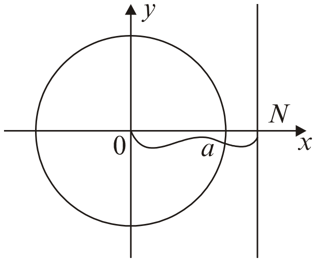
Ҳал. Дар тири Ox нуқтаи N бо абсисаи $x = a$ - ро сохта, аз болои вай хати рости ба тири Oy параллел бударо мегузаронем.



Расми 27



Расми 28



Расми 29

Мавридҳои зерин ба амал омада метавонанд (расмҳои 27-29).

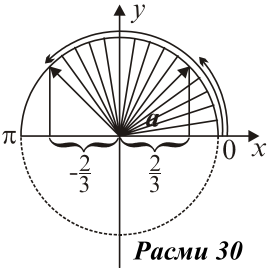
Мавриди 1. Агар $|a|<1$ бошад, дар он вақт нуқтаи $N(a,o)$ дар дохили давраи воҳидиро дар ду нуқтаи гуногун бурида мегузарад, ки яке аз онҳо M, дар нимдавраи болоӣ, дигари он M_2- дар нимдавраи поёнӣ мехобанд. Ҳар гуна кунҷи α, ки барои он OM_1, ё OM_2 тарафи охирин мебошад, (расми 27) косинуси ба a баробар дорад: $\cos x = a$

Мавриди 2. Агар $a=\pm1$ бошад, дар ин маврид нуқтаи $N(a,o)$ ба охирҳои ба яке аз диаметри уфуқӣ (горизонталӣ), мувофиқ меояд ва хати рости ба тири ордината параллелӣ ба давраи воҳиди расанда шуда мегузарад. (расми 28). Барои тарафи охирини кунҷи матлуб танҳо як вазъият имконпазир аст: OA дар ҳолати a=1 ва OA, дар ҳолати a= -1. ба ин мувофиқан $\alpha = 2\pi k$ (барои a=1) ва $\alpha=(2k+1)\pi$ (барои a= -1) дар ин ҷо k – адади бутуни дилхоҳ: $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ мебошанд.

Мавриди 3. Агар $|a|>1$ бошад он гоҳ нуқтаи $N(a,o)$ берун аз доираи вохидӣ мехобад ва хати рости аз нуқтаи N–и ба тири ордината парллел гузаронидашуда, давраи воҳидиро намебурад, бинобар он чунин кунҷҳо косинусашон ба адади a баробар вуҷуд надорад. Аз ҳамаи кунҷҳо (камонҳо), ки косинуси онҳо ба a баробар аст (дар ин ҷо $|a|\le 1$), кунҷи хурдтарини мусбат a_0 дар байни аз 0 то π (дар нимҳамвории болоӣ) ҷойгир шудааст (расми 29), ин кунҷ (камон) кунҷи (камони) асосӣ номида шуда, чунин ифода карда мешавад: $\alpha_0 = \arccos a$ (арккосинуси a).

Таъриф. Кунҷи (камони) асосӣ $\arccos a$ кунҷ (камон) аст, ки дар байни аз 0 то π ҷой гирифта аст:

$0 \le \arccos a \le \pi$ мебошад, ки косинуси он ба *a* баробар аст.



Расми 30

Агар $|a| > 1$ бошад он гоҳ ифодаи $\arccos a$ маъно надорад, зеро кунҷҳои косинусашон ба $a(|a| > 1)$ вуҷуд надоранд.

Мисол.

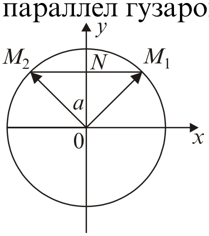
1) $\arccos 1 = 0; \arccos(-1) = \pi; \ \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3};$

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi; \arccos 5$ маъно надорад.

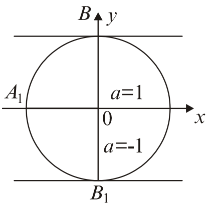
Дар расми 30 кунҷҳои $\arccos\frac{2}{3}$ ва $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$ нишон дода шудаанд.

Масъалаи II. Адади *a* дода шудааст, кунҷи α сохта шавад, ки синуси вай ба *a* баробар бошад.

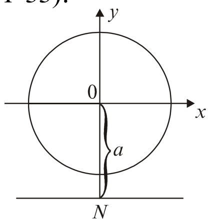
Ҳал. Масъала ба ҳалли масъалаи 1 монанд аст; нуқтаи $N(a, o)$ дар тири ордината сохта шуда, аз болои вай тири абсисса параллел гузаронида мешавад (расми 31-33).



Расми 31



Расми 32



Расми 33

Мавриди I. Агар $|a| < 1$ бошад, он гоҳ хати рости ба тири Ox параллел давраи воҳидиро дар ду нуқта бурида мегузарад, ки яке аз онҳо M_1, дар нимдавраи рост ва нуқтаи дигари M_2 дар нимдавраи чап мехобад. Радиус – векторҳои $\overrightarrow{OM}_1$ ва $\overrightarrow{OM}_2$ ду вазъияти гуногуни тарафи охирини кунҷи матлубро муайян мекунад.

Мавриди 2. Агар $\alpha = \pm 1$ бошад он гоҳ барои тарафи охирини кунҷи α якваазъияти имконпазир аст: OB барои $\alpha = 1$ ва OB, барои $\alpha = -1$. Ба ин мувофиқан $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi$ (барои $\alpha = 1$) ва $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi$ (барои $\alpha = -1$), дар ин ҷо κ-адади бутуни дилхоҳ мебошад.

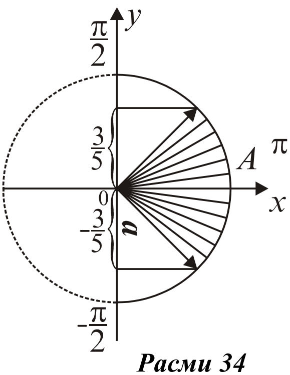
Мавриди 3. Агар $|a|>1$ бошад он гоҳ масъала ҳал надорад, чунки $(|a|>1)$ кунҷҳои синусашон ба адади a – и $|a|>1$ баробар вуҷуд надорад.

Аз ҳамаи кунҷҳо (камонҳо), ки синусашон ба a баробар аст ва дар ин ҷо $|a|<1$ кунҷи бузургии мутлақаш хурдтарин кунҷи асосӣ ҳисоб карда мешавад; ин кунҷ дар байни аз $-\dfrac{\pi}{2}$ то $\dfrac{\pi}{2}$ (дар нимҳамвории рост) ҷойгир шудааст.

Таъриф. **<u>Кунҷи (камони) асосӣ arccos*a* кунҷ (камон) аст, ки дар байни аз $-\dfrac{\pi}{2}$ то $\dfrac{\pi}{2}$ ҷойгир шудааст:</u>**

$-\dfrac{\pi}{2} \le \arcsin\alpha \le \dfrac{\pi}{2}$ мебошад, ки синуси он ба a баробар аст. Агар $|a|>1$ бошад, он гоҳ ифодаи $\arcsin a$ маъно надорад.

<u>Мисол.</u> $1)\arcsin 0 = 0, \arcsin\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}; \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2};$ $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4};$ $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{3}.$ Дар расми 34 сохтани



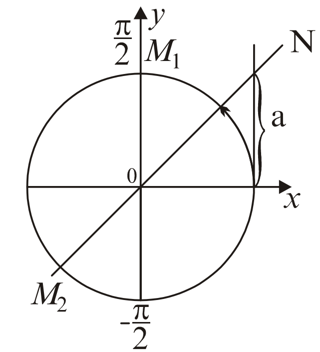
Расми 34

кунҷҳои $\arcsin = \dfrac{3}{5}$ ва $\arcsin\left(-\dfrac{3}{5}\right)$ нишон дода шудааст.

Масъалаи III. Адади a дода шудааст, кунҷи (камони) a сохта шавад, ки тангенси он ба a баробар бошад.

Ҳал. Дар тири тангенсҳо нуқтаи $N(1,a)$ бо ординатаи ба a баробарро мекашем (расми 35). Бо хати рост нуқтаи N - ро бо ибтидои координата пайваст мекунем, ки он давраи воҳидиро аз рӯи ду нуқтаи муқобили якдигар хобидаи M_1 ва M_2 бурида мегузарад. Радиус-векторҳои онҳо бошад ду вазъияти гуногуни тарафҳои охирини кунҷи матлубро муайян мекунанд. Аз ҳамаи кунҷҳо (камонҳо), ки тангенс доранд, ҳамон кунҷ – кунҷи асосӣ ҳисоб карда мешавад, ки агар бузургии мутлақаш хурдтарин бошад; ин кунҷ дар байни $-\frac{\pi}{2}$ ва $\frac{\pi}{2}$ ҷойгир шудааст.

Таъриф. Кунҷи (камони) асосӣ *arctga* кунҷи (камони) дар байни $-\frac{\pi}{2}$ то $\frac{\pi}{2}$ ҷойгир шуда мебошад, ки дар ин ҷо $-\frac{\pi}{2} \le arctg \le \frac{\pi}{2}$ буда, тангенси он ба *a* баробар аст.



Расми 35

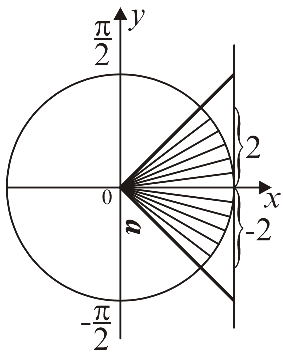
Мисол. 1)$arctg0 = 0$; 2)$arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$;

$arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$; $arctg1 = \frac{\pi}{4}$;

$arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

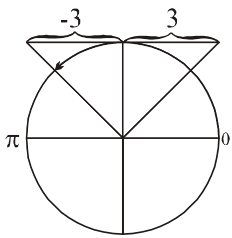
Дар расми 36 сохтани кунҷҳои $arctg2$ ва $arctg-2$ нишон дода шудааст.

Масъалаи IV. Адади *a* дода шудааст кунҷи (камони) α сохта шавад, ки котангенси он ба *a* баробар бошад.



Расми 36

Ҳал. Ҳалли ин масъала ба ҳалли масъалаи III монанд аст; аз координата ва нуқтаи дар тири тангенсҳо хобидаи №$(a,1)$ хати рост мегузаронем ва нуқтаи бурриши онро дар давраи воҳиди меёбем. Аз ҳамаи кунҷҳо (камонҳо), ки котангенс доранд, ҳамон кунҷ кунҷи асосии хурдтарини мусбат ҳисоб карда мешавад, ки дар байни 0 ва π ҷой гирифтааст.



Расми 37

Таъриф. Кунҷи (камони) асосӣ *arcctga* ҳамон кунҷ (камон) аст, ки дар байни 0 ва π ҷойгир шудааст: 0<*arcctga*<π мебошад, ки тангенси он ба *a* баробар аст.

Мисол. $arcctg0 = \frac{\pi}{2}$; $arcctg1 = \frac{\pi}{4}$;

$arcctg\left(-\sqrt{3}\right)$ нишон дода шудааст.

Аз он мисолҳое, ки дар боло оварда шудаанд, **маълум мегардад, ки функсияҳои cosα ва sinα чунин қиматҳои ҳақиқии *а* – ро гирифта метавонад, ки бузургии мутлақи он аз 1 зиёд набошад, яъне:** $|\cos\alpha| \le 1; |\sin\alpha| \le 1$ **ё ки** $-1 \le \cos\alpha \le 1.$ **Функсияҳои *tg*α ва *ctg*α қиматҳои дилхоҳи ҳақиқиро гирифта метавонанд.**

23. Муодилаи sin*x*=α

Муодилаи $\sin x = a$ ҳангоми $|a| > 1$ будан ҳал надорад, чунки барои қимати дилхоҳи x $|\sin x| \le 1$ аст. Ҳангоми $|a| \le 1$ будан муодила дар порчаи $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ танҳо як ҳалли $x_1 = \arcsin a$ - ро дорад. Дар фосилаи $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функсия синус кам мешавад ва ҳам қиматҳои аз -1 то 1 – ро қабул мекунад. Мувофиқи теорема дар бораи решаи муодила, муодилаи $\sin x = a$ дар ин порча низ якто реша дорад. Аз расми 33 аён аст, ки ин реша адади x_2 буда ба $\pi - \arcsin a$ баробар аст. Дар ҳақиқат $\sin x_2 = \sin(\pi - x_1) = \sin x_1 = a.$ Илова бар ин аз $-\frac{\pi}{2} \le x_1 \le \frac{\pi}{2}$ ҳосил мекунем; $\pi - \frac{\pi}{2} \le \pi - x_1 \le \pi + \frac{\pi}{2}$, яъне x_2 ба порчаи $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ мутаалиқ аст. Инак, муодилаи $\sin x = a$ дар порчаи $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ ду ҳал дорад:

$x_1 = \arcsin a$ ва $x_2 = \pi - \arcsin a.$ Ба 2π баробар будани даври синусро ба назар гирифта, барои навишти тамоми ҳалҳои муодила формулаҳои зеринро ҳосил мекунем:

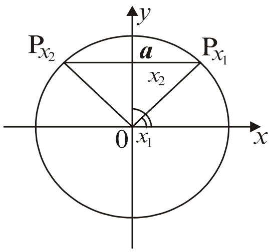
$$x = \arcsin a + 2\pi n,$$

$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

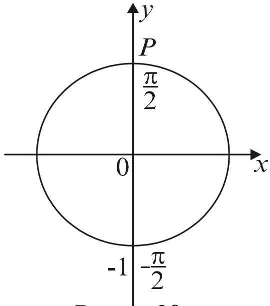
Ҳалҳои муодиларо ба ҷои ду муодилаи ҳосилшуда бо як формула навиштан қулай аст:

$$x = (-1)^n \arcsin a,\ n \in Z \text{ ва } -\frac{\pi}{2} \le \arcsin a \le \frac{\pi}{2}.$$

Ҳалҳои муодилаи $\sin x = a$ - ро дар давраи воҳидӣ нишон додан қулай. Мувофиқи таъриф $\sin x$ ординаи нуқтаи P_x – и давраи воҳидӣ мебошад. Агар $|a| < 1$ бошад, чунин нуқтаҳо дутоанд (расми 38); ҳангоми $a = \pm 1$ як нуқта мавҷуд аст (расми 39).



Расми 38



Расми 39

Агар a=1 бошад, ададҳои $x_1 = \arcsin a$ ва $x_2 = \pi - \arcsin a$ бо ҳамдигар баробаранд; бинобар ин ҳалли муодилаи $\sin x = 1$ - ро ба намуди

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$$

навиштан қабул шудааст:

Ҳангоми $a = -1$ ва $a = 0$ будан навишти зерини ҳалҳо қабул шудааст:

$\sin x = -1,$ пас $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,$ ки $n \in Z$ мебошад.

$\sin x = 0,$ пас $x = \pi n,$ ки $n \in Z$ мебошад.

Мисоли 1. Муодилаи $\sin\dfrac{2}{3}x = \dfrac{1}{2}$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал.

$$\frac{2}{3}x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z,\ \frac{2}{3}x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi n,\ n \in Z.$$

Мисоли 2. Муодилаи $\sin\dfrac{2\pi}{x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\dfrac{2\pi}{x} = (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z,\ x = \dfrac{8}{4n + (-1)^n},\ n \in Z.$

Мисоли 3. Муодилаи $\sin\frac{3\pi}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. Азбаски $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ мебошад, ҳосил мекунем:

$$\frac{3\pi}{\sqrt{x}} = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, n \in Z, \ \frac{3\pi}{\sqrt{x}} = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n, \ n \in Z.$$

$$\frac{3\pi}{\sqrt{x}} = (-1)^{n+1}\frac{1}{2} + n, n \in Z, \ \sqrt{x} = \frac{9}{3n + (-1)^{n+1}}; \ n \in Z.$$

$$x = \frac{81}{(3n + (-1)^{n+1})^2}, \ n \in Z; \text{ ҳангоми } n = 0, \ x_0 = 81 \text{ аст.}$$

?

1. Чаро муодилаи $\sin x = a$ ҳангоми $|a| > 1$ будан ҳал надорад?
2. Муодилаи $\sin x = a$ дар кадом фосилаҳо расо як ҳал дорад?
3. Ҳалли умумии муодилаи $\sin x = a$ - ро нависед.
4. Барои кадом қиматҳои x дар порчаи $[0;2\pi]$ функсияи $\sin x$: а) афзуншаванда; б) камшаванда; в) қиматҳои мусбат қабул мекунад?

227. Муодиларо ҳал кунед:

$$а)\sin\frac{3}{4}x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \ \ б)\sin\frac{2\pi}{x} = -\frac{1}{2}; \ \ в)\sin\frac{4\pi}{x^2} = 1;$$

$$г)\sin\frac{3\pi}{\sqrt{3}} = -1; \ д)\sin\sqrt{\frac{\pi}{x}} = 0; \ е)\sin(3 - 2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$ж)\sin 2x = \frac{\pi}{4}; \ \ з)\sin x = \frac{\pi}{3}; \ \ и)\sin x = \sqrt{0{,}01};$$

228. Муодиларо ҳал кунед:

$$а)\sin 4x = -1; \ б)\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \ в)\sin 2x = \frac{1}{2}; \ г)\sin 4x = 1;$$

$$д)2\sin x = \sqrt{2}; \ е)2\sin 2x = -1; \ ж)\sin x\left(2\sin x - \sqrt{2}\right) = 0.$$

Машқҳо барои такрор

229. Системам муодилаҳоро ҳал кунед:

$$а)\begin{cases} 3x+y+4=0 \\ x^2-y^2=2 \end{cases} \qquad б)\begin{cases} y+3x=2, \\ x^2-xy=3{,}36. \end{cases}$$

230. Агар сурати касри оддӣ ба квадрат бардошта шавад ва махраҷаш як воҳид кам карда шавад, касри ба адади 2 баробар ҳосил мешавад. Агар сурати каср 1 воҳид кам ва махраҷаш 1 воҳид зиёд карда шавад, касри ба $\frac{1}{4}$ баробар ҳосил мешавад. Ин касрро ёбед.

231. Ифодаи $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$ - ро аввал содда кунед, баъд ҳангоми $\sin\alpha=-\frac{1}{8}$ будан қиматашро ёбед.

24. Муодилаи cos*x*=α

Аён аст, ки агар $|a|>1$ бошад, муодилаи $\cos x=a$ ҳал надорад, чунки барои x – и дилхоҳ $|\cos x|\le 1$ мебошад.

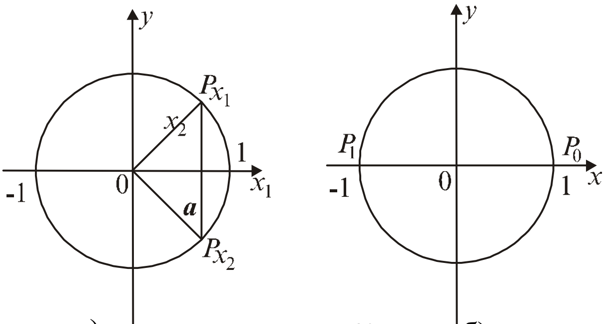
Бигузор $|a|\le 1$ бошад. Ҳамаи қиматҳои x – ро бояд ёфт, ки барояшон $\cos x=a$ шавад. Дар порчаи $[0;\pi]$ расо як ҳалли муодилаи $\cos x=a$ вуҷуд дорад, ки он адади $\arccos a$ мебошад.

Косинус функсияи ҷуфт мебошад пас дар порчаи $[-\pi;0]$ низ муодила як ҳал дорад, ин адад $-\arccos a$. Инак, муодилаи $\cos x=a$ дар порчаи $[-\pi;\pi]$, ки дарозиаш ба 2π баробар аст, ду ҳал дорад: $x=\pm\arccos a$.

Ба сабаби даври будани функсияи косинус ҳамаи ҳалҳои он аз ин ҳалҳо ба бузургии $2\pi n, (n\in Z)$ фарқ мекунад, яъне формулаи ёфтани решаҳои муодилаи $\cos x=a$ чунин аст:

$$\boxed{x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in Z.}$$

Ҳалли муодилаи мазкурро дар давраи воҳидӣ нишон додан мумкин аст. Мувофиқи таъриф $\cos x$ -и абсиссаи нуқтаи P_x - и давраи воҳидӣ мебошад.



а) ***Расми 40*** б)

Агар $|a|<0$ бошад, чунин нуқтаҳо дутоанд (расми 40,а); вале агар $a=1$ ё $a=-1$ бошад, як нуқта мавҷуд аст (расми 40, б) ва ҳангоми $a=1$ будан $\arccos a$ ва $-\arccos a$ баробар мешаванд (онҳо ба нол баробаранд), бинобар ин ҳалҳои муодилаи $\cos x = 1$ - ро намуди $x = 2\pi n,\ n \in Z,$ навиштан қабул шудааст.

Барои $a=-1$ ва $a=0$ низ шакли махсуси навишти ҳалҳои муодилаи $\cos x = a$ қабул шудааст:

$\cos x = -1$ он гоҳ $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$ $\cos x = 0$ он гоҳ $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$ ё $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Мисоли 1. Муодилаи $\cos\dfrac{5}{6}x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\dfrac{5}{6}x = \pm\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + 2\pi n,\ n \in Z;$ $\dfrac{5}{6}x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$x = \pm\dfrac{\pi}{5} + \dfrac{12}{5}\pi n,\ n \in Z.$

Мисоли 2. Муодилаи $\cos(3x-2) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\cos(3x-2) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $3x - 2 = \pm\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$

$3x - 2 = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in Z;$ $x = \dfrac{2}{3} \pm \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2}{3} + n\pi,\ n \in Z.$

Мисоли 3. Муодилаи $\cos\pi\sqrt{x} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\pi\sqrt{x} = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z,\ \ \pi\sqrt{x} = \pm\frac{5}{6}\pi + 2n\pi,\ n \in Z;$

$1)\sqrt{x} = \frac{5}{6} + 2n,\ n \in N_0$ дар ин ҷо $N_0 = 0,1,2,\ldots x = \left(\frac{5}{6} + 2\pi n\right)^2;$

$2)\sqrt{x} = -\frac{5}{6} + 2n,\ n \in N,\ x = \left(-\frac{5}{6} + 2k\pi\right)^2,\ k \in N.$

Мисоли 4. Муодилаи $\cos(2x-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал.

$$\cos(2x-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 2x-1 = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2n\pi,\ n \in Z;$$

$$2x-1 = \pm\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z;\quad 2x = 1 \pm \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2n\pi,\ n \in Z;$$

$$2x = 1 \pm \frac{3}{4}\pi + 2n\pi,\ n \in Z;\qquad x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{8}\pi + n\pi,\ n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

?

1. Барои чӣ ҳангоми $|a| > 1$ будан муодилаи $\cos x = a$ ҳал надорад?
2. Ҳалли муодилаи тригонометрӣ чӣ маъно дорад?
3. Барои кадом қиматҳои a муодилаи $\cos x = a$ ҳал дорад?
4. Даврӣ функсияи косинусро нависед.

232. Муодиларо ҳал кунед:

$a)\cos 2x = -\frac{1}{2};\ \ б)\cos\frac{2}{3}x = \frac{1}{2};\ \ в)\cos\frac{2\pi}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$г)\cos\frac{2\pi}{x^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2};\ \ д)\cos\frac{2\pi}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \ е)\cos\frac{\sqrt{\pi}}{x} = 0;$

$ж)\cos(2-3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \ з)\cos x = \frac{\pi}{4};\ \ и)\cos\frac{2\pi x}{3} = 0.$

233. Муодиларо ҳал кунед:

$$а)\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \ б)\cos x = \frac{1}{2};\ \ в)\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$г)\cos x = -1;\ \ д)2\cos x + \sqrt{3} = 0;\ \ е)\sqrt{2}\cos x - 1 = 0;$$

$$ж)2\cos x + \sqrt{2} = 0;\ з)3\cos x - 1 = 0;\ и)\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Машқҳо барои такрор

234. Нобаробариро ҳал кунед:

$$а)0{,}01x^2 \le 1;\quad б)4x \le -x^2;\quad в)\frac{1}{3}x^2 > \frac{1}{9}.$$

235. Муодиларо ҳал кунед:

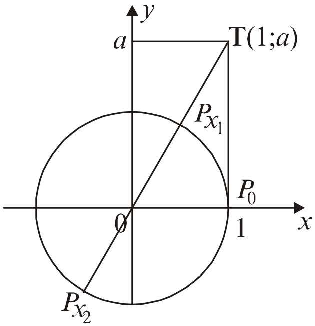
$$а)\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \ б)\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2};\ \ в)\sin 2x = 0.$$

236. Киштӣ бо равиши ҷараёни дарё нисбат ба муқобили ҷараён бо суръати $1\frac{1}{2}$ маротиба тезтар ҳаракат мекунад. Суръати ҷоришавии дарё 2,9 км дар як соат аст. Суръати киштиро дар оби ором муайян намоед.

25. Муодилаи *tgx=a*

Барои қимати дилхоҳи *a* дар фосилаи $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ расо як адади x мавҷуд аст, ки барояш $tgx = a$ дар фосилаи $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, ки дарозиаш ба π баробар аст, расо як реша дорад. Функсияи тангенс дорои даври π мебошад. Пас, решаҳои дигари муодилаи $tgx = a$ аз решаи ёфташуда ба бузургии $\pi n\ (n \in Z)$ фарқ мекунад, яъне

$$\boxed{x = arctga + \pi n,\ n \in Z.}$$



Расми 41

Ҳалли муодилаи $tgx = a$ -ро бо ёрии хати тангенсҳо нишон додан мумкин аст (расми 41). Барои адади ихтиёрии a дар хати тангенсҳо танҳо як нуқтаи дорои ординатаи a (нуқтаи $T(1;a)$) мавҷуд аст. хати рости ОТ давраи воҳидиро дар ду нуқта мебурад; дар ин сурат дар фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ нуқтаи P – и ҳамвории рост мувофиқ меояд, ки барояш $x_1 = arctga$ аст. Бояд қайд намуд, ки $arctg(-a) = -arctga$ мебошад.

Мисоли 1. Муодилаи $tg2x = \sqrt{3}$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. $2x = arctg\sqrt{3} + \pi n, 2x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\quad 2x = (3n+1)\frac{\pi}{3}.$

$x = (3n+1)\frac{\pi}{6}, n \in Z.$

Мисоли 2. Муодилаи $tg\frac{2}{3x} = -1$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\frac{2}{3x} = arctg(-1) + \pi n,\ \frac{2}{3x} = -arctg1 + \pi n,\ \frac{2}{3} = -\frac{\pi}{4} + \pi n,$

$\frac{2}{3x} = (4n-1)\frac{\pi}{4},\ \frac{1}{x} = (4n-1)\frac{3\pi}{8},\ x = \frac{8}{(4n-1)3\pi}, n \in Z.$

?

1. Муодилаи $tgx = a$ дар фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ чандто ҳал дошта метавонад?
2. Даври функсияи тангенс ба чӣ баробар аст?
3. Ҳалли умумии муодилаи $tgx = a$ - ро нависед.

237. Муодиларо ҳал кунед:

$а)tg\frac{x}{2} = \sqrt{3};\quad б)tg3x = -\sqrt{3};\quad в)tg\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{x}}{3};$

$г)tg\frac{\pi}{x^2} = -\frac{\sqrt{3}}{3};\quad д)tg\frac{\pi}{\sqrt{3}} = 1;\quad е)tg\sqrt{\frac{\pi}{x}} = -1;$

$ж)tg(1-x) = -2;\quad з)tg(2-3x) = 0;\quad и)tgx = 0.$

238. Муодиларо ҳал кунед:

$а) tgx - 1 = 0;$ $б) tg2x + 1 = 0;$ $в) 2tg3x = 2;$ $г) -2tg3x = 2;$

$д) tg\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}};$ $е) tg\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3};$ $ж) tg\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3};$

$з) tg2x = 0$

Машқҳо барои такрор

239. Нобаробарии $2x^2 - 5x - 3 > 0$ -ро ҳал кунед:

240. Муодиларо ҳал кунед:

$а) \sin x = -1;$ $б) 2\sin x + \sqrt{2} = 0;$ $в) \sin\frac{x}{4} = \frac{1}{2}.$

241. Фарқи квадратҳои ду адад ба 100 баробар аст. Агар аз сечанди адади якум дучанди адади дуюм тарҳ карда шавад, адади 30 ҳосил мешавад. Ин ададҳоро ёбед.

Ҳолатҳои хусусии муодилаҳои тригонометрии соддатаринро дар намуди ҷадвал меорем:

N	Муодила	Маҷмӯи ҳалҳо
1	$\sin x = a$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.$
	$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$
	$\sin x = 0$	$x = \pi n,\ n \in Z.$
	$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$
2	$\cos x = a$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$
	$\cos x = -1$	$x = \pi(2n+1),\ n \in Z.$
	$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} \cdot (2n+1),\ n \in Z.$
	$\cos x = 1$	$x = 2\pi n,\ n \in Z.$
3	$tgx = a$	$x = arctg + \pi n,\ n \in Z.$
	$tgx = -1$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$
	$tgx = 0$	$x = \pi n,\ n \in Z.$
	$tgx = 1$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

Муодилаҳои тригонометрии нисбатан мураккабро дида мебароем.

26. Муодилаҳои тригонометрии аргументашон якхела

Ин намуди муодилаҳои тригонометрӣ, мансуби муодилаҳое мебошанд, ки онҳо як функсияи тригонометрии ҳамон як аргуменро дар бар мегирад. Ба ибораи дигар номаълуми x фақат дар таҳти як функсияи тригонометрӣ дода мешавад.

Мисоли 1. Муодилаи $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. Баъди дохил намудани тағирёбандаи нави $\sin x = u(|u| \leq 1)$ муодила намуди зеринро мегирад:

$$2u^2 - 3u + 1 - 0,\ u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4};$$

$$u_1 = 1;\ u_2 = \frac{1}{2}.$$

Аз ин ҷо $\sin x_1 = u_1$ ва $\sin x_2 = u_2$,

$\sin x_1 = 1, \qquad б)\sin x_2 = 1$

$$x_1 = (-1)^n \arcsin 1 + 2\pi n,\quad x_2 = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n,$$

$$x_1 = (-1)^n \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.\quad x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

Мисоли 2. Муодилаи $\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\cos x = u(|u| \leq 1)$ гузошта, ҳосил мекунем:

$$u^2 + 2u - 3 = 0,\ u_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2,\ u_1 = 1,\ u_2 = -3.$$

Аз ин ҷо $\cos x_1 = 1$ ё $\cos x_2 = -3$.

Дар муодилаи $\cos x = -3$, $|-3| = -(-3) = 3 > 1$ аст, бинобар ин муодилаи $\cos x = -3$ ҳал надорад ($\varnothing$) ва мо муодилаи $\cos x = 1$ - ро ҳал мекунем: $x = \pm\arccos 1 + 2\pi n,\ \ x = 2\pi n,\ \ n \in Z$

Мисоли 3. Муодилаи $tg^2 x - 4tgx + 3 = 0$ ро ҳал мекунем.

Ҳал. $tgx = u$, аз ин ҷо $u^2 - 4u + 3 = 0$,

$$u_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1,\ u_1 = 1;\ u_2 = 3.$$

1) $tgx_1 = 1,$ аз ин ҷо $x_1 = arctg1 + \pi n$ ё $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

2) $tgx_2 = 3,$ аз ин ҷо $x_2 = arctg3 + \pi n,\ n \in Z.$

Мисоли 4. Муодилаи $3ctgx^2 - 5ctgx - 2 = 0$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. $ctgx = u,$ он гоҳ $3u^2 - 5u - 2 = 0,$

$$u_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6};\ u_1 = -\frac{1}{2}, u_2 = 2$$

1) $ctgx_1 = -\frac{1}{3},\ x_1 = \pi - arcctg\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z$

2) $ctgx_2 = 2,\ x_2 = arccttg2 + \pi n,\ n \in Z.$

?
1. Решаи бегона чӣ гуна реша аст?
2. тарзҳои ба муодилаи квадратӣ овардани муодилаи тригонометриро бо як ё ду мисол нишон диҳед.

242. Муодиларо ҳал кунед.

$а) 2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0;$ $б) \sin^2 x - \sin x - 3 = 0;$

$в) \sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0;$ $г) tg^2x - 2tgx - 12 = 0;$

$д) tg^4x - tg^2x - 12 = 0;$ $е) 4\sin^2 x + \cos x - 3\frac{1}{2} = 0.$

243. Муодиларо ҳал кунед:

$а) 3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0;$ $б) \sin^2 x - \cos^2 x + 2\sin x + 1 = 0;$

<u>Машқҳо барои такрор</u>

244. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$а) \begin{cases} 2xy - y = 7; \\ x - 5y = 2; \end{cases}$ $б) \begin{cases} x^2 + 2y = 18; \\ 3x = 2y; \end{cases}$

245. Қимати ифодаҳоро ёбед:

$а) 5\sin\frac{\pi}{2} + 4\cos 0 - 3\sin\frac{3\pi}{2} + \cos\pi;$

$б) \sin(-\pi) - \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 2\sin\pi - tg\pi.$

246. Пайдарпайӣ (a_n) бо формулаи $a_n = 4n - 1$ дода шудааст. Аъзои чандуми пайдарпайӣ ба: *а*) 91; *б*) 399 баробар мешавад?

27. Усули ба як функсия овардан

Агар муодила функсияҳои гуногуни тригонометрии аргументи номаълумро дар бар гирад, он гоҳ ҳамаи ин функсияҳоро бо як функсия ифода карда, амали гуоришро иҷро намуда, муодилаеро, ки танҳо як функсия тригонометрии аргументи номаълумро дар бар мегирад, тартиб додан лозим аст.

Дар вақти истифода бурдани формулаҳое, ки ба воситаи як функсия функсияи дигари тригонометриро ифода менамоянд, ба муодила дохил намудани радикал мумкин аст ва дар вақти аз радикал озод кардани муодила решаи бегона ба вуҷуд омада метавонад. Бинобар он тавсия мекунем, ка (агар имконпазир бошад) функсияҳои тригонометрӣ тавре ба ҳам иваз карда мешавад, ки ба муодила радикал дохил нашавад.

Мисоли 1. Муодилаи $3\cos x = 2\sin^2 x$ -ро ҳал мекунем:

Ҳал. $\sin^2 x$ -ро бо $1-\cos^2 x$ иваз намуда, муодилаи квадратиро нисбат ба $\cos x$ ҳосил мекунем:

$3\cos x - 2(1-\cos^2 x)$, ё $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0.$

Акнун ҳалли муодилаи ҳосилшударо меёбем:

$$\cos x = u,\ 2u^2 + 3u - 2 = 0,\ u_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2\cdot 2} = \frac{-3\pm 5}{4};$$

$$u_1 = -2;\ u_2 = \frac{1}{2}.$$

$$x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Мисоли 2. Муодилаи $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ -ро ҳал мекунем:

Ҳал. $\cos^2 x$ -ро ба $1-\sin^2 x$ иваз намуда, ҳосил мекунем:

$$2\left(1-\sin^2 x\right) + 3\sin x = 0, \qquad 2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 0,$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0, \qquad \sin x = u, \qquad 2u^2 - 3u - 2 = 0,$$

$$u_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4} = \frac{3\pm 5}{4};\ u_1 = -\frac{1}{2};\ u_2 = 2.$$

Азбаски муодилаи $\sin x = 2$ ҳал надорад, бинобар ин аз муодилаи $\sin x = -\frac{1}{2}$ меёбем: $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x_1 = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n$,

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, \quad x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in Z.$$

Мисоли 3. Муодилаи $(tgx - ctgx)^2 = 1 + ctg^2 x$ -ро ҳал мекунем:

Ҳал. Аз формулаи $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ истифода бурда ифодаи тарафи чапи муодиларо содда мекунем:

$$tg^2 x - 2tgx \cdot ctgx + ctg^2 x = 1 + ctg^2 x \quad (tgx \cdot ctgx = 1), \quad tg^2 x = 3,$$

$tgx = \pm\sqrt{3}$.

$$1) tgx = -\sqrt{3}, \ x = arctg(-\sqrt{3}) + \pi n, \ x_1 = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \ n \in Z$$

$$2) tgx = \sqrt{3}, \ x = arctg\sqrt{3} + \pi n, \ x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi n, \ n \in Z.$$

Ҷавоб: $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, \ n \in Z.$

Мисоли 4. Муодилаи $\cos^4 x - \sin^4 x = \sin x$ -ро ҳал мекунем:

Ҳал. Тарафи чапи муодиларо аз рӯи формулаи зарби мухтасари $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$ ба зарбкунандаҳо ҷудо намуда ва дар асоси айнияти $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ҳосил мекунем:

$$\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = \sin x,$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \sin x = 0, \qquad 1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sin x = 0,$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \qquad \sin x = u, \qquad 2u^2 + u - 1 = 0,$$

$$u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}; \quad u_1 = -1; \ u_2 = \frac{1}{2}.$$

$$1) \sin x_1 = -1, \ x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z.$$

$$2) \sin x_2 = \frac{1}{2}, \ x_2 = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, \ x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in Z.$$

Мисоли 5. Муодилаи $2ctg3x + tg3x + 3 = 0$ -ро ҳал мекунем:

Ҳал. Бо назардошти $3x \neq \pi n,\ x \neq \frac{\pi n}{3}$ ва $3x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $x \neq \frac{\pi n}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $ctg3x$-ро бо $\frac{1}{tg3x}$ иваз намуда, ҳосил мекунем:

$$2 \cdot \frac{1}{tg3x} + tg3x + 3 = 0,\ tg^2 3x + 3tg3x + 2 = 0.$$

Тағйирёбандаи нави $tg3x = u$-ро дохил намуда, ҳосил мекунем:

$$u^2 + 3u + 2 = 0,\ u_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2};$$

$$u_1 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2;\ u_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1.$$

$$1)3x_1 = -arctg2 + \pi n,\ x_1 = -\frac{1}{3}arctg2 + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z.$$

$$2)tg3x_2 = -1,\ 3x_2 = arctg(-1) + \pi n,\ x_2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z.$$

<u>Мисоли 6.</u> Муодилаи $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$-ро ҳал мекунем.
<u>Ҳал.</u>

$$2\left(1 - \cos^2 x\right) + 3\cos x - 3 = 0,\ 2 - 2\cos^2 x + 3\cos x - 3 = 0,$$

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0,\ \cos x = u\left(|u| \leq 1\right),\ 2u^2 - 3u + 1,$$

$$u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4};\ u_1 = \frac{1}{2};\ u_2 = 1.$$

$$1)\cos x_1 = \frac{1}{2},\ x_1 = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

$$2)\cos x_2 =,\ x_2 = 2\pi n,\ n \in Z.$$

?

1. Решаи муодилаи квадратии $ax^2 + bx + c = 0$ - ро нависед.
2. Формулаи $a^2 - b^2$ - ро ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед.
3. Чаро дар табдилдиҳӣ кушиш мекунем, ки ба муодила радикал дохил нашавад?

247. Муодиларо ҳал кунед:

$$а)2\sin^2 x - 3\cos x + 1 = 0;\ \ б)ctg^2 2x - tg\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2;$$

$$в)2\cos^2 x - 4\sin^2 x = 1;\ \ г)\left(2\cos 2x - \sin^2 x\right) = 1;$$

$$д)2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0;$$

$$ж)4\sin^2 x = 1 + 2\sin x \cdot \cos x.$$

Машқҳо барои такрор

248. Нобаробариро ҳал кунед:

$$а)6x - 10x^2 < 0; \qquad б)7x^2 \le -2x.$$

249. Муодиларо ҳал кунед:

$$а)\frac{2x-2}{x+3} - \frac{x+3}{3-x} = 5;\ \ б)\frac{32}{x^3 - 2x^2 - x + 2} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x+1}.$$

250. Прогрессияи геометрии (a_n) дода шуда аст, ки дар он $a_9 = 81$ ва $q = \sqrt{3}$ аст. Суммаи сенздаҳ аъзои аввалаашро ёбед.

28. Усули ба зарбкунандаҳо ҷудо кардан дар ҳалли муодилаҳои тригонометрӣ

Агар тарафи чапи муодиларо, пас аз ба тарафи дигар гузаронидани ҳамаи ҷамъшавандаҳо, ба зарбкунандаҳо ҷудо кардан мумкин бошад, он гоҳ муодила намуди ҳосили зарби ба нул баробарро мегирад. Пас аз он ба навбат ҳар яке аз зарбкунандаҳоро ба нул баробар намуда (ҳосили зарб танҳо ҳамон вақт ба нул баробар аст, ки агар лоақал яке аз ҳамзарбшавандаҳо ба нул баробар бошад), ҳар яке аз муодилаҳои ҳосилшударо ҳал карда, баъд ҳамаи решаҳои ёфташударо ба як маҷмӯи ҳалҳои муодила якҷоя кардан лозим аст.

Мисоли 1. Муодилаи $\cos^2 x - \cos x = 0$ - ро ҳал мекунем:

Ҳал. $\cos x \cdot \left(\cos x - 1\right) = 0,$ ё $\cos x = 0$ ва ё $\cos x - 1 = 0$

$$а)\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;\ б)\cos x - 1 = 0,\ x = 2\pi n,\ n \in Z.$$

Мисоли 2. Муодилаи $2\sin 2x - \sin^2 2x = 0$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\sin 2x\left(2 - \sin 2x\right) = 0,$ аз ин ҷо $\sin 2x = 0,$

$2x = \pi n$ ва $x = \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

Ҳамзарбшавандаи дуюм $(2-\sin 2x)$ барои ягон қимати x баробари нул намешавад.

Мисоли 3. Муодилаи $2\cos x \cdot ctg3x = ctg3x$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. $2\cos x \cdot ctg3x - ctg3x = 0,\ ctg3x(2\cos x - 1) = 0.$

$$а) ctg3x = 0,\ 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z;$$

$$б) 2\cos x - 1 = 0,\ 2\cos x = 1,\ \cos x = \frac{1}{2},\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Мисоли 4. Муодилаи $\cos 2x = \sin\left(6x - \frac{\pi}{2}\right)$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Аз хосияти тоқ будани функсия синус ва формулаҳои мувофиқоварӣ истифода бурда $\sin\left(6x - \frac{\pi}{2}\right)$ -ро бо $(-\cos 6x)$ иваз намуда ҳосил мекунем (мувофиқи формулаи мувофиқоварӣ).

$$\cos 2x = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right)\right] = \cos 2x = -\cos 6x, \cos 2x + \cos 6x = 0.$$

Акнун аз формулаи ба ҳосили зарб табдил додани суммаи ду косинусҳо истифода бурда, тарафи чапи муодиларо ба намуди ҳосили зарб ифода мекунем.

$$2\cos\frac{2x+6x}{2} \cdot \cos\frac{2x-6x}{2} = 0, \qquad 2\cos 4x \cdot \cos(-2x) = 0,$$

$$\cos 4x \cdot \cos 2x = 0, \quad \cos 4x = 0, \quad 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z,$$

$$\cos 2x = 0,\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

?

1. Усули ба зарбкунандаҳо ҷудо намудани муодилаи тригонометриро баён намоед.
2. Ҳосили зарби ду адад дар кадом ҳолат ба нул баробар мешавад?

251. Муодиларо ҳал кунед:

$а) 2\sin 2x \cdot \cos 4x + \cos 4x = 0;\quad б) 2\sin^2 x \cdot \cos x = 0;$

$в) \sin x \cdot tg\frac{x}{2} = 0;\quad г) \sin 3x + \sin x = 0;$

$д) \cos 2x \cdot \cos x = \sin 2x \cdot \sin x;\quad е) \cos 2x \cdot \cos 3x = \cos 5x;$

$ж) \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16} \sin 2x;$

$з) \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x;$

Машқҳо барои такрор

252. Муодиларо ҳал кунед:

$$а) 1 + \cos x = ctg \frac{x}{2}; \qquad б) 2(x-6)\cos x = x - 6.$$

253. Нобаробариро ҳал кунед:

$а) 3x + x^2 \le 0;$ $б) y^2 < 10y + 24.$

254. Велосипедсавор аз деҳа ба шаҳр, ки масофаи байнашон 72 км аст, равон шуд. Баъди 15 дақиқа велосипедсавори дигар аз шаҳр ба пешвози ӯ баромад. Суръати велосипедсавори дуюм аз суръати велосипедсавори якум 2 км/соат зиёд аст. Велосипедсаворон дар миёнаи роҳ бо якдигар дучор шуданд. Суръати ҳаракати ҳар як велосипедсаворро ёбед.

29. Муодилаи тригонометрии якҷинса

Муодилаҳои тригонометрии нисбат ба $\sin x$ ва $\cos x$ якҷинса намуди зеринро доранд:

$$a\cos^2 x + b\cos x \cdot \sin x + c\sin^2 x = 0. \qquad (1)$$

Аз муодилаи (1) бармеояд, ки аъзои озоди муодилаҳои якҷинса баробари нул аст ва дар акси ҳол муодила якҷинса башумор намеравад. Ин намуди муодилаҳои тригонометрӣ якҷинса нисбат ба $\sin x$ ва $\cos x$ номида мешаванд (тамоми ҷамъшавандаҳои муодила дараҷаҳои якхела доранд). Дараҷаи якҷинсагии онҳо ба 2 баробар аст.

Чунон мешуморем, ки коэффициентҳои a, b, c аз нул фарқ мекунанд $(a \ne 0,\ b \ne 0,\ c \ne 0)$. Кунҷҳое, ки синус ё косинусашон ба нул баробар аст, решаҳои муодилаи (1) шуда наметавонанд, яъне $\sin x \ne 0,\ \cos x \ne 0$. Инро шарҳ медиҳем. Барои ин аз баръаксаш фарз мекунем, яъне фарз мекунем, ки $\cos x = 0$ аст. Он гоҳ ду аъзои аввалини тарафи чапи муодилаи (1) ба нул табдил меёбад ва муодила намуди $c\sin^2 x = 0$ - ро мегирад, ки ин ҳангоми $c \ne 0$ будан имконпазир аст, чунки ҳангоми $\cos x = 0$ будан, $\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x} = \pm 1$ мешавад. Ин зиддият фарзияти $\cos x = 0$ - ро инкор мекунад ва дар ҳақиқат $\cos x \ne 0$ аст.

Айнан ҳамин тавр муҳокимарониҳоро барои $\sin x$ гузаронида боварӣ ҳосил мекунем, ки $\sin x \neq 0$ аст. Дар ин ҳолат ҳамаи аъзоҳои муодиларо ба $\cos^2 x$ ё $\sin^2 x$ тақсим намудан мумкин аст. Дар натиҷа муодилаи квадратиро нисбат ба тангенс ё котангенс ҳосил мекунем:

$$ctg^2 x + btgx + a = 0,$$

агар $b^2 - 4a \cdot c \geq 0$ бошад, он гоҳ муодилаи ҳосилшуда решаҳои ҳақиқӣ дорад.

Мисоли 1. Муодилаи $\sin x - \cos x = 0$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. Азбаски $\cos x \neq 0$ аст, ҳамаи аъзоҳои муодилаи додашударо ба $\cos x \neq 0$ тақсим намуда ҳосил мекунем:

$\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{\cos x}, \; tgx = 1$ аз ин ҷо $x = arctg1 + \pi k,$

$x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \; k \in Z.$

Мисоли 2. Муодилаи $3\sin^2 x - 7\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. Ҳамаи аъзоҳои муодилаи додашударо ба $\cos^2 x$ тақсим намуда ҳосил мекунем:

$$3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 7\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + 2\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$3tg^2 x - 7tgx + 2 = 0, \; tgx = u, \; 3u^2 - 7u + 2 = 0,$$

$$u_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 25}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm 5}{6}; \; u_1 = \frac{1}{3}; \; u_2 = 2$$

$$tgx_1 = \frac{1}{3}, \; x_1 = arctg\frac{1}{3} + \pi n, \; n \in Z.$$

$$tgx_2 = 2, \; x_2 = arctg2 + \pi n, \; n \in Z.$$

Мисоли 3. Муодилаи $\sin 3x + \cos 3x = 0$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\cos 3x \neq 0,$ бинобар ин ҳамаи аъзоҳои муодиларо ба $\cos 3x$ тақсим мекунем:

$$tg3x + 1 = 0, \; 3x = arctg(-1) + \pi n, \; 3x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,$$

аз ин ҷо $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z.$

<u>Мисоли 4.</u> Муодилаи $tg^3x+tg^2x-3tgx-3=0$ - ро ҳал мекунем.

<u>Ҳал.</u> Тарафи чапи муодиларо ба зарбкунандаҳо ҷудо намуда, ҳосил мекунем:

$$tg2x(tgx+1)-3(tgx+1)=0,\quad (tgx+1)(tg^2x-3)=0,$$

$a)\ tgx+1=0,\quad tgx=-1$ аз ин ҷо $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z,$

$б)\ tg^2x-3=0,\quad tg^2x=3$ аз ин ҷо $tgx_{1,2}=\pm\sqrt{3},\ tgx_1=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$

$tgx_2=-\sqrt{3},$ аз ин ҷо $x_2=-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$

> **?**
>
> 1. Чӣ гуна муодиларо муодилаи якҷинса меноманд?
> **2.** Дараҷаи якҷинсагии муодила чӣ гуна муайян карда мешавад?
> **3.** Яке аз тарзҳои ба муодилаи якҷинса овардани муодиларо дар мисоли мушаххас нишон диҳед?

255. Муодиларо ҳал кунед:

$а)\ 3\sin^2x=\cos^2x;$ $б)\ 4\sin^2x+\sin x\cdot\cos x-3\cos^2x=1;$

$в)\ 4\sin^2x+2\cos^2x-3\sin 2x;$ $г)\ \sin 2x-2\sqrt{3}\cos^2x=0;$

$д)\ 3\sin^2x-4\sin x\cdot\cos x+5\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=2;$ $е)\ \sin 2x-ctgx=0;$

$ж)\ 1-\cos 6x=tg3x;$ $з)\ \sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=\cos x;$ $и)\ \frac{\sin x}{1+\cos x}=\sin\frac{x}{2}.$

Машқҳо барои такрор

256. Нобаробариро ҳал кунед:

$а)\ 2x+7>0;$ $б)\ \frac{3}{2-x}\le 0;$ $в)\ \frac{1}{3-2x}<0.$

257. Қимати ифодаро ёбед:

$a) \sin\alpha - \cos\alpha - 3\cos 3\alpha,$ ҳангоми $\alpha = 30^0$ будан;

$б) \sin 2\alpha + tg\alpha - 2tg\alpha,$ ҳангоми $\alpha = 45^0$ будан.

258. Ду бригадаи роҳсозон кӯчаеро мумфарш мекунанд. Як бригада ин кӯчаро назар ба бригадаи дуюм 4 соат тезтар мумфарш карда метавонад. Онҳо ҳамроҳ кор карда, дар 24 соат 5-то ҳамингуна кӯчаро мумфарш карданд. Агар ҳар як бригада танҳо кор кунад, ин кӯчаро дар чанд соат мумфарш мекунанд?

30. Дар бораи гузориши универсалӣ

Методи гузориши универсалӣ дар ҳалли муодилаҳои тригонометрӣ аз он иборат аст: ба муодила тавре як адади номаълуми (тағйирёбандаи) ёрирасон дохил карда мешавад, ки пас аз иваз кардани номаълумҳо нисбат ба адади номаълуми ёрирасон муодилаи ратсионалӣ ҳосил шавад.

Ҳангоми ҳалли чунин намуди муодилаҳои тригонометрӣ ва барои пайдо нашудани решаҳои бегона аз гузориши универсалии тригонометрии $tg\frac{x}{2} = t$ истифода бурдан ба мақсад мувофиқ аст.

Мисоли 1. Муодилаи $\sin x + \cos x = 1$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Азбаски $\sin x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ ва $\cos x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ аст, бинобар ин муодилаи додашуда намуди зеринро мегирад:

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 1$$

Акнун гузориши универсалиро дохил намуда, ҳосил мекунем:

$tg\frac{x}{2} = t$. Он гоҳ $\dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = 1,\quad \dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} - 1 = 0,$

$2t + 1 - t^2 - 1 - t^2 = 0, \quad (1 + t^2 \neq 0). \quad 2t^2 - 2t = 0, \; 2t(t-1) = 0,$

аз ин ҷо $t_1 = 0, \quad t_2 = 1.$

Ҳамин тариқ,

$$tg\frac{x_1}{2}=0,\quad \frac{x_1}{2}=arctg0+\pi n,\ \frac{x_1}{2}=\pi n,\ n\in Z.$$

$$tg\frac{x_2}{2}=1,\quad \frac{x_2}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad ва\quad x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Мисоли 2. Муодилаи $3\sin x+4\cos x=4$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\sin x$ ва $\cos x$ - ро бо тангенси нисфи кунҷ $\left(tg\frac{x}{2}\right)$ ифода намуда, ҳосил мекунем:

$$\frac{6tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{4\left(1-tg^2\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\frac{x}{2}}-4=0,\ tg\frac{x}{2}=t,$$

он гоҳ,

$$\frac{6t}{1+t^2}+\frac{4\left(1-t^2\right)}{1+t^2}-4=0,\quad 6t+4-4t^2-4-4t^2=0\left(1+t^2\neq 0\right),$$

$8t^2-6t=0,\ 2t(4t-3)=0,$ аз ин ҷо $t_1=0,\ t_2=\frac{3}{4}$ мебошад. Ҳамин тарик, $tg\frac{x_1}{2}=0,$

$$x_1=2\pi n,\ n\in Z.\ tg\frac{x_2}{2}=\frac{3}{4},\ x_2=2arctg\frac{3}{4}+\pi n,\ n\in Z$$

мешавад.

Мисоли 3. Муодилаи $4\sin x+3\cos x=-3$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\frac{8tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{3\left(1-tg^2\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\frac{x}{2}}+3=0,$

$$tg\frac{x}{2}=t,\ \frac{8t}{1+t^2}+\frac{3\left(1-t^2\right)}{1+t^2}+3=0,\quad 8t+3-3t^2+3+3t^2=0$$

$$8t+6=0,\quad t=\frac{3}{4}.$$

Ҳамин тарик,

$$tg\frac{x}{2}=-\frac{3}{4},\quad \frac{x}{2}=-arctg\frac{3}{4}+\pi n,\quad x=-2arctg\frac{3}{4}+\pi n,\ n\in Z$$

мешавад.

Мисоли 4. Муодилаи $3\sin x+\cos x=1$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал.

$$\frac{6tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}-1=0,\quad tg\frac{x}{2}=t,\quad \frac{6t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}-1=0,$$

$$6t+1-t^2-1-t^2=0,\quad 2t^2-6t=0,\ 2t(t-3)=0,\ t_1=0\ ва\ t_2=3.$$

Ҳамин тариқ,

$$tg\frac{x_1}{2}=0,\ x_1=2\pi n,\ n\in z.\ tg\frac{x_2}{2}=3,\ x_2=2arctg3+\pi n,\ n\in Z$$

мешавад.

?	1. Усули гузориши универсалиро кӯтоҳ баён кунед. **2.** Чӣ гуна решаро барои муодила решаи бегона меноманд? **3.** Формулаҳои $\sin x$ ва $\cos x$ -ро ба воситаи $tg\frac{x}{2}$ ифода намоед.

259. Муодиларо ҳал кунед:

$а)\ 4\sin x+5\cos x=6;\qquad б)\ \sqrt{3}\sin x-2\cos x=1;$

$в)\ 2(\cos x+\sin x)=\sqrt{2};\qquad г)\ \sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{2};$

$д)\ \sin x-\sqrt{5}\cos x=\sqrt{5};\qquad е)\ \sin 2x+\cos 2x=1.$

Машқҳо барои такрор

260. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

$$а)\begin{cases}3x-18>0,\\4x-12>0,\end{cases}\qquad б)\begin{cases}2x+4\le 0,\\4-3x>0,\end{cases}\qquad в)\begin{cases}4x+2\ge 5x+3,\\2-3x<7-2x.\end{cases}$$

261. Дар байни ададҳои 1 ва 16 се то чунин ададҳоеро нависед, ки он пайдарпайии прогрессияи геометриро ифода намояд.

262. Суммаи n аъзои аввали прогрессияи геометрии $\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{3}{8}...$-ро нависед.

263. Дар прогрессияи геометрӣ $b_1 = 1;\ b_3 + b_5 = 90$ мебошад. Прогрессияро нависед.

264. Суммаи прогрессияи геометриро ёбед: $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + ...$

31. Ҳалли системаи муодилаҳои тригонометрӣ

Системаи муодилаҳоеро меомӯзем, ки онҳо фақат аз муодилаҳои тригонометрӣ ва алгебравӣ иборатанд.

Системаҳои зерин мисоли системаи муодилаҳои тригонометрӣ шуда метавонанд:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 0; \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 0{,}25; \\ \sin y \cdot \cos x = 0{,}75; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -\frac{1}{3}. \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Мисоли 1. Системаи муодилаҳои $\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}; \\ \sin x = 2\sin y; \end{cases}$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. Аз муодилаи якум меёбем: $y = x - \frac{5\pi}{3}$ он гоҳ

$$2\sin y = 2\sin\left(x - \frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\sin x \cdot \cos\frac{5\pi}{3} - \cos x \cdot \sin x\frac{5\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\sin x\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$$

мешавад. Муодилаи дуюми системаи додашуда намуди зеринро мегирад: $\sin x = \sin x + \sqrt{3}\cos x$, аз ин ҷо $\cos x = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, ки дар ин ҷо $n \in Z$ аст. Пас,

$y = x - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{5\pi}{3} = \pi n - \frac{7\pi}{6},\ n \in Z$ мешавад.

Мисоли 2. Системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{6}; \\ \sin x-\sin y=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. Муодилаи дуюми системаро табдил медиҳем:

$2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}.$ Он гоҳ $\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{x+y}{2}=\frac{1}{4},$ $\cos\frac{x+y}{2}=\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{12}};$

$$4\sin\frac{\pi}{12}=4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\sqrt{6}-\sqrt{2},$$

$\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ -ро ҳосил мекунем. Аз $\cos\frac{x+y}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

муодилаи $x+y=\pm 2\arccos\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+4\pi n,\ n\in Z.$ - ро пайдо карда ба системаи зеринро омада мерасем:

$$\begin{cases} x+y=\pm 2\arccos\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+4\pi n,\ n\in Z. \\ x-y=\dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Ин муодилаҳоро бо ҳам ҷамъ ва тарҳ намуда ҳосил мекунем:

$$x=\pm\arccos\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+2\pi n+\frac{\pi}{12},$$

$$y=\pm\arccos\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+2\pi n-\frac{\pi}{12},\ n\in Z.$$

<u>**Мисоли 3.**</u> Системаи муодилаҳоро $\begin{cases} x+y=\dfrac{2}{3}\pi, \\ tgx+tgy=2\sqrt{3}, \end{cases}$ - ро ҳал мекунем:

Ҳал. Аз $tgx + tgy = 2\sqrt{3}$ ҳосил мекунем: $\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = 2\sqrt{3}.$ Ин муодиларо бо муодилаи якуми система табдил медиҳем:

$$\frac{\sin\frac{2}{3}\pi}{\cos x \cdot \cos y} = 2\sqrt{3}; \quad \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4} \quad \cos(x+y) + \cos(x-y) = \frac{1}{2};$$

$$\cos\frac{2}{3}\pi + \cos(x-y) = \frac{1}{2}; \ \cos(x-y) = 1; \ x - y = 2\pi n, \ n \in Z.$$

Ҳамин тариқ ба системаи зерин соҳиб мешавем:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{2}{3}\pi, \\ x - y = 2\pi n, \ n \in Z. \end{cases}$$

Ин муодилаҳоро ҷамъ ва тарҳ намуда $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n;$ $y = \dfrac{\pi}{3} - \pi n, \ n \in Z$ - ро ҳосил мекунем.

<u>Мисоли 4.</u> Системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3}, \\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$ - ро ҳал мекунем.

<u>Ҳал.</u> Муодилаи дуюмро табдил медиҳем:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 1; \ \cos(x+y) + \cos\frac{\pi}{3} = 1; \ \cos(x+y) = \frac{1}{2};$$

$$x + y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z. \quad \begin{cases} x + y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z. \\ x - y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n + \frac{\pi}{6}, \ y = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n - \frac{\pi}{6}, \ n \in Z.$$

<u>Мисоли 5.</u> Системаи муодилаҳои $\begin{cases} x - y = \dfrac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\sin y \end{cases}$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. Аз муодилаи якум меёбем: $y = x - \frac{5\pi}{3}$, он гоҳ

$$2\sin y = 2\sin\left(x - \frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\sin x \cdot \cos\frac{5\pi}{3} - \cos x \cdot \sin\frac{5\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\sin x \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = \sin x + \sqrt{3}\cos x \text{ мешавад.}$$

Муодилаи дуюми системаро дигар шакл мекунем: $\sin x = \sin x + \sqrt{3}\cos x$, аз ин ҷо $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ки дар ин ҷо $n \in Z$ аст. Баъд меёбем:

$$y = x - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{5\pi}{3} = \pi n - \frac{7\pi}{6},\ n \in Z.\ \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n - \frac{7\pi}{6}\right).$$

Мисоли 6. Системаи муодилаҳои

$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}, \end{cases}$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. Аз муодилаи якум $\cos y = -\sin x$ - ро ҳосил мекунем, он гоҳ муодилаи дуюм намуди зеринро мегирад:

$$\sin^2 x + \sin^2 x = 2,\ \ 2\sin^2 x = \frac{1}{2};\ \ \sin^2 x = \frac{1}{4},\ \ \sin x = \pm\frac{1}{2},$$

$$x_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ \ x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \ x_2 = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n,$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.\ \ \cos y_1 = -\sin x_1 = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot$$

$$y_1 = \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n;\ \ y_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z\cdot$$

$$\cos y_2 = -\sin x_2 = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},\ \ y_2 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ \ y_2 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

Ҷавоб: $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{2\pi}{6} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right).$

?

1. Ҳалли системаи ду муодилаи хаттии дуномаълума гуфта чиро меноманд?
2. Ҳалли системаи муодилаҳои хаттиро бо методҳои гузориш ва ҷамъи алгебравӣ дар мисоли системаҳои тригонометрӣ шарҳ диҳед.

265. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед.

$$а)\begin{cases} x+y=\frac{2}{3}\pi; \\ \frac{\sin x}{\cos y}=2; \end{cases} \quad б)\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{6}; \\ \frac{\sin x}{\cos y}=2; \end{cases} \quad в)\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}; \\ \frac{tgx}{tgy}=3; \end{cases}$$

$$г)\begin{cases} x+y=\frac{5\pi}{6}; \\ \frac{ctgx}{ctgy}=-\frac{1}{3}; \end{cases} \quad д)\begin{cases} x-y=\frac{13\pi}{12}; \\ \frac{\sin x}{\sin y}=\sqrt{3}; \end{cases} \quad е)\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{12}; \\ \frac{\sin x}{\sin y}=\sqrt{2}; \end{cases}$$

$$ж)\begin{cases} x+y=\frac{7\pi}{12}; \\ \frac{\sin x}{\cos y}=\frac{\sqrt{6}}{2}; \end{cases} \quad з)\begin{cases} x-y=\frac{13\pi}{12}; \\ \frac{\sin x}{\cos y}=-\frac{\sqrt{6}}{3}; \end{cases} \quad и)\begin{cases} x+y=\pi \\ \cos x-\cos y=1; \end{cases}$$

$$к)\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{2}; \\ \cos^2 x+\sin^2 y=2; \end{cases} \quad л)\begin{cases} x+y=\pi \\ \sin x+\cos y=1; \end{cases} \quad м)\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}; \\ \sin^2 x-\sin^2 y=1; \end{cases}$$

<u>Машқҳо барои такрор</u>

266. Нобаробариҳоро ҳал кунед:

$$а)x^2-6x<0; \quad б)8x+x^2\geq 0; \quad в)x^2<4; \quad г)x^2>6;$$

267. Муодилаҳоро ҳал кунед:

$$а)2\cos^2 x+\cos 2x=3; \qquad б)\sin^2 x+\sin^2 x=\frac{3}{2}.$$

268. Агар ба ҳар як мошин 3,5 т маҳсулот бор карда шавад, 4 т маҳсулот боқӣ мемонад; агар ба ҳар як мошин 4,5 т маҳсулот бор карда шавад, барои ба ҳамаи мошинҳо бор кардани маҳсулот 4 т маҳсулот камӣ мекунад. Чандто мошин буд?

§7. Ҳалли нобаробариҳои тригонометрӣ.

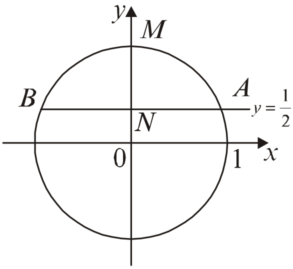
32.Ҳалли нобаробариҳои оддитарини тригонометрӣ

32.1. Ҳалли нобаробариҳои намуди $\sin x>a$, $\sin x<a$, ва $\cos x>a$, $\cos x<a$.

Ҳалли муодилаҳое, ки функсияҳои тригонометриро дар бар мегиранд, одатан ба ҳалли муодилаҳои намуди $\sin x\leq a$; $\cos x>a$; $tgx\geq a$ ва ғайра оварда мешаванд.

Тарзҳои ҳалли нобаробариро бо мисолҳо дида мебароем.

<u>Мисоли 1.</u> Нобаробарии $\sin x > -\frac{1}{2}$ - ро ҳал мекунем. Системаи координатаҳои $0xy$ - ро гирифта давраи радиусаш $R=1$ - ро чунон мегузаронем, ки марказаш дар ибтидои координатаҳо бошад (расми 42). Хати рости $y=\frac{1}{2}$ - ро мегузаронем.

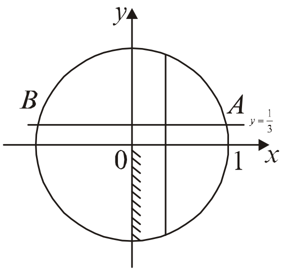


Расми 42

Ҳамаи қиматҳои *y* дар порчаи MN аз $\frac{1}{2}$ калонанд. Нуқтаи A дар нимҳамвории рост воқеъ мебошад, координатааш ба $\frac{1}{2}$ баробар аст. $x_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. тасаввур мекунем, ки камон аз нуқтаи A ба сӯи B муқобили ҳаракати ақрабаки соат фаҳмида мешавад.

Он гоҳ $x_2 > x_1$ буда, бо осонӣ фаҳмидан мумкин аст, ки

$$x_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$$ мебошад.



Расми 43

Ҳамин тариқ, ҳалли нобаробарии додашуда $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ будааст.

Даврӣ будани функсияи $\sin x$ - ро ба инобат гирифта, маҷмӯи ҳалҳои нобаробарии додашударо ҳосил мекунем:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5}{6}\pi + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Мисоли 2. Нобаробарии $\sin 2x \le \frac{1}{3}$ - ро ҳал мекунем.

<u>Ҳал.</u> $A\left(\arcsin\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$, $B\left(-\pi - \arcsin\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ (расми 43).

$$-\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2n\pi \le 2x \le \arcsin\frac{1}{3} + 2n\pi,$$

$$-\arcsin\frac{1}{3} + (2n-1)\pi \le 2x \le \arcsin\frac{1}{3} + 2n\pi,$$

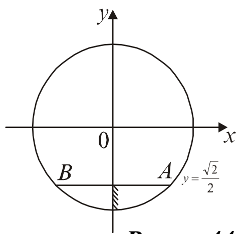
$$-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + (2n-1)\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + n\pi,\ n \in Z >$$

<u>Мисоли 3.</u> Нобаробарии $\sin\frac{2}{3}x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ - ро ҳал мекунем.

<u>Ҳал.</u> $A\left(\frac{\pi}{4};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B\left(-\frac{3}{4}\pi;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (расми 44).

$$-\frac{3}{4}\pi + 2\pi n \le \frac{2}{3}x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ -\frac{9}{8}\pi + 3\pi n \le x \le -\frac{3}{8}\pi + 3\pi n,$$

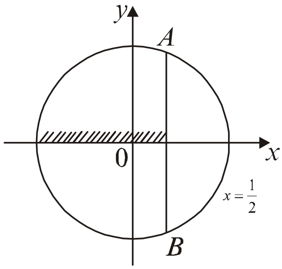
$$(8n-1)\frac{3}{8}\pi \le x \le (8n-1)\frac{3}{8}\pi,\ n \in Z.$$



Расми 44

Мисоли 4. Нобаробарии $\cos x < \frac{1}{2}$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. Маҷмӯи нуқтаҳои давраи воҳидӣ, ки абсисаҳояшон аз $\frac{1}{2}$ хурдтаранд, чаптари хати рости $x < \frac{1}{2}$ воқеъ мебошанд. Пас, маҷмӯи тамоми чунин нуқтаҳо аз камоне иборат аст, ки дар (расми 45) тасвир шудааст (охирҳои A ва B ба ин маҷмӯъ мансуб нестанд). x_1 ва x_1 - ро меёбем. Нуқтаи A дар нимдавраи болоӣ воқеъ буда, абсиссааш ба $\frac{1}{2}$ баробар аст; пас, $x_1 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ мебошанд. Ҳангоми гузариш аз нуқтаи A ба нуқтаи B дар камони гардиш муқобили ҳаракати ақрабаки соат ба ҷо оварда мешавад; он гоҳ $x_2 > x_1$ ва $x_2 = 2\pi - \arccos\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{3}$ мебошад.



Расми 45

Ҳангоми ҷой доштани шарти $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$ нуқта ба қисми болоии тасвиршудаи камон тааллуқ дорад (бо истисноии охирҳояш). Ҳалҳои нобаробарӣ, ки ба фосилаи $\left[0;2\pi\right]$ - и дарозиаш 2π тааллуқ дорад, чунинанд: $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$. Ба сабаби даврӣ будани косинус ҳалҳои дигар бо тарзи ба пайдошудаҳо ҷамъ кардани ададҳои намуди $2\pi n,\ n \in Z$.

?	**1.** Нобаробариҳои оддитарини тригонометриро бо кадом тарзҳо ҳал кардан мумкин аст? **2.** Адади *a* бояд кадом шартро қаноат кунонад, то ин ки нобаробариҳои $1.\sin x < a;\ 2.\sin x \ge a;\ 3.\cos x < a;$ $4.\cos x \ge a;$ ҳал дошта бошанд?

Нобаробариро ҳал кунед: (269-270)

269. $а)\sin x \ge -\frac{1}{2},\ x \in [0;\pi];$ $\quad б)\sin x \le -\frac{\sqrt{3}}{2},\ x \in [-\pi;0].$

$в)\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x \in [0;\pi];$ $\quad г)\sin x < -\frac{1}{2},\ x \in [-\pi;0].$

$д)\cos x > +\frac{\sqrt{2}}{2}, x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];$ $\quad е)\cos x < -\frac{1}{2}, x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right].$

$ж)\cos x = \frac{1}{2},\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];$ $\quad з)\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}, x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right].$

$и)\sin x \ge \frac{\sqrt{2}}{2},$ $\qquad к)\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

$л)\sin x \ge \frac{1}{2};$ $\qquad м)\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

270. $а)\cos x \ge -\frac{1}{2};$ $\quad б)\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2};$ $\quad в)\cos x \ge -\frac{\sqrt{3}}{2};$

$г)\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad д)2\cos x - 1 \ge 0$; $\quad е)2\sin x + \sqrt{2} \ge 0$;

$ж)\sin x \ge \frac{1}{2}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \ \frac{7\pi}{6}\right)$; $\quad з)\sin x + \cos 2x > 1$;

$и)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$; $\quad к)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 1.$

Машқҳо барои такрор

271. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

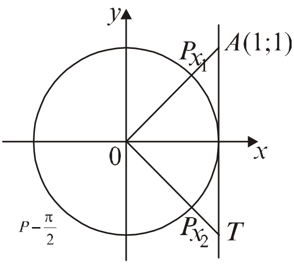
$а)y = 6 \qquad б)y = \frac{1}{x^2(1-x)}; \qquad в)y = \sqrt{-x}$;

272. Муодиларо ҳал кунед:

$а)\sin 4x = -1$; $б)\sin 4x = 1$; $\quad в)\sin x(2\sin x - \sqrt{2}) = 0.$

273. Масоҳати боғ 0,24 га мебошад. Боғ шакли секунҷаи росткунҷаро дорад ва як катеташ аз дигараш 20 м дарозтар аст. дарозии ҳудуди боғро ёбед.

32.2. Ҳалли нобаробариҳои намуди *tgx>a, tgx<a* .



Расми 46

Тарзи ҳалли нобаробариҳои $tgx > a, \ tgx < a$ ва $ctgx > a, \ ctgx < a$ - ро дар мисолҳо дида мебароем.

Мисоли 1. Нобаробарии $tgx \le 1$ - ро ҳал мекунем.

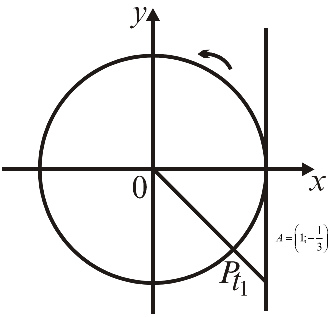
Ҳал. Даври тангенс ба π баробар аст. Бинобар ин аввал ҳамаи ҳалҳои ин нобаробариро меёбем, ки муттаалиқи фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ мебошад. Баъд аз даврӣ будани тангенс истифода мебарем. Барои ҷудо кардани тамоми нуқтаҳои p_x - и нимдавраи рост, ки қиматҳои x – и онҳо нобаробарии мазкурро қонеъ менамоянд, хати тангенсҳоро дида мебароем. Агар x ҳалли нобаробарӣ бошад, ординатаи нуқтаи T, ки ба tgx баробар аст, бояд аз 1 хурдтар ё баробари он бошад. Маҷмӯи чунин нуқтаҳои T порчаи AT мебошад (расми 46).

Маҷмӯи нуқтаҳои p_x, ки ба нуқтаҳои ин нур мувофиқанд, камони дар расм тасвиршуда мебошанд (диққат кунед: ба маҷмӯи муоинашаванда нуқтаи p_{x_1} тааллуқ надорад).

Шартеро меёбем, ки дар он нуқтаи p_x дар камони дар расм тасвиршуда тааллуқ дорад. $x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ ва $tgx_1 = 1$ аст, пас $x_1 = arctg_1 = \frac{\pi}{4}$. Ҳамин тавр, x бояд шарти $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$ - ро қонеъ намояд. Тамоми ҳалҳои нобаробарии мазкур, ки ба фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right)$ тааллуқ доранд, бо назардошти даврӣ будани тангенс чунинанд:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$$

<u>Мисоли 2.</u> Нобаробарии $3tg\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) < \sqrt{3}$ - ро ҳал мекунем.



Расми 47

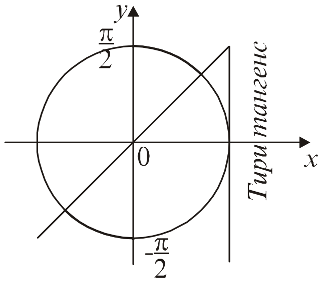
<u>Ҳал.</u> Нобаробарии мазкурро табдил дода, ҳосил мекунем:

$$tg\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) < \frac{\sqrt{3}}{3},\ -tg\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{3}}{3},$$

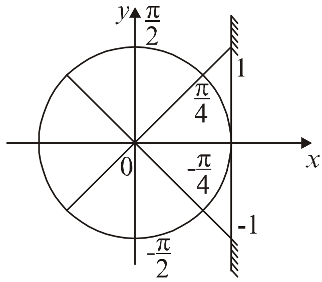
$tg\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{30}\right)$ - ро бо t ишорат мекунем; он гоҳ $tgt > -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ҳосил мешавад. Дар расми 50 камони мувофиқи t тасвир карда шуда аст. Азбаски $t_1 = arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$ аст, ҳосил мекунем:

$-\frac{\pi}{6} + \pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$ Ба тағирёбандаи x мегузорем:

$$-\frac{\pi}{6}+\pi n<\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$$



Расми 48



Расми 49

Мисоли 3. Нобаробарии $tgx>\sqrt{3}$ - ро ҳал мекунем.

<u>Ҳал.</u> Ҳал дар расми 48 тасвир шудааст.

$$-\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$$

Мисоли 4. Нобаробарии $|tgx|>1$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. Аз шарти мисол маълум аст: $\begin{cases} tgx>1, \\ tgx<-1, \end{cases}$ (расми 49).

$$\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n \text{ ва } -\frac{\pi}{2}+\pi n<x<-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$$

?

1. Барои кадом қиматҳои α тангенс вуҷуд надорад?
2. Дар кадом чорякҳо тангенс: *а*) мусбат; *б*) манфӣ мебошад?
3. Нобаробариҳои $tgx>a,\ tgx<a$ - ро бо кадом тарз ҳал кардан мумкин аст?

274. Нобаробариро ҳал кунед:

$а)\ tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1;$ $\quad б)\ tg2x\le 1;$ $\quad в)\ tgx\ge 0;$

$г)\ tg\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\ge \sqrt{3};$ $\quad д)\ tg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\ge -\sqrt{3};$ $\quad е)\ tg3x<1.$

275. Маҷмӯи қиматҳои t-ро ёбед, ки нобаробариро қонеъ кунанд ва ба фосилаи дар зер овардашуда мутааллиқ бошанд.

$$a)\, tgt > -\sqrt{3},\ t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right); \qquad б)\, tgt > \frac{1}{\sqrt{3}},\ t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right);$$

$$в)\, tgt > \frac{\sqrt{3}}{3},\ t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right); \qquad г)\, tgt < -1,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

276. Нобаробариро ҳал кунед:

$$а)\ tgx \le \sqrt{3}; \qquad б)\ tgx > -\frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad в)\ tgx \le \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad г)\ tgx < -1;$$

Маълумотҳои таърихӣ

Ишораҳои ҳозиразамони $\arcsin x$ *ва* $\arccos x$ соли 1772 дар асарҳои математик аз Вена Шерфер ва олими машҳури франсавӣ Ж.Д.Лагранж пайдо шудаанд. Чанде пештар ин мафҳумҳоро бо рамзҳои дигар Д.Бернулли кор фармудааст. Вале ин рамзҳо танҳо дар интиҳои асри XVIII мақбули ҳама шудаанд. Иловаи «арк» аз калимаи лотинӣ arc (камон) мебарояд, ки бо маънои мафҳум мувофиқ аст; $\arcsin x$ масалан, ин кунҷест (камоне низ гуфтан мумкин), ки синуси он ба x баробар аст.

Муддати зиёд тригонометрия чун қисми геометрия тараққӣ меёфт, яъне фактҳое, ки ҳоло дар истилоҳи функсияҳои тригонометрӣ баён мекунем, бо ёрии мафҳумот ва ҷумлаҳои геометрӣ баён ва исбот карда шудаанд. Шояд ба тараққиёти тригонометрӣ ҳал кардани масъалаҳои астрономия, ки аҳамияти калони амалӣ доштанд, омил шуда бошанд. Масалан, барои ҳал кардани масъалаҳои муайян намудани ҷои киштӣ, пешгӯӣ намудани гирифтани пеши офтоб ва моҳ ва ғайра. Ситорашиносон ба муайян кардани муносибатҳои байни тарафҳо ва кунҷҳои секунҷаҳои сферӣ, ки аз доираҳои калони сфера иборат буданд, мароқи калон зоҳир мекарданд. Инчунин бояд қайд кард, ки математикҳои дунёи қадим масъалаҳои геометрияи сфериро ҳал карда метавонистанд, ки онҳо назар ба масъалаҳои оид ба секунҷаҳои ҳамвор мураккабтар мебошанд.

Математики бузурги асри XVIII Л.Эйлер (1707-1783), ки аҳли Швейтсария буду солҳои дароз дар Россия кор кардааст ва аъзои академияи илмҳои Петербург буд, тригонометрияро ба намуди ҳозиразамон овардааст. Маҳз Эйлер аввалин шуда таърифи функсияҳои кунҷи дилхоҳро муоина намуда, формулаи мувофиқовариро дохил кард.

Эйлер қимати функсияҳои тригонометриро дар доира ҳисоб мекард, ки радиуси он чун воҳид қабул шуда буд. Эйлер масъалаи аломати функсияҳои тригонометриро дар чорякҳои гуногун қатъӣ ҳал кард, як қатор теоремаҳои тригонометриро оддӣ гардонид ва роҳҳои исботи умумии онҳоро нишон дод, аз аргументи комплексӣ, алоқаи байни функсияҳои тригонометрӣ ва функсияҳои нишондиҳандагиро кашф кард.

Сохти аналитикӣ ба геометрия вобаста набуданд. Назарияи функсияҳои тригонометрӣ, ки онро Эйлер сар карда буд, дар асарҳои олими бузурги рус Н.И.Лобачевский (1793-1856) ба анҷом расонида шудааст.

Абурайҳони Берунӣ (973-1048) ҳангоми ҳалли муодилаҳои кубӣ аввалин шуда методи санҷишро истифода намуд.

Ғиёсиддин ал-Кошӣ бошад дар рисолаи оид ба хорда ва синус методи итерасиониро кашф кард.

Барои муайян намудани $\sin 1^0$ аз рӯи $\sin 3^0$ ӯ муодилаи зеринро тартиб дод: $\sin 3^0 = 3\sin 1^0 - 4\sin^3 1^0$. Аз ин ҷо $x^3 + a = p \cdot x \cdot \sin 1^0 = x;$

$a = \dfrac{1}{4}\sin 3^0;\quad p = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{(a + x^3)}{p}(a - p_0 + R) = a + y.$ Азбаски $x < 1$ аст, пас $x^3 < x,$ он гоҳ $x = \dfrac{(a + x^3)}{p}(a - p_0 + R) = a + y$ ва ин қиматро ба муодилаи додашуда гузошта меёбем: $y = b + u$. Ҳамин тавр: $x = a + y = a + b + 4$.

Ал-Кошӣ бо ин роҳ синуси як градусро то 17 аломати даҳӣ ҳисоб намудааст. Ин методро баъдтар дар асри XIX математики англис У.Ч.Ҳорнер дуюмбора кашф кард.

Риёзидон ва мунаҷҷими намоёни тоҷик Муҳаммад Ҳомид ал-Хидир ал Хуҷандӣ соли 1000 дар Хуҷанд таваллуд шуда, дар расадхонаи Рай (Эрон) кор кардааст. Ӯ теоремаи Фермаро барои $n = 3$ исбот кардааст. Исботи теоремаи синусҳо низ ба ӯ тааллуқ дорад. Дар астраномия секстантаро ихтироъ кард, ки он дар расадхонаи Улуғбек асбоби асосӣ ҳисоб мешуд.

Машқҳои иловагӣ ба боби III

277. Муодиларо ҳал кунед:

$а)\ 2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0;$ $б)\ 2\cos^2 3x + \sin 2x + 1 = 0;$

$в)\ \cos 4x + 6 = 7\cos 2x;$ $г)\ 7\sin x = 3\cos(2 - 3);$

$д)\ 7\sin x = 3\cos 2x;$ $е)\ 5(1 + \cos x) = 3\cos^4 x - \sin^4 x;$

$ж)\ tg^4 x + tg^2 x + ctg^4 x - ctg^2 x = 106.$ $з)\ ctgx - \sqrt{3}tgx + 1 = \sqrt{3}.$

278. Муодилаи якҷинсаро ҳал кунед:

а) $\dfrac{\cos x}{1+\cos 2x}=0;$ *б*) $\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos 2x}=0;$ *в*) $\cos x\cdot tg3x=0;$

г) $\sin 4x\cdot\cos x\cdot tg2x=0;$ *д*) $(1+\cos x)\cdot tg\dfrac{x}{2};$ *е*) $\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x=0;$

ж) $\sin 3x=\cos 2x.$ *з*) $\cos 5x=\sin 15x.$

279. Муодиларо ба зарбкунандаҳо ҷудо намуда ҳал кунед:

а) $\cos 2x=\cos^3 x-\sin^3 x;$ *б*) $\sin x-\cos x=1-\sin 2x;$

в) $8\cos^4 x-\cos 4x=1;$ *г*) $2\sin x-\cos x=1-\sin 2x;$

д) $\cos x-\cos 2x;$ *е*) $1+\sin x+\cos x+tgx=0;$

ж) $tgx-\sin x=2\sin^2\dfrac{x}{2}.$ *з*) $1-\cos(\pi-2x)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=0.$

280. Муодиларо бо ёрии формулаҳои ҷамъ ва ба сумма табдил додани ҳосили зарб ҳал кунед:

а) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x-\dfrac{1}{2}\cos 3x=\cos 7x;$ *б*) $\cos 3x\cdot\cos 2x-\sin x\cdot\sin 6x=\cos 7x;$

в) $\sin x+\cos x\cdot ctg\dfrac{x}{2}=-\sqrt{3};$ *г*) $\sin 5x-\sin x\cdot\cos 4x=0;$

д) $2\sin x\sin 3x+\left(3\sqrt{2}-1\right)\cos 2x=3;$ *е*) $\cos x+3\sin x=1+2\cos\dfrac{3}{2}x\cdot\cos\dfrac{x}{2};$

ж) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 5x.$ *з*) $\cos(\dfrac{3}{2}\pi+x)\sin(\pi-7x)=\sin 3x\sin 5x.$

281. Муодиларо бо тарзи паст намудани дараҷа ҳал кунед:

а) $4\sin 2x+tg^2 x=6;$ *б*) $\sin 2x\sin x+\cos^2 x=\sin 5x\cdot\sin 4x+\cos^2 4x;$

в) $\cos^2\dfrac{x}{5}+\cos^2\dfrac{2x}{5}=\cos^2\dfrac{3x}{6};$ *г*) $\sin^2\dfrac{3}{5}x+\sin^2\dfrac{9x}{5}=\dfrac{1}{2}+\sin^2\dfrac{6x}{5};$

д) $2\cos^2 x-\cos^2 3x=1;$ *е*) $\sin 3x+\sin 5x=2\left(\cos^2 2x-\sin^2 3x\right);$

ж) $\sin 14\left(\pi-\dfrac{x}{2}\right)+\sin 9(\pi-x)=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+2x\right).$

282. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\sin x+\cos x=2{,}5+5\sin x\cdot\cos x;$ *б*) $\sin x-\cos x+5\sin x\cdot\cos x=1;$

в) $\sin^3 x+\cos^3 x=1;$ *г*) $\sin^3 x-\cos^3 x=1;$

д) $2\sin 9x-\sin\dfrac{7}{2}x=\cos\dfrac{3}{2};$ *е*) $2-2\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-x\right)=N3\cdot tg\dfrac{5\pi-x}{2};$

ж) $1-\sin 2x+\sin x+\cos x=0;$ *з*) $1+\sin 2t=\cos t-\sin t.$

283. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$a)\ \begin{cases} \sin x - \cos y = \frac{1}{2}; \\ x - y = \frac{\pi}{6}; \end{cases} \qquad б)\ \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}; \\ \sin x + \sin y = \sqrt{2}; \end{cases};$$

$$в)\ \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}; \\ tgx \cdot tgy = \frac{1}{6}; \end{cases}; \qquad г)\ \begin{cases} x + y = \frac{5}{6}\pi; \\ \sin x \cdot \cos y = \frac{3}{4}; \end{cases}$$

$$д)\begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{12}; \\ \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \qquad е)\begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{12}; \\ \frac{ctgx}{ctgy} = \sqrt{3}; \end{cases};$$

$$ж)\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}36; \\ \sin x \cos y = 0{,}36; \end{cases}. \qquad з)\begin{cases} 3ctgx = tg^3 y; \\ \cos x = \sin 2y. \end{cases}$$

284. Нобаробариро ҳал кунед:

$a)\ \sin 5x > 16\sin^5 x;$ $\quad б)\ tg^3 x + tg^2 x < 1 + tgx;$

$в)\ 2\sin^2 3x + \sin^2 6x < 2;$ $\quad г)\ tg^2 x + ctg^2 x > 2;$

$д)\ tg\frac{\pi x}{4(x+1)} > 1;$ $\quad е)\ tgx > \frac{tg2x - 2}{tg2x + 2};$ $\quad ж)\ \cos x > \sin^2 x - \cos^2 x;$

$з)\ 2\sin^2 x > \sin^2 x + \frac{1}{4};$ $\quad и)\ \sin x < \cos x;$ $\quad к)\ \sin 3x < \sin x.$

Ҷавобҳо

198. а) ҳа; б) не; в) не; г) ҳа; **199.** а) 0;б) $-\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\frac{\pi}{4}$; д) $\frac{\pi}{6}$; е) $\frac{1}{2}$; ж) 1; з) $\frac{\pi}{3}$; и) $\frac{\pi}{4}$; к) $\frac{3\pi}{2}$; л) вуҷуд надорад; м) маъно надорад. **200.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{\pi}{7}$; в) $-\frac{\pi}{4}$; г) x. **201.** а) $1\frac{2}{3}$; б) $14\frac{2}{9}$. **202.** а) 6; б) 36. **203.** 363 нафар. **204.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\left(\sqrt{2}+1\right)$. **205.** а) $3\frac{\pi}{4}$; б) π; в) $\frac{\pi}{4}$; г) 0; д) вуҷуд надорад; м) маъно надорад; е) $\frac{\pi}{2}$; ж) $2\frac{\pi}{3}$; з) $5\frac{\pi}{6}$; и) $\frac{\pi}{3}$. **206.** а) $\frac{1}{5}$; б) $3\frac{\pi}{5}$; в) $-\frac{\pi}{5}$; г) $6\frac{\pi}{5}$. **207.** а) не; б) ҳа; в) не;

208. а) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; б) $\frac{4\pi}{5}$; в) $\frac{7\pi}{18}$; г) $40°$; д) 0; **210.** а) 0; б) 4,1744. **211.** а) 300; б) 500; **213.** 30 нафар. **214.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{\pi}{4}$; в) 0; г) $\frac{\pi}{6}$; д) вуҷуд надорад; е) вуҷуд надорад; ж) $-\frac{\pi}{6}$; з) $\frac{\pi}{3}$; и) $-\frac{\pi}{4}$. **215.** а) 2; б) $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{5\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{10}$; д) 3; е) $-\frac{44}{117}$. **216.** а) 0; б) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $-\sqrt{3}$; г) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **217.** а) $-\frac{3\pi}{2}$; б) $-\frac{3\pi}{2}$. **218.** а) $\cos\frac{5\pi}{2}$; б) $\sin\frac{\pi}{12}$. **219.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{2}$. **220.** а) $(-\infty;1]$ ва $[4;+\infty)$; б) $(-\infty;+\infty)$. **221.** а) 360 км; **222.** а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{4}$; е) $3\frac{\pi}{4}$. **223.** в) $\frac{6}{7}$; г) $\frac{\pi}{4}$; д) $\sqrt{3}$; е) $\frac{\pi}{4}$. **224.** а) $(-4;-3), (-4;2), (3;-3), (3;2)$;
б) $\left(3-3\sqrt{2};3+3\sqrt{2}\right), \left(3+3\sqrt{2};3-3\sqrt{2}\right), (2;4), (4;2)$.

227. а) $x=(-1)^n\frac{4}{9}\pi+\frac{4}{3}\pi n,\ n\in Z$; б) $x=\frac{12}{(-1)^{n+1}+6n},\ n\in Z$;
в) $x=\pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4n+1}},\ n\in N_0$; г) $x=\frac{36}{(4n-1)^2},\ n\in N$; д) $x=\frac{1}{k^2n},\ k\in N$;
е) $x=(-1)^k\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2},\ k\in Z.$ ж) $x=(-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2},\ n\in Z$;
з) $x=\varnothing$; и) $x=(-1)^n\arcsin\sqrt{0,01}+k\pi,\ k\in Z.$ **228.** а) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$;
б) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi,\ k\in Z$; в) $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$; г) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$;
д) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; е) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; ж) $x=(-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2},\ n\in Z$;
229. а) $(-1,5;0,5)$; б) $(1,2;-1,6)$; в) $(-0,7;4,2)$; **230.** $\frac{2}{3}$ ё $\frac{6}{19}$. **231.** (-1,6). **232.** а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$; б) $x=\pm\frac{\pi}{2}+3\pi n,\ \ n\in Z$; в) $x=\frac{12}{12n\pm1},\ \ n\in Z$; г)

$x=\pm 2\sqrt{\dfrac{3}{12n\pm 5}},\ \ n\in Z;$ д) $x=\dfrac{64}{(8k\pm 1)^2},\ k\in N;$ е) $x=\dfrac{4}{n\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)},\ k\in N_0;$ ж)

$x=\pm\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{3}\pi n+\dfrac{2}{3},\ \ n\in Z;$ з) $x=\pm\arccos\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z;$ и) $x=\dfrac{3}{4}(2n+1),$

$n\in Z;$ **233.** в) $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ \ n\in Z;$ **234.** а) $[-10;10];$ б) $[-4;0];$ в)

$\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};-\infty\right).$ **235.** а) $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in Z;$ б)

$(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3}+\pi n;$ в) $\dfrac{n}{2}\pi.$ **236.** а) 14,5 км/соат. **237.** а)

$x=\dfrac{2}{3}\pi+2\pi k,\ k\in Z;$ б) $x=\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{\pi}{3}k,\ k\in Z;$ в) $x=\dfrac{6}{6n+1},\ \ n\in Z;$

г) $x=\pm\sqrt{\dfrac{6}{6n-1}},\ n\in N;$ д) $x=\dfrac{16}{(4n+1)^2},\ n\in N_0;$ е) $x=\dfrac{16}{\pi(4n-1)},\ n\in N_0;$

ж) $x=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z;$ з) $x=\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z.$

238. $а)\,x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;$ $б)\,x=-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2},k\in Z;$ $в)\,x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{3}k,k\in Z;$

$г)\,x=-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{3},k\in Z;$ $д)\,x=-\dfrac{\pi}{2}2\pi k,k\in Z;$ $е)\,x=\pi k,k\in Z.$

239. а) $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup(3;-\infty).$ **240.** а) $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;$

б) $x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;$ в) **241.** а) 26 ва 24. **242.**а) $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;$

б) $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,$ ва $x=2\pi n,\ n\in Z;$ в) $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;$ г) $\dfrac{\pi}{4}+\pi n$

ва $-arctg3+\pi n,\ n\in Z;$ д) $\pm arctg2+\pi n,\ n\in Z;$ е) $x=\pm\left(\pi-\arccos\dfrac{1}{4}\right)+$

$+2\pi n,\ \ n\in Z;$ ж) $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$ **243.** а) $x=(2n+1)\dfrac{\pi}{4},\ n\in Z;$

б) $x=\pi n, x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$. **<u>244.</u>** а) $(-3;-1);\ (5{,}5;0{,}7)$; б) $(-6;-9),(3;4{,}5)$. **<u>245.</u>** а) 11; б) 0. **<u>246.</u>** а) 23; б) 100. **<u>247.</u>** а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; б) $\frac{1}{2}arctg2+\pi n$ ва $\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; в) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$; г) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; д) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; ж) $\frac{\pi}{4}+\pi n$ ва $-arctg\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z$. **<u>248.</u>** а) $(-\infty;0)\cup(0{,}6;-\infty)$. б) $\left[-\frac{2}{7};0\right]$. **<u>249.</u>** а) -6 ва 5; б) $x=\pm(-1)^n\arccos\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$; в) $x=\pm(-1)^n\arccos\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$; г) $2\pm\sqrt{35}$. **<u>250.</u>** $1093+364\sqrt{3}$. **<u>251.</u>** а) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2},\ n\in Z$; б) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; в) $x=2\pi n,\ n\in Z$; г) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; д) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; е) $x=\frac{\pi n}{2},\ x=\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$; ж) $x=\frac{\pi n}{7},\ x=(2n+1)\frac{\pi}{18},\ n\in Z$; з) $x=(8n+1)\frac{\pi}{16},\ x=(8n+3)\frac{\pi}{24},\ n\in Z$.

<u>252.</u> а) $x=(2n+1)\pi,\ x=(4n+1)\frac{\pi}{2}$; б) $x=6,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.

<u>253.</u> а) $[-3;0]$; б) $(-2;12)$. **<u>254.</u>** а) 16 км/с, 18 км/с.

<u>255.</u> а) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; б) $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;\ x_2=-arctg\frac{4}{3}+\pi n,\ n\in Z$;

в) $x_1=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;\ x_2=arctg\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in Z$;

г) $x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; д) $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;\ x_2=arctg3+\pi n,\ n\in Z$;

е) $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$; $x=(2n+1)\frac{\pi}{4},\ n\in Z;\ x=\frac{\pi n}{3},\ x=(4n+1)\frac{\pi}{12},\ n\in Z$;

з) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=\pm\frac{3\pi}{2}+(8n+1)\frac{\pi}{2},\ n\in Z; x=2\pi n, x=4\pi n,\ n\in Z$.

256. а) $\left(-\frac{7}{2};-\infty\right)$; б) $(2;\infty)$; в) $\left(\frac{3}{2};\infty\right)$. **257.** а) 0; б) 0. **258.** а) 8 соат; б) 12 соат. **259.** а) $x=2arctg\frac{4+\sqrt{5}}{11}+2\pi n,\ n\in Z;$

б) $x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{7}}{7}+\pi n+arctg\frac{2\sqrt{3}}{3},\ n\in Z;$ в) $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\pi n,\ n\in Z;$

г) $x=(-1)^n\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{6},\ n\in Z;$ д) $x=(2n+1)\pi,\ x=arctg\sqrt{5}+2\pi n,\ n\in Z;$ е) $x=\pi n,\ x=(4n+1)\frac{\pi}{4},\ n\in Z.$ **260.** а) $(6;+\infty)$; б) $(-\infty;-2]$; в) $(-5;-1)$; **261.** 1,2,4,8,16… **262.** а) $\frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$.

263. а) $q=\pm3;1,4,7,10,13\ldots1,-2,-5,-8-11,\ldots$ **264.** $3\sqrt{6}$. **265.** а) $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ y=\frac{\pi}{6}-\pi k,\ k\in Z.\end{cases}$

266. а) (0;6); б) $(-\infty;-8]\cup[0;\infty)$; в) $(-2;2)$;
г) $(-\infty;-\sqrt{6})\cup(\sqrt{6};\infty)$. **267.** а) $x=\pi k,\ k\in Z;$
б) $x=(2n+1)\frac{\pi}{4};\ x=(3k\pm1)\frac{\pi}{3}k,\ k\in Z.$ **268.** 8 – то мошин.

269. в) $\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$; ж) $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$; з) $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right)$. **270.** в) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in Z;$

з) $\frac{5}{6}\pi+2\pi n<x<\pi+2\pi n,\ n\in Z.$ нишондод. $\sin x<1-\cos 2x;$
$\sin x>2\sin 2x,\ 2\sin 2x, 2\sin^2 x-\sin x<0,\ \sin(2\sin x-1)<0.$

и) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{3}{2}\pi+2\pi k$ нишондод.

$\frac{\pi}{3}+2\pi k<\frac{\pi}{6}+x<\frac{5}{3}\pi+2\pi k,\ \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi k;$

к) ҳал надорад чунки косинус аз 1 калон шуда наметавонад.
271. а) ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ; б) ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ бе ғайр аз 0 ва 1; в) $x\le0$; **272.** а) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;$ б) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;$ в) πk ва

$(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$ **274.** а) $\left[\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right],\ n \in Z;$ нишондод.

$\frac{\pi}{4} + \pi n \le x \le x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + \pi n;\ \ \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n;$

б) $\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{8}, \frac{\pi k}{2},\ k \in Z;$ в) $\pi k \le x \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z;$

г) $\pi k - \frac{5\pi}{6} < x \le \pi k,\ k \in Z;$ д) $\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z;$

е) $\frac{\pi k}{3} - \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z.$

БОБИ IV
Ҳосила

§8. Мафҳуми лимит ва бефосилагии функсия
§9. Мафҳуми ҳосила
§10. Қоидаҳои асосии дифференсиронӣ
§11. Ҳосилаи функсияи дараҷагӣ ва мураккаб
§12. Ҳосилаи функсияҳои тригонометрӣ. Ҷадвали ҳосилаи функсияҳо
§13. Мафҳуми ҳосилаи тартиби олӣ

§8. Мафҳуми лимит ва бефосилагии функсия

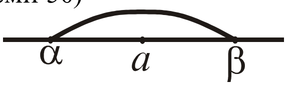
33. *Афзоиши аргумент ва функсия*

33.1. Мафҳуми атрофи нуқта. Ҳамаи он мафҳумҳое, ки дар ин параграф омӯхта мешаванд, ба мафҳуми атрофи нуқта вобастагӣ доранд. Барои ҳамин ҳам шарҳро аз он сар мекунем.

Агар a – адади ҳақиқӣ ва δ - адади дилхоҳи мусбати додашуда бошад, он гоҳ фосилаи $(a-\delta,\ a+\delta)$ - ро атрофи (ё δ - атрофи) нуқтаи a, a – ро маркази атроф ва δ - ро радиуси он меноманд, яъне ҳамаи нуқтаҳои x, ки барояшон нобаробарии $|x-a|<\delta$ дуруст аст.

Масалан, агар дар ҳолати хусусӣ сухан дар бораи $\delta=0{,}1$ атрофи нуқтаи a=2 равад, он гоҳ ҳар гуна нуқтаи атрофи x нобаробарии $|x-2|<0{,}1$ - ро қаноат мекунонад. Яъне $-0{,}1<x-2<0{,}1,\ \ 2-0{,}1<x<2+0{,}1,\ \ 1{,}9<x<2{,}1$

Баъзан атрофи нуқтаи додашудаи a гуфта маҷмӯи нуқтаҳои фосилаи ихтиёрии $(\alpha;\beta)$ - ро ҳам меноманд, ки миёнаҷояш нуқтаи a мебошад. (ниг. ба расми 50)



Расми 50

33.2. Мафҳуми афзоиши аргумент ва афзоиши функсия

Бо масъалаҳое машғул мешавем, ки дар **онҳо на ёфтани қимати ин ё он бузургӣ, балки ёфтани қимати** тағйирёбандаҳояшон ҷолиби диққат аст.

Мисолҳои зиёде тасдиқи ҷумлаи болоиянд. Чунончи,

- қувваи чандирии пружина ба дарозшавиаш мутаносиб аст (қонуни Гук);

- кор – тағйирёбандаи энергия аст;

- суръати миёна – нисбати тағйирёбии масофа дар фосилаи вақтест, ки дар муддаташ ҷойивазкунии нуқтаи материалӣ ба амал меояд.

- …

мебошад.

Фарз мекунем, ки функсияи $y = f(x)$ дар нуқтаҳои тири ададӣ ё дар ягон қисми он дода шудааст. Дар соҳаи муайянӣ нуқтаи x_0 - ро қайд мекунем. Қимати $f(x)$ - ро дар нуқтаи x_0 ёфта онро, бо қиматҳои дигари функсия дар нуқтаҳои x – и атрофи x_0 воқеъбуда муқоиса мекунем. Ин ҷумла иҷрои амалиёти зеринро дар назар дорад: фарқи $f(x) - f(x_0)$ - ро ба воситаи фарқи $(x - x_0)$ муқоиса кардан зарур аст.

Агар x нуқтаи дилхоҳи дар ягон атрофи нуқтаи ба қайд гирифташудаи x_0 воқеъ бошад, он гоҳ фарқи $(x - x_0)$ - ро **афзоиши тағйирёбандаи новобаста (ё аргумент)** дар нуқта номида, бо Δx ("делта икс") ишорат мекунем: $x - x_0 = \Delta x$. Аз ин баробарӣ $x = x_0 + \Delta x$ бармеояд. Инчунин мегӯянд, ки қимати ибтидоии аргумент x_0 ба афзоиши Δx молик шудааст. Дар ин ҳолат қимати функсия ба бузургии

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \qquad (1)$$

тағйир меёбад. Фарқи (1) – ро **афзоиши функсияи f – и дар нуқтаи x_0 – и ба Δx мувофиқоянда номида, бо рамзи** Δf ("делта эф") ишорат мекунанд:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \qquad (2)$$

Аз (1), (2) $f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$ пайдо мешавад.

Агар ба (2) дурустакак диққат диҳем, он гоҳ мебинем, ки дар қимати қайдшудаи x_0 афзоиши функсия Δf функсияи аргументи Δx аст.

Ниҳоят, қайд мекунем, ки Δf - ро инчунин афзоиши тағйирёбандаи вобаста ҳам меноманд ва барои функсияи $y = f(x)$ бо Δy ("делта игрек") ишорат мекунанд.

Мисоли 1. Барои функсияи $f(x) = x^3 - 1$ ҳангоми $x_0 = 3$ ва а) $x = 2{,}9$ б) $x = 3{,}1$ будан, афзоишҳои Δx ва Δf ёфта шаванд.

Ҳал. а) $\Delta x = x - x_0 = 2{,}9 - 3 = -0{,}1,\ \Delta x = -0{,}1;$

$\Delta f = f(2{,}9) - f(3) = 23{,}389 - 26 = -2{,}611,\ \ \Delta f = -2{,}611$

б) $\Delta x = x - x_0 = 3{,}1 - 3 = 0{,}1,\ \Delta x = 0{,}1;$

$\Delta f = f(3{,}1) - f(3) = 28{,}791 - 26 = 2{,}791,\ \ \Delta f = 2{,}791.$

Мисоли 2. Барои функсияи $y = x^2 - x$ қимати Δy - ро дар атрофи нуқтаи $x_0 = 2$ меёбем.

Ҳал. Азбаски афзоиши x ба $2 + \Delta x$ баробар аст, пас

$$\Delta y = f(x) - f(2) = f(2 + \Delta x) - f(2) = [(2 + \Delta x)^2 -$$

$$-(2 + \Delta x)] - (2^2 - 2) = 4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 2 - \Delta x - 2 = 3 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Мисоли 3. Куби теғааш ба $2a$ баробар дода шудааст. Агар дарозии теға афзоиши Δx - ро гирад, он гоҳ афзоиши ΔV - и ҳаҷмашро меёбем.

Ҳал. Азбаски $x = 2a + \Delta x$ ва $V(x) = x^3$ аст, пас

$$\Delta V = V(x) - V(2a) = x^3 - (2a)^3 = (2a + \Delta x)^3 - (2a)^3 =$$

$$= (2a + \Delta x - 2a)[(2a + \Delta x)^2 + (2a + \Delta x) \cdot 2a + (2a)^2] =$$

$$= \Delta x[4a^2 + 4a \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 4a^2 + 2a\Delta x + 4a^2] =$$

$$= 12a^2\Delta x + 6a \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Ҷавоб. Ҳаҷми куб ба $12a^2\Delta x + 6a \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ меафзояд.

Мисоли 4. Афзоиши функсияи $y = \sqrt{x}$ - ро дар нуқтаи x_0 ба воситаи x_0 ва Δx ифода мекунем.

Ҳал. Мувофиқи шарт $x = x_0 + \Delta x$ ва $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$ аст, бинобар он

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} = \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} =$$

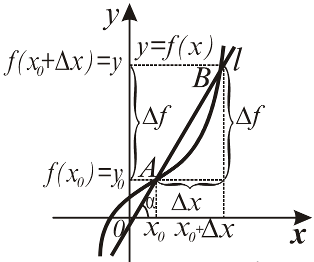
$$= \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x_0}\right)^2}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x +} + \sqrt{x_0}}$$

Мисолҳои 2-4 шаҳодат медиҳанд, ки афзоиши функсия Δf функсияи афзоиши аргумент Δx аст.

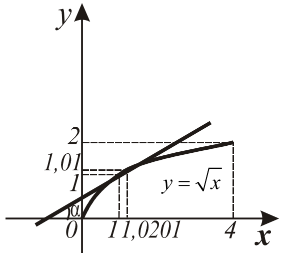
33.3. Маънои геометрӣ ва механикии нисбати Δy бар Δx

Дар системаи координатӣ графики функсияи $y = f(x)$ - ро кашида (ниг. ба расми 51) маънои геометрии Δx ва Δy - ро шарҳ медиҳем.

Дар навбати аввал қайд мекунем, ки хати рости l – и аз болои ду нуқтаи дилхоҳи графики номбурда гузарондаро бурандаи он меноманд. Маълум, ки нисбати $\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$ ё $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ - коэффитсиенти кунҷии k – и бурандаи аз болои нуқтаҳои $A(x_0, y_0)$ ва $B(x, y)$ гузарандаро ифода мекунад.



Расми 51



Расми 52

Агар сурат ва махраҷи касрро мувофиқан бо афзоишҳои Δy ва Δx иваз намоем (ин амалиёт осонии назаррасро фароҳам меоварад), он гоҳ $k = tg\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ мешавад. Коэффитсиенти кунҷии хати рости l ба воситаи афзоишҳои функсия ва аргумент ҳамин тавр ифода мешавад.

Мисоли 5. Агар $x_0 = 1$ ва $\Delta x = 0{,}0201$ бошад, он гоҳ коэффитсиенти кунҷии бурандаи графики функсияи $y = \sqrt{x}$ - ро, ки аз нуқтаҳои $(x_0; y_0)$ ва $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ мегузарад, меёбем.

Ҳал. Азбаски $x_0 = 1,$ $y_0 = f(x_0) = \sqrt{1} = 1,$ $x_0 + \Delta x = 1 + 0{,}0201 = 1{,}0201$ ва $f(x_0 + \Delta x) = f(1{,}0201) = \sqrt{1{,}0201} = 1{,}01$ аст, пас

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 1{,}01 - 1 = 0{,}01$$

ва аз ин ҷо k ба $k = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,1}{0,0201} \approx 4,9751...$ баробар мешавад. (Расми 52)

Ниҳоят қайд мекунем, ки бо ёрии афзоишҳо суръати миёнаи ҳаракати нуқтаро дар фосилаи вақти $[t_0; t_0 + \Delta t]$ ифода кардан мумкин аст. Агар нуқта аз рӯи хати рост ҳаракат намояду координатааш $x(t)$ муайян бошад, он гоҳ

$$v_{миёна}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$

Ин формула барои $\Delta t < 0$ (яъне барои порчаи $\left[t_0 + \Delta t, t_0\right]$) низ дуруст аст. Дар ин ҳолат, ҳақиқатан, ҷойивазкунии нуқта ба $x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$, давомнокии фосилаи вақт ба Δt ва суръати миёна ба

$$v_{миёна}(\Delta t) = \frac{x(t_0) - x(t_0 + \Delta t)}{-\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$ баробар мешавад.

Айнан ҳамин тавр, ифодаи $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ **суръати миёнаи тағйирёбии функсия** дар порчаи $[x_0; x_0 + \Delta x]$ номида мешавад.

?

1. Атрофи нуқта гуфта чиро мефаҳмем? Мисолҳо оред.
2. Кадом масъалаҳо ба мафҳуми афзоиши аргумент ва функсия меоранд? Ба Δx ва Δy таъриф диҳед.
3. Бо мисолҳои мушаххас нишон диҳед, ки Δf функсияи аргументи Δx аст.
4. Ба дурустии формулаи $f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$ боварӣ ҳосил намоед.
5. Формулаи $k = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ чӣ маъно дорад?
6. Суръати миёнаи тағйирёбии функсия дар порча гуфта чиро дар назар доранд?

285. δ - атрофи нуқтаи $x = a$ - ро ҳангоми
а) $\delta = 0,02 \;\; a = 3;$ б) $\delta = 0,5 \;\; a = 2;$
в) $\delta = 0,01 \;\; a = 4;$ г) $\delta = 0,3 \quad a = -1;$ будан, ёбед.

286. Барои функсияи $y = 2x - 3$ x ва Δy - ро ҳангоми а) $x_0 = 1$ ва $\Delta x = 0{,}1$; г) $x_0 = 4$ ва $\Delta x = 0{,}03$;

б) $x_0 = 2$ ва $\Delta x = 0{,}01$; д) $x_0 = 4$ ва $\Delta x = 0{,}12$;

в) $x_0 = 3$ ва $\Delta x = 0{,}02$; е) $x_0 = 5$ ва $\Delta x = 0{,}02$ будан ёбед.

287. Афзоиши Δy ва Δx - ро барои функсияи $y = x^2$ ёбед, агар

а) $x = 2{,}1$ ва $x_0 = 2$; г) $x = -2{,}6$ ва $x_0 = -2{,}5$;

б) $x = 2{,}6$ ва $x_0 = 3$; д) $x = 4{,}1$ ва $x_0 = 4$;

в) $x = 3$ ва $x_0 = 2{,}8$; е) $x = 9{,}3$ ва $x_0 = 9$ бошад.

288. Барои функсияи $y = \dfrac{1}{x}$ қимати Δy - ро ёбед, агар

а) $x_0 = 6, \quad \Delta x = 0{,}01$; д) $x_0 = 5, \quad \Delta x = 0{,}25$;

б) $x_0 = 7{,}02, \quad \Delta x = 0{,}02$; е) $x_0 = 3{,}025, \quad \Delta x = 0{,}025$;

в) $x_0 = 2, \quad \Delta x = 0{,}04$; ж) $x_0 = 6, \quad \Delta x = -0{,}01$;

г) $x_0 = 4{,}2, \quad \Delta x = 0{,}2$; з) $x_0 = -3, \quad \Delta x = -0{,}04$.

289. Барои функсияи

а) $y = 2x - 7$; б) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$; в) $y = 1 - x^2$; г) $y = 2x - x^2$;

д) $y = x^2 - 4x - 3$ е) $y = 2x^3 - x$; ж) $y = x^3 - 1$; з) $y = x^2 + 1$

Δy - ро дар нуқтаи x_0 ба воситаи x_0 ва Δx ифода кунед.

290. Агар

а) $f(x) = x$; б) $f(x) = x^2$; в) $f(x) = ax + b$;

г) $f(x) = ax^2 + bx + c$; д) $f(x) = x^3$

бошад, $f(x_0 + \Delta x)$, Δy ва $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ - ро ёбед.

291. Коэффитсиенти кунҷии бурандаи графики функсияи $y = x^2$ - ро, ки аз болои нуқтаҳои (x_0, y_0) ва $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ мегузаранд, ҳангоми

а) $x_0 = 2, \quad \Delta x = 0{,}1$; г) $x_0 = 2, \quad \Delta x = -0{,}1$;

б) $x_0 = 2, \quad \Delta x = 0{,}01$; д) $x_0 = 2, \quad \Delta x = -0{,}01$;

в) $x_0 = 2, \quad \Delta x = 0{,}001$; е) $x_0 = 2, \quad \Delta x = -0{,}001$ будан, ёбед.

292. Коэффитсиенти кунҷии k – ро барои функсияи $y = x^3$ ҳангоми

а) $x_0 = 1, \quad \Delta x = 0{,}1;$ г) $x_0 = 1, \quad \Delta x = -0{,}1;$

б) $x_0 = 1, \quad \Delta x = 0{,}01;$ д) $x_0 = 1, \quad \Delta x = -0{,}01;$

в) $x_0 = 1, \quad \Delta x = 0{,}001;$ е) $x_0 = 1, \quad \Delta x = -0{,}001$ будан, ёбед.

293. Тарафҳои росткунҷа 16 м ва 22 м мебошад. Агар тарафи хурди онро ба 0,1 м ва тарафи калонашро ба 0,2 м зиёд кунем он гоҳ афзоиши периметр ва масоҳати он ба чӣ баробар мешаванд?

294. Теғаи куб x_0 ба Δx меафзояд. Афзоиши масоҳати сатҳи пурраи кубро ҳангоми

а) $x_0 = 2, \quad \Delta x = 0{,}2;$ б) $x_0 = 3, \quad \Delta x = 0{,}01$ будан, ёбед.

295. Куби теғааш ба x баробар ба Δx меафзояд. Ҳангоми

а) $x = 1, \quad \Delta x = 0{,}1;$ б) $x = 2, \quad \Delta x = 0{,}2$

шудан ҳаҷми он ба чӣ баробар мешавад?

296. Агар

а) $f(x) = x^3 - 2x + 11;$ б) $f(x) = \dfrac{7}{x^2} + 1;$ в) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1};$

г) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 1};$ д) $f(x) = x + \dfrac{1}{x};$ е) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

бошад, он гоҳ Δf ва $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ ба воситаи x_0 ва Δx ифода карда шавад.

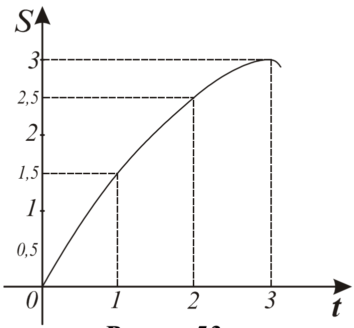
297. Суръати миёнаи нуқтаи аз рӯи қонуни маълум ростхатта ҳаракаткунандаро дар фосилаи вақти $[t_0; t_0 + \Delta t]$ ҳангоми

а) $x(t) = 3t - 5;$ в) $x(t) = v_0 t + \dfrac{gt^2}{2};$

б) $x(t) = -3t - 5;$ г) $x(t) = \dfrac{gt^2}{2}$ будан,

ёфта шавад.

298. Қонуни ҷойивазкунии (ҳаракати) нуқтаи материалӣ, ки вобастагии S – ро аз рӯи t ифода мекунад, дар график нишон дода шудааст (Расми 53). Суръати миёнаи ҳаракатро дар порчаҳои [0;1], [1;2] ва [2;3] ёбед.



Расми 53

Машқҳо барои такрор

299. Муодиларо ҳал намоед:

а) $\frac{3x-6}{12}+1=\frac{x+6}{4}-\frac{x+3}{6}$; в) $(x-2)(x+3)=6(x-3)$;

б) $3x^2+4x-7=0$; г) $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}=0.$

300. Системаи муодилаҳоро ҳал намоед:

а) $\begin{cases}5x-7y=3;\\6x+5y=17;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+2y^2=96;\\x=2y.\end{cases}$

301. Исбот кунед:

а) $2a^2+b^2+c^2\geq 2ab(b+c)$;

б) $a^4+6a^2b^2+b^2>4ab(a^2+b^2),\ a\neq b.$

302. Муодилаи тригонометриро ҳал намоед:

а) $\sin 4x=\cos^4 x-\sin^4 x$; б) $\cos x-\cos 5x=0.$

303. Айниятро исбот намоед:

а) $1-tg^2x=\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}$; б) $\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=ctg^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$

304. Ҷуфт ва ё тоқ будани функсияро муайян намоед:

а) $f(x)=-2x^4+9x^2+11$; б) $f(x)=-3x^3+5x$;

в) $f(x)=5x^6-2x^3.$

305. Бари росткунҷа аз дарозиаш дида 3 см кӯтоҳтар аст. Ченакҳои онро ёбед, агар масоҳаташ 70 см² – ро ташкил диҳад.

306. Ду мошини боркаш якҷоя кор карда бояд борро дар 6 соат мекашонданд. Вале, мошини дуюм ба саршавии кор каме дер монда вақте омад, ки аллакай мошини якум $\frac{3}{5}$ ҳиссаи тамоми борро кашондааст. Бори боқимондаро мошини дуюм кашонд ва аз ин рӯ, барои кашондани тамоми бор мошинҳо назар ба вақти пешбинишуда ду маротиба зиёдтар вақт сарф карданд. Ҳар як мошин дар алоҳидагӣ тамоми борро дар чанд соатӣ мекашонад?

34. Мафҳуми лимит ва бефосилагии функсия

Дар аксари мавридҳо қимати функсияро на дар нуқтаи a, балки дар нуқтаи ба он наздики x (бо дигар ибора дар нуқтаҳои атрофаш) муоина менамоянд.

34.1. а) Мегӯянд, ки тағйирёбандаи x ба адади a майл мекунад, агар x ба δ- атрофи a тааллуқ дошта, яъне $|x-a|<\delta$ буда, ҳангоми беҳад ба a наздик шуданаш бузургии $|x-a|$ беҳад ба нул наздик бошад.

Майлкунии тағйирёбандаи x – ро ба адади a дар шакли $x \to a$ навишта чунин мехонанд: "икс ба a майл мекунад".

б) Таърифи 1. Агар ҳангоми x ба a майл кардан (бо саҳеҳии пешаки додашуда) $f(x)$ ба L майл кунад, адади L – ро лимити функсияи $f(x)$ дар нуқтаи a меноманд.

Қайд менамоем, ки ба ҷои ибораи майлкунӣ тирчаро истифода карда таърифи болоиро кутоҳакак "ҳангоми $x \to a$ бо саҳеҳии пешаки додашуда $f(x) \to L$ ва ё $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ * ҳам менависанд.

Мисоли 1. Бигзор $f(x) = \dfrac{x^3-27}{x-3}$ бошад. Адади L – ро барои $f(x)$ ҳангоми $x \to 3$ меёбем.

Ҳал. Барои $x \neq 3$ $f(x) = \dfrac{x^3-27}{x-3} = \dfrac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3} = x^2+3x+9$ аст.

Пас, $L = \lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x^2+3x+9) = 3^2+3\cdot 3+9 = 9+9+9 = 27$ мешавад.

Ҷавоб: $L = 27$

Мисоли 2. Ҳангоми x ба 1 майл кардан функсияҳои $f(x)$ ба 5 ва $\varphi(x)$ ба -3 майл мекунанд. инро ба назар гирифта ба кадом адад майл кардани функсияи $\dfrac{2f(x)+5\varphi(x)}{0{,}5\varphi^2(x)}$ - ро меёбем.

Ҳал. Маълум, ки ҳангоми $x \to a$

$2f(x)$ ба $2\cdot 5 = 10$, $5\varphi(x)$ ба $5\cdot(-3) = -15$, $0{,}5\varphi^2(x) = 0{,}5\cdot(-3)^2 = 4{,}5$ майл мекунанд. Аз ин ҷо

$$\frac{2f(x)+5\varphi(x)}{0{,}5\varphi^2(x)} \text{ ба } \frac{10-15}{4{,}5} = \frac{-5}{4{,}5} = -\frac{50}{45} = -\frac{10}{9} \text{ яъне ба } -\frac{10}{9}$$

майл мекунанд.

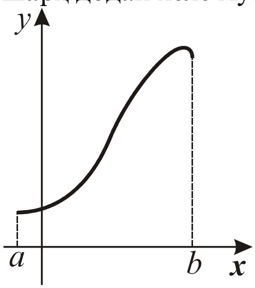
---

* Ишорати «lim» навишти мухтасари калимаи лотинии «limes» («ҳад») ва ё калимаи франсавии “limute” («ҳудуд») мебошад.

34.2. в) Таърифи 2. Агар ҳангоми *x* ба *a* майл кардан $f(x)$ ба $f(a)$ майл кунад, он гоҳ функсияи $y = f(x)$ дар нуқтаи *a* бефосила номида мешавад. Яъне ҳангоми $x \to a$ $f(x) \to f(a)$, ё $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Дар ин маврид *a* – ро нуқтаи бефосилагии функсия меноманд. Дар акси ҳол (яъне агар дар нуқтаи *a* бефосилагии функсия вайрон гардад), *a* – **нуқтаи каниш** ном дошта, $f(x)$ дар нуқтаи *a* **фосиланок** (ё канишдор) мешавад.

Агар ба таърифҳои 1 ва 2 дурустакак назар кунем, он гоҳ дар байни мафҳумҳои лимит ва бефосилагӣ алоқаи хеле зич мавҷуд аст. Бефосилагӣ мавридеро дар бар мегирад, ки агар тағйирёбандаи *x* адади *a* – ро ба сифати қимати худ қабул кунад, яъне $f(a)$ - яке аз қиматҳои $f(x)$ мебошад.

Бефосилагии $f(x)$ - ро дар алоқамандӣ бо тасвири графикаш шарҳ додан хеле муфид аст.



Расми 54

Агар графики функсия дар нуқтаҳои абсиссаашон ягон порчаро (ё тамоми тири ададиро) ташкилдиҳанда хати яклухти равонро, яъне хати дар натиҷаи аз қоғаз набардоштани қалам кашидашударо ифода кунад, он гоҳ дар ҳамон порча (ё тири ададӣ) онро функсияи бефосила меноманд (Расми 54).

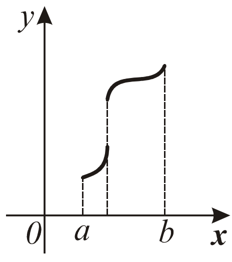
Ҳамаи функсияҳои асосии элементарӣ (хаттӣ, квадратӣ, тригонометрӣ,…) дар фосилаҳои соҳаи муайяниашонро ифодакунанда, бефосилаанд.

Акнун мисолеро меорем, ки дар шакли умумӣ функсияи фосиланокро ифода мекунад. Масалан, графики функсияи дар расми 55 акс ёфта дар $[a;c)$ ва $(c;b]$ бефосила буда, вале дар $[a;b]$ фосиланок аст.

г) Маълумотҳои *п.* 33.2 – ро ба назар гирифта таърифи нави бефосилагиро баён намудан мумкин аст:

$$f(a+\Delta x) \to f(a), \text{ агар } \Delta x \to 0.$$

Дар ҳақиқат, агар $a+\Delta x$ - ро бо *x* ишорат кунем: (яъне $x = a+\Delta x$), он гоҳ аз он ҳангоми $x \to a$ $f(x) \to f(a)$ (ниг. ба таърифи 2) мебарояд. Айнан ҳамин тавр, агар дар таърифи



Расми 55

2 ба ҷои x $a+\Delta x$ гирем, он гоҳ тасдиқоти пункти г) ҳосил мегардад, ки он аз баробарқуввагии b) ва г) шаҳодат медиҳад.

Қайд менамоем, ки аз «$f(a+\Delta x)\to f(a)$ ҳангоми $\Delta x\to 0$» «$f(a+\Delta x)-f(a)\to 0$» ва аз ин ҷо «$\Delta f\to 0$ ҳангоми $\Delta x\to 0$» мебарояд. Бо дигар ибора, **функсияи $f(x)$ - ро дар ягон нуқтаи *a* – и соҳаи муайянӣ бефосила меноманд, агар ҳангоми афзоиши аргумент ба нул майл кардан афзоиши функсия ҳам ба нул майл кунад.** (яъне $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$)

Таърифи 3. Функсияи дар ҳар як нуқтаи ягон порча бефосиларо дар ҳамин порча бефосила меноманд.

Таърифи болоӣ барои фосила, нимфосила ва нимпорча ҳам ҷой дорад.

Дар мулоҳизаронииҳои оянда баъзе ифодаҳои аёну фаҳморо қабул мекунем. Масалан, агар $h\to 0,$ он гоҳ $5h\to 0,\ h^2\to 0{,}9\pm 2h\to 9.$

Мисоли 3. Функсияи $f(x)=\dfrac{x^4-2x}{2x^3+5x^2-3x+7}$ дода шуда аст. Нишон медиҳем, ки ҳангоми $x\to 3 f(x)\to f(3)$ ҷой дорад.

Ҳал. Маълум, ки ҳангоми $f(3)$ ифодаи ададии $\dfrac{3^4-2\cdot 3}{2\cdot 3^3+5\cdot 3^2-3\cdot 3+7}$ ба $\dfrac{75}{27}$ баробар мебошад.

Инро ба ҳисоб гирифта пай дар пай ба дурустии $x^4=x\cdot x\cdot x\cdot x=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^4,\quad 2x\to 2\cdot 3;\quad 2x^3=2\cdot x\cdot x\cdot x\to 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3=2\cdot 3^3,$ $5x^2=5\cdot x\cdot x\to 5\cdot 3\cdot 3=5\cdot 3^2;\quad 3x=3\cdot 3,\quad 7\to 7;\quad x^4-2x\to 3^4-2\cdot 3;$ $2x^3+5x^2-3x+7\to 2\cdot 3^3+5\cdot 3^2-3\cdot 3+7;$ боварӣ ҳосил менамоем. Аз ин ҷо ҳангоми $x\to 3$

$$f(x)=\frac{x^4-2x}{2x^3+5x^2-3x+7}\to\frac{3^4-2\cdot 3}{2\cdot 3^3+5\cdot 3^2-3\cdot 3+7}=f(3)$$

мебарояд. Навишти охирин бефосилагии $f(x)$ - ро дар нуқтаи $x=3$ ифода мекунад.

Мисоли 4. Дар асоси таърифҳои бефосилагӣ нишон медиҳем, ки функсияи

а) $f(x)=3x+4;$ б) $f(x)=2\sqrt{x};$ в) $f(x)=\cos x$ дар нуқтаҳои дилхоҳи соҳаи муайяниаш бефосила мешавад.

Ҳал: а) Маълум, ки соҳаи муайянии функсияи $f(x)=3x+4$ тамоми ададҳои ҳақиқӣ аст. Дар он адади дилхоҳи a – ро мегирем, он гоҳ

$$\Delta f = f(x)-f(a)=f(a+\Delta x)-f(a)=3(a+\Delta x)+4-(3a+4)=$$
$$=3a+3\Delta x+4-3a-4=3\cdot\Delta x,\ \Delta f=3\cdot\Delta x$$

мешавад. Азбаски $\Delta x\to 0$, пас $3\cdot\Delta x\to 0$. Аз ин ҷо ҳангоми $\Delta x\to 0$ $\Delta f=3\cdot\Delta x\to 0$ - ро ҳосил мекунем. Мувофиқи шарт a – адади дилхоҳи маҷмӯи R буд, пас $f(x)=3x+4$ дар тамоми $(-\infty;+\infty)$ бефосила мешавад.

Қайд мекунем, ки айнан ҳамин тавр бефосилагии функсияи хаттии $f(x)=kx+b$ дар тамоми R исбот карда мешавад.

б) $f(x)=2\sqrt{x}$, $\Delta(f)=[0;+\infty)$. Барои ба мақсад ноил гаштан фарқи $f(x)-f(a)$ - ро тартиб медиҳем, ки дар он a – нуқтаи дилхоҳи $[0;+\infty)$ мебошад:

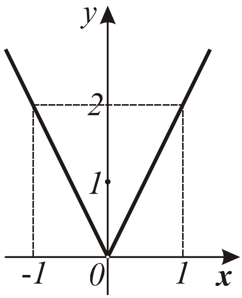
$$\Delta f=2\sqrt{x}-2\sqrt{a}=2(\sqrt{x}-\sqrt{a})=2(\sqrt{a+\Delta x}-\sqrt{a})=$$
$$=2\cdot\frac{(\sqrt{a+\Delta x}-\sqrt{a})(\sqrt{a+\Delta x}+\sqrt{a})}{\sqrt{a+\Delta x}+\sqrt{a}}=\frac{2(a+\Delta x-a)}{\sqrt{a+\Delta x}+\sqrt{a}}=\frac{2\Delta x}{\sqrt{a+\Delta x}+\sqrt{a}}.$$

Маълум, ки ҳангоми $\Delta x\to 0, 2\cdot\Delta x\to 0$ ва аз ин ҷо $\Delta f=\dfrac{2\Delta x}{\sqrt{a+\Delta x}+\sqrt{a}}\to\dfrac{0}{2\sqrt{a}}=0,$ $\Delta f\to 0.$ Ҳамин тариқ, бефосилагии $f(x)=2\sqrt{x}$ дар нуқтаи a исбот гардид ва азбаски a нуқтаи дилхоҳи $[0;+\infty)$ аст, пас $f(x)=2\sqrt{x}$ дар тамоми $[0;+\infty)$ бефосила мешавад.

в) Адади a – ро нуқтаи дилхоҳи $(-\infty;+\infty)$ шуморида бефосилагии $f(x)=\cos x$ - ро дар фосилаи болоӣ нишон медиҳем:

$$\Delta f=f(a+\Delta x)-f(a)=\cos(a+\Delta x)-\cos a=$$
$$=-2\sin\frac{a+\Delta x-a}{2}\cdot\sin\frac{a+\Delta x+a}{2}=-2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(a+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Маълум, ки ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta x}{2} \to 0$, $\sin\frac{\Delta x}{2} \to \sin\frac{0}{2} = 0$,



Расми 56

$\sin\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \sin a$ ва аз ин ҷо

$$\Delta f = -2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \sin\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right) \to -2 \cdot 0 \cdot \sin a = 0$$

мешавад.

Иҷрошавии шарти $\Delta f \to 0$ аз бефосилагии функсияи $f(x) = \cos x$ дар нуқтаи дилхоҳи $a \in (-\infty; +\infty)$ шаҳодат медиҳад.

Мисоли 5. Оё функсияи $f(x) = \begin{cases} 2|x|, x \neq 0 \\ 1, \ x = 0 \end{cases}$ дар нуқтаи $x = 0$ бефосила мешавад ё не? Барои ба саволи гузошташуда ҷавоб гардонидан ба шарти мисол назар мекунем. Мувофиқи он дар қиматҳои $x \neq 0$ $f(x) = 2|x|$ мешавад, ки ин функсия дар тамоми $(-\infty; 0)$ ва $(0; +\infty)$ бефосила аст (ниг. ба расми 56);

$f(x) \to 2|a| = f(a)$, агар $x \to a$, $a \neq 0$.

Ҳангоми $a = 0$ будан $f(x) \to 2|a| \to 0$ вале аз рӯи шарт $f(0) = 1$ аст, яъне $f(x) \to 0 \neq 1 \neq f(a)$ мешавад. Аз ин рӯ функсия фосиланок буда, дар нуқтаи 0 каниш дорад.

Мисоли 6. Фосилаҳои бефосилагии функсияи

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 - \text{ро} \end{cases}$$ ошкор месозем.

Ҳал. Агар $x \neq 2$ бошад, он гоҳ $f(x) = x + 2$ шуда дар тамоми $(-\infty; 2)$ ва $(2; +\infty)$ бефосила мешавад:

$f(x) = x + 2 \to a + 2 = f(a)$ барои $a \neq 2$.

Ҳангоми $a = 2$ будан $a + 2 = 4$ мешавад, вале $f(2) = 5$ аст. Пас $f(x) \to 4 \neq f(2)$ шуда аз вайроншавии бефосилагии $f(x)$ дар нуқтаи $x = 2$ шаҳодат медиҳад.

Ҳамин тариқ, функсияи мазкур дар тамоми тири ададӣ ба ғайр аз $x = 2$ бефосила буда аст.

?

1. Ҷумлаи "ҳангоми $x \to a \quad f(x) \to L$ " чӣ маъно дорад?

2. Мафҳуми бефосилагиро аёнӣ шарҳ диҳед. Кадом таърифҳои бефосилагиро медонед?

3. Кадом нуқтаҳоро нуқтаи каниши функсия меноманд? Мисолҳо оред.

4. Кадом функсияҳоро фосиланок меноманд? Бо мисолҳо шарҳ диҳед.

307. L – ро ёбед, агар

а) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 9x + 9}, \ x \to 1;$ б) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}, \ x \to 4;$

в) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}, \ x \to 1;$ г) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^3 + 1}, \ x \to -1;$

д) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1}, \ x \to 1;$ е) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 5x + 4}, \ x \to -1;$

ж) $f(x) = \dfrac{3\cos x}{6 + x^2}, \ x \to 0;$ з) $f(x) = \dfrac{2 + tgx}{x^2 + 1}, \ x \to 0;$

и) $f(x) = \dfrac{1 + \cos x}{x}, \ x \to \dfrac{\pi}{2};$ бошад.

308. Маълум, ки ҳангоми $x \to -2$ функсияҳои $f(x)$ ва $\varphi(x)$ мувофиқан ба 4 ва 9 майл мекунанд. инро ба назар гирифта лимити функсияҳои зеринро ёбед:

а) $\varphi^2(x);$ б) $\dfrac{f(x) + \varphi(x)}{\varphi^2(x)};$ в) $\dfrac{4f(x) - 3\varphi(x)}{f(x) - \varphi(x)}.$

309. Фосилаҳои бефосилагии функсияро ёбед:

а) $9x^4 - 7x^2 + x - 11;$ б) $2x^2 - 5;$ в) $\dfrac{x^2 - 9x + 8}{x + 1};$ г) $\dfrac{x^3}{x^2 - 1};$

д) $\dfrac{x^2 - 3}{x^3 - 4x};$ е) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1};$ ж) $\dfrac{3}{2x - 1};$ е) $\dfrac{4x + 3}{2}.$

310. Оё функсияи $f(x)$ дар нуқтаҳои фосилаи додашуда бефосила мешавад:

а) $f(x)=x^9-5x^4+6,\ (-\infty;+\infty)$; б) $f(x)=2\sqrt{x}-7x+5,\ (-4;+\infty)$;

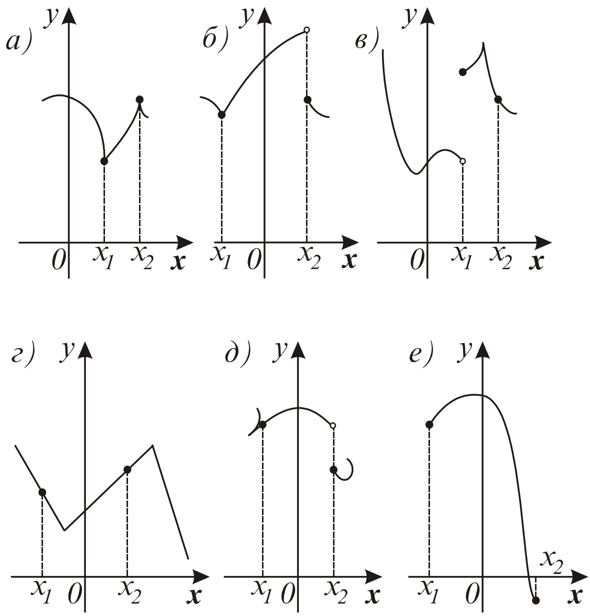
в) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-3)(x-4)},\ (-\infty;5)$.

311. Оё функсияҳои графикаш дар расми 57 тасвирёфта дар нуқтаҳои x_1 ва x_2 бефосила мешаванд?

312. Исбот намоед, ки агар $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x^2+3x-2}$ бошад, он гоҳ ҳангоми $x\to 1$ $f(x)\to f(1)=-\dfrac{1}{2}$ мешавад.

313. Графики функсияҳои зеринро сохта абсиссаҳои нуқтаҳоеро нишон диҳед, ки дар онҳо бефосилагӣ вайрон мешавад:

а) $f(x)=\begin{cases}3|x|,\ x\neq 0,\\ 1, x=0;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}2,\ x<1,\\ 1-x^2,\ x\geq 1.\end{cases}$



Расми 57

Машқҳо барои такрор

314. Дар кадом қиматҳои ҳақиқии *a* муодилаи $\dfrac{x^2+2(a-1)x+a^2-a}{x-2}=0$ ду решаи гуногуни ҳақиқӣ дорад.

315. Қаиқ бо равиши ҷараёни дарё 48 км ва ҳамин қадар масофа ба муқобили ҷараён ҳаракат карда барои тамоми роҳ 5 соат вақт сарф намуд. Суръати хоси қаиқро ёбед, агар суръати ҷараёни дарё 4 км/соат бошад.

316. Баъд аз пай дар пай ду маротиба ба ҳамон як фоиз паст кардани нарх, арзиши мол аз 300 сомонӣ ба 192 сомонӣ фаромад. Ба кадом фоиз нархи мол ҳар ду маротиба паст карда шуд?

317. Ҳисоб кунед:

а) $5\sin\dfrac{\pi}{6}+3tg\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{\pi}{4}-10ctg\dfrac{\pi}{4}$; б) $\left(2tg\dfrac{\pi}{6}-tg\dfrac{\pi}{3}\right):\cos\dfrac{\pi}{6}$.

318. Дар кадом қимати *x* функсияи *f(x)=4x-3* ба 17 баробар мешавад?

319. Маълум, ки $tg\alpha=8$ аст. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\dfrac{ctg\alpha+tg\alpha}{ctg\alpha-tg\alpha}$; б) $\dfrac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$.

320. Содда кунед:

а) $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}$ б) $\dfrac{\sin^2(\pi-\alpha)+\sin 2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)}\cdot tg(\pi-\alpha)$;

321. Муодилаҳои зеринро ҳал кунед:

а) $3x^2+4x=7$; б) $3x=x^2+2$.

322. Абсиссаи қуллаи параболаро ёбед, агар

а) $y=3x^2-9x+5$; б) $y=2x-x^2$ бошад.

323. Афзоишҳои Δx ва Δy - ро барои функсияи $y=x^2+3$ ҳангоми

а) $x_1=1{,}1$ ва $x_0=1$; б) $x=2{,}4$, $x_0=2$ будан ёбед.

§9. Мафҳуми ҳосила

35. Суръати лаҳзагии ҳаракат. Шарҳи ин мафҳумро, ки аз физика ба мо маълум аст, аз ҳалли масъалаи зерин оғоз менамоем.

Дар стансияи Душанбе масофа аз лавҳаи тормоздиҳиро ифодакунанда то истгоҳи вагони якум ба 160 м баробар аст. Агар ҳаракати минбаъдаи қатора мунтазам сустшаванда бо шитоби a=3,2 м/с^2 бошад, он гоҳ он ба лавҳаи тормоздиҳӣ бо кадом суръат наздик мешавад?

Маълум, ки масъала ёфтани суръати ҳаракати қатораро ҳангоми гузариш аз лавҳаи тормоздиҳӣ талаб менамояд (аниқтараш суръати лаҳзагиро…). Роҳи тормоздиҳӣ аз рӯи формулаи $2S = at^2$, ки a – шитоб, t – вақти тормоздиҳӣ аст, ҳисоб карда мешавад. Азбаски $S = 160$ м, a=3,2 м/с^2 аст, пас 320=3,2t^2 ва аз он t=10 сония ҳосил мегардад. Аз формулаи $\upsilon = at$ суръати лаҳзагиро меёбем: $\upsilon = 32$ м/с.

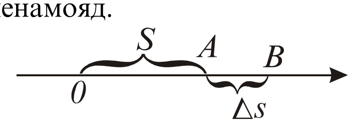
Бояд қайд кард, ки бисёр масъалаҳои характери амалӣ дошта аз суръати лаҳзагӣ вобастагӣ доранд. Масалан, аз суръати парвози киштии кайҳони, дохилшавии он ба қабати маълуми атмосфера вобаста аст.

Гузориши масъала дар шакли умумӣ чунин аст: аз рӯи вобастагии маълуми $f(t)$ суръате, ки ба он ҷисм дар лаҳзаи вақти t ҳаракат мекунад, муайян карда шавад.

Ин суръатро дар физика **суръати лаҳзагӣ** меноманд. Барои аз рӯи $f(t)$ - и маълум ($S = f(t)$ - ро қонуни ҳаракат ҳам меноманд) ёфтани суръати матлуби лаҳзагӣ $v_{\text{лаҳз}}(t_0)$ дар дарсҳои физика чунин рафтор мекарданд: дар навбати аввал суръати миёнаи ҳаракатро дар фосилаи вақти давомнокиаш $|\Delta t|$ аз t_0 то $t_0 + \Delta t$ ёфта, баъд аз он натиҷаро ҳангоми Δt ба нул майл кардан тадқиқ менамоянд (чунки дар ин гуна фосилаҳои хеле хурди вақт суръат қариб тағйир намеёбад).

Бо мақсади ба дарки ҳалли масъала ноил гаштан фарз мекунем, ки ҷисм аз рӯи тири OS аз чап ба рост ғайримунтазам ҳаракат мекунад. Дар ин ҳолат ҷисми ҳаракаткунанда дар ҳар воҳиди вақт масофаҳои гуногунро тай менамояд.

Чуноне ки дар боло қайд шуд, бо сабаби тағйирёбанда будани суръат нисбати масофаи тайшуда дар муддати вақти сарфшуда фақат суръати миёнаро медиҳад. Агар дар ягон лаҳзаи



Расми 58

вақти t_0 ҷисми ҳаракаткунанда вазъияти A – ро ва баъд аз гузаштани вақти Δt масофаи ΔS - ро тай карда вазъияти B – ро гирад, он гоҳ

$$S = f(t_0),\ S + \Delta S = f(t_0 + \Delta t),\ \Delta S = f(t_0 + \Delta t - f(t_0),$$

$\upsilon_{\text{миёна}} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ мешавад.

Суръати ҳаракат дар лаҳзаи вақти t_0 (яъне суръати лаҳзагӣ) бошад чун лимит суръати миёна дар мавриди хеле хурди Δt (яъне $\Delta t \to 0$) ҳосил мешавад:

$$\upsilon_{\text{миёна}} \to \upsilon_{\text{лаҳз}}(t_0) \text{ ё } \upsilon = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \to \upsilon(t_0)(\Delta t \to 0) \quad (1)$$

Масалан, барои масъалаи аввала амалиёти зерин ҷой дорад: суръати ҳаракати мунтазам сустшавандаи қатора аз рӯи қонуни $s = \dfrac{at^2}{2}$ дар фосилаи вақти $[10;\, 10 + \Delta t]$ ҳангоми $\Delta t \to 0$ ба $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = at_0 + \dfrac{a}{2}\Delta t,\ \upsilon(10) = at_0 = 3,2 \cdot 10 = 32$ м/с баробар аст.

Агар қонуни ҳаракат дар шакли $h(t) = \vartheta_0 t + \dfrac{gt^2}{2}$ дода шуда бошад, он гоҳ суръати миёнаи он дар лаҳзаи дилхоҳи вақи t ба

$$\upsilon_{\text{миёна}}(t) = \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} = \frac{\upsilon_0 \cdot (t + \Delta t) + \dfrac{g \cdot (t + \Delta t)^2}{2} - \upsilon_0 t - \dfrac{gt^2}{2}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\upsilon_0 t + \upsilon_0 \Delta t + \dfrac{gt^2}{2} + gt \cdot \Delta t + \dfrac{g(\Delta t)^2}{2} - \upsilon_0 t - \dfrac{gt^2}{2}}{\Delta t} = \frac{\left(\upsilon_0 + gt + \dfrac{g\Delta t}{2}\right) \cdot \Delta t}{\Delta t} =$$

$$= \upsilon_0 + gt + \frac{g \cdot \Delta t}{2}, \quad \upsilon_{\textit{миёна}}(t) = \upsilon_0 + gt + \frac{g \cdot \Delta t}{2} \text{ мешавад.}$$

Азбаски $\Delta t \to 0$, пас $\upsilon_0 + gt + \dfrac{g \cdot \Delta t}{2} \to \upsilon_0 + gt$ ва аз ин ҷо $\upsilon_{\text{лаҳз.}} = \upsilon_0 + gt$ мешавад.

36-37. Таърифи ҳосила. Масъалаҳои дар п 35 дида баромадаамон, ба ёфтани суръати лаҳзагӣ вобаста буда, модели математикиеро ифода мекунад, ки аз нисбати афзоиши функсия бар афзоиши аргумент ҳангоми ба 0 майл кардани бузургии охирин иборат аст (ниг. ба (1)). Чунин масъалаҳои ба ин лимит оваранда, ягона набуда, балки дар ҳалли бисёр масъалаҳои дигар вомехӯранд. Аз ин рӯ омӯзиши назарияи онҳо (дар шакли умумӣ) ва ёфтани қиматҳояшон диққати махсусро талаб мекунад.

Оиди функсияи $y = f(x)$ дар нуқтаи дилхоҳи x_0 - и соҳаи муайяниаш схемаи зеринро амалӣ мегардонем:

а) афзоиши функсияро дар нуқтаи x_0 меёбем:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

б) онро (яъне Δf - ро) ба $\Delta x \neq 0$ тақсим намуда, ба ифодаи

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{2}$$

соҳиб мешавем.

в) ҳангоми ба нул майл кардани Δx ба кадом адад майл кардани ифодаи $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ - ро муайян мекунем.

Таъриф. Ададе, ки ба он нисбати афзоиши функсия ба афзоиши аргумент ҳангоми ба нул майл кардани афзоиши аргумент майл мекунад, ҳосилаи функсияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x_0 номида мешавад.

Ҳосилаи функсияи $y = f(x)$ - ро дар нуқтаи x_0 бо рамзи $f'(x_0)$ (эф штрих аз икси нол) ишорат менамоянд.

Схемаи ба пунктҳои а) – в) асоснокшудаи ёфтани ҳосилаи функсияро шартан **алгоритми ёфтани ҳосилаи функсия** номида аз рӯи он ҳосилаи функсияҳои

$$1) f(x) = kx + b; \quad 2) f(x) = x^2; \quad 3) f(x) = x^3; \quad 4) f(x) = \frac{1}{x} \text{ ва}$$

$5) f(x) = \sqrt{x}$ - ро дар нуқтаи дилхоҳи соҳаи муайяниашон меёбем.

$1) f(x) = kx + b,\ k, b = const.$ а) Азбаски $f(x_0) = kx_0 + b$, $f(x_0 + \Delta x) = k(x_0 + \Delta x) + b$ аст, пас

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k(x_0 + \Delta x) + b - kx_0 - b =$$

$= k(x_0 + \Delta x - x_0) = k \cdot \Delta x$ мешавад. б) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k,\ \frac{\Delta f}{\Delta x} = k;$

в) $k = const,$ пас нисбати $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ низ барои $\Delta x \to 0$ доимӣ мешавад. Аз ин ҷо $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to k$ ҳангоми $\Delta x \to 0$ ва $(kx+b)' = k$ ҳосил мешавад.

Агар дар формулаи охирин аввал $k = 0, b = c$ ва баъд $k = 1, b = 0$ гирем, он гоҳ формулаҳои

$$(c)' = 0 \text{ ва } (x)' = 1$$

-ро ҳосил мекунем. Ин ду формула мувофиқан ба тасдиқотҳои ҳосилаи бузургии доимӣ ба нул ва ҳосилаи x ба 1 баробар аст, мувофиқ меоянд.

2) $f(x) = x^2$. а), б) Аз рӯи схемаи болоӣ амал карда, $\Delta f = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$ - ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$ мешавад;

в) ҳангоми $\Delta x \to 0$ ифодаи $2x_0 + \Delta x$ ба $2x_0$ майл мекунад. Пас, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 2x_0$ ҳангоми $\Delta x \to 0$. Нуқтаи дилхоҳ будани x_0 - ро ба ҳисоб гирифта $(x^2)' = 2x$ -ро пайдо мекунем.

3) $f(x) = x^3$. Маълум, ки барои ин функсия дар нуқтаи x_0 ва $x_0 + \Delta x$ - и соҳаи муайянӣ $f(x_0) = x_0^3$ ва $f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^3$ мешавад. Аз ин қиматҳо аввал афзоиши функсия ва баъд нисбати онро бар афзоиши аргумент тартиб медиҳем (пунктҳои а), б))

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \frac{x_0^3 + 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\left[3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2\right] \cdot \Delta x}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2, \ \frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Азбаски ҷамъшавандаҳои $3x_0 \cdot \Delta x$ ва (Δx^2) ҳангоми $\Delta x \to 0$ ба 0 майл мекунанд, пас, дар ин ҳолат $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 3x_0^2$. Айнан ҳамин тавр барои ҳар гуна x формулаи $(x^3)' = 3x^2$ ҳосил мегардад.

4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Фарз мекунем, ки $x_0 \neq 0$ бошад, он гоҳ

$$\Delta f = \frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0} = -\frac{\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}$$ ва $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$ мешавад.

Ҳангоми $\Delta x \to 0$ $x_0+\Delta x \to x_0$ ва $x_0(x_0+\Delta x) \to x_0^2$ - ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to -\frac{1}{x_0^2}$ мешавад.

Азбаски x_0 - нуқтаи дилхоҳи $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ аст, пас дар ҳамин фосила $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ мешавад.

5) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \ge 0$. Афзоиши функсияро дар нуқтаи дилхоҳи $x_0 (x_0 \ge 0)$ меёбем.

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0} = \frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x_0}\right)^2}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}} = \frac{x_0+\Delta x - x_0}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}.$$

Нисбати $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ намуди зеринро мегирад: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$.

Азбаски ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\sqrt{x_0+\Delta x} \to \sqrt{x_0}$, $\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0} \Rightarrow 2\sqrt{x_0}$ ва $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, он гоҳ $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Эзоҳ. Функсияи дар нуқта дорои ҳосила **бударо дар ҳамин нуқта дифференсиронидашаванда** меноманд. Агар функсияи $y = f(x)$ **дар ягон фосила дифференсиронидашаванда** бошад, он гоҳ **дар ҳар як нуқтаи фосила дорои ҳосила мешавад.**

Ҳосилаи функсияро бо y' ҳам ишорат мекунанд. Амалиёти ёфтани ҳосилаи функсияро **дифференсиронидани функсия** низ меноманд.

Натиҷаи дифференсиронии функсияҳои болоиро дар ҷадвали зерин ҷой медиҳем:

$f(x)$	c	x	x^2	x^3	$kx+b$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$
$f'(x)$	0	1	$2x$	$3x^2$	k	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{x^2}$

Ниҳоят гуфтаҳои пункти 35 – ро ба назар гирифта аз рӯи суръати миёнаи тағйирёбии функсия (ниг. п. 33.3.-и §8) дар порчаи $[x_0; x_0+\Delta x]$ ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$ - ро ҳосил кардан мумкин аст, ки онро суръати лаҳзагии тағйирёбии функсия ҳам меноманд.

?

1. Мафҳуми суръати лаҳзагиро шарҳ диҳед.
2. Ба ҳосилаи функсия дар нуқта таъриф диҳед.
3. Дар зери мафҳуми функсияҳои дифференсиронидашаванда ва дифференсиронии функсия чиро мефаҳмед?

324. Нуқтаи материалӣ аз рӯи қонуни $s(t) = 4 + 2t$ ҳаракат мекунад. Суръати миёнаи онро дар фосилаи вақти
1) аз $t = 4{,}8$ то $t = 5$; 2) аз $t = 2{,}4$ то $t = 3$ ёбед.

325. Агар қонуни ҳаракат $S = f(t)$ бо формулаи
1) $f(t) = 3t - 1$; 2) $f(t) = t^2 - 1$;
дода шуда бошад, он гоҳ суръати миёнаи ҳаракат дар порчаи $[3;3{,}1]$ ба чӣ баробар мешавад?

326. Суръати лаҳзагии ҳаракати нуқтаи материалиро аз рӯи қонуни $s(t)$ - и додашудааш ёбед:
а) $S = 5t + 3$; б) $S = 3t^2 - 2{,}3$

327. Суръати ҷисми аз рӯи қонуни $S = 2t^2 - 3t + 9$ ҳаракаткунандаро дар лаҳзаи вақти
а) $t = 3$; б) $t = 6$; ёбед.

328. Қимати $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ - ро аз рӯи додашудаҳои зерин ҳисоб кунед:

а) $f(x) = x^2 - 1,\ x_0 = 3,\ \Delta x = 0{,}005$; б) $f(x) = 2x^3,\ x_0 = 1,\ \Delta x = 0{,}001$;

в) $f(x) = \frac{7}{x},\ x_0 = -2,\ \Delta x = 0{,}05$; г) $f(x) = x + x^3,\ x_0 = 4,\ \Delta x = 0{,}02$.

329. Аз алгоритми ёфтани ҳосилаҳо истифода бурда ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $f(x)=x^2+2x^3-3;$ б) $f(x)=x^2+3x;$ в) $f(x)=1+5x;$

г) $f(x)=2-3x^2;$ д) $f(x)=4x-9;$ е) $\varphi(x)=x^3-1;$

ж) $\varphi(x)=\frac{3}{x}+x;$ з) $\varphi(x)=\sqrt{x}-x^2;$ и) $g(x)=x-3\sqrt{x};$ к) $g(x)=x-2x^2+3x^3.$

330. Аз ҷадвали пункти 36-37 истифода бурда қимати ҳосилаи функсияҳоро дар нуқтаҳои нишондодашуда ёбед:

а) $f(x)=ax+b\ (a,b-const),\ f'(100),\ f'(-11)-?$

б) $f(x)=\sqrt{x}\quad f'(4),\ f'(625)-?$ в) $\varphi(x)=\frac{1}{x}\quad \varphi'(-3),\ \varphi'(5)-?$

г) $g(x)=x^3\quad g'(6),\ g'(-1)-?$

331. Графики функсияи $y=2x^2+2$ ва графики функсияи ҳосилаи онро ифодакунанда дар як ҳамвории координатӣ сохта шаванд.

332. Агар а) $f(x)=x^2;$ б) $f(x)=\sqrt{x}$ бошад, он гоҳ дар кадом қиматҳои x ҳосилаи функсияи $f(x)$ ба 2 баробар мешавад.

333. Маълум, ки а) $f(x)=x^3$ ва б) $f(x)=\frac{1}{x}$ аст. Дар кадом қиматҳои x баробарии $f'(x)=3f(x)$ ҷой дорад?

334. Нишон диҳед, ки ҳосилаи функсияҳои

а) $f(x)=7x-1;$ б) $f(x)=5x^2;$ в) $f(x)=1-x^2$

дар тамоми $(-\infty;+\infty)$ бефосилаанд.

335. Оё функсияи

а) $f(x)=|x|+1$ дар нуқтаи $x=0;$

б) $f(x)=|x^2-x|$ дар нуқтаи $x=0$ ва $x=1.$

дорои ҳосила мешавад ё не?

Машқҳо барои такрор

336. Амалҳоро иҷро кунед:

а) $(8x^2+10x-3):(2x+3);$ б) $(x^4+4):(x^2+2x+4);$

в) $(x^5+2x^3-x^2-2):(x^3-1);$ г) $(3x^3+x^2-9x-3):(3x+1).$

337. Кадоме аз функсияҳои зерин ҷуфт ва кадомаш тоқ аст:

а) $y = x^4 + 2x^2 + 9$; б) $y = x^3 + 2x$;

в) $y = \frac{3}{x^3} + \sqrt[3]{x}$; г) $y = x^4 + 2|x|$.

338. Ифодаро содда намуда қимати ададиашро ёбед:

а) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(2\pi + \alpha)$, агар $\cos\alpha = \frac{1}{4}$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, агар $\sin\alpha = \frac{1}{6}$ бошад.

339. Содда кунед:

а) $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; б) $\dfrac{2\sin(\pi - \alpha) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin^2(\alpha - \pi)}$.

340. Суммаи шаст аъзои аввали пайдарпаии ададҳои натуралии ҷуфтро ёбед.

341. Муодиларо ҳал кунед:

а) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$; б) $(2x+1)(x^3+1) + x^2 = 2x(x^3+3) - 5$.

342. Суммаи квадратҳои сурат ва махраҷи касри дуруст ба 25 баробар аст. Касрро ёбед, агар суммаи он бо касри чаппааш ба $\frac{25}{12}$ баробар бошад.

343. Касри беохири даврии

а) 0,444…; б) 2,1051; в) -4(27); г) 0,2727…

- ро дар шакли касри оддӣ нависед.

344. Оё муодилаи $3x^6 + 2x^4 + 9 = 0$ дар $(-\infty; +\infty)$ реша дорад?

§10. Қоидаҳои асосии дифференсиронӣ

38. Ҳосилаи сумма, зарб ва тақсими ду функсия.

Дар ин пункт, ки аз се қисм иборат аст, формулаҳои дифференсирониро барои ёфтани ҳосилаи суммаи алгебравӣ, зарб ва тақсими ду функсия ҳосил мекунем. Бо мақсади баёни мухтасари мавод ишораҳои зеринро қабул мекунем:

$$u(x_0) = u,\ v(x_0) = v,\ u'(x_0) = u',\ v'(x_0) = v'.$$

Қоидаи 1 (ҳосилаи сумма). Ҳосилаи сумма ба суммаи ҳосилаҳо баробар аст:

$$(u+v)'=u'+v' \qquad (1)$$

Ин қоидаи ҳосилаёбиро пурратар чунин ҳам баён мекунанд: **агар ҳар яки аз функсияҳои** $u(x)$ **ва** $v(x)$ **дар нуқтаҳои** x_0 **дорои** ҳосила (дифференсиронидашаванда) бошанд, он гоҳ $u+v$ низ дар ин нуқта дорои ҳосила (дифференсиронидашаванда) буда, илова бар он формулаи (1) ҷой дорад.

Ишорати $f(x)=u(x)+v(x)$ - ро дохил намуда, исботро аз ёфтани афзоиши сумма оғоз менамоем:

$$\Delta(u+v)=u(x_0+\Delta x)+v(x_0+\Delta x)-[u(x_0)+v(x_0)]=$$

$$=u(x_0+\Delta x)-u(x_0)+[v(x_0+\Delta x)-v(x_0)]=\Delta u+\Delta v$$

Аз ин ҷо $\dfrac{\Delta(u+v)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ мешавад.

Ин қадами амалиётамон ба пункти б)-и алгоритми ёфтани ҳосилаҳо мувофиқ меояд.

Дар қадами охирин дифференсиронидашавандагии функсияҳои *u* ва *v* – ро дар нуқтаи x_0 ба назар гирифта (мувофиқи шарт $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\to u'$, $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\to v'$ ҳангоми $\Delta x\to 0$), ҳосил мекунем, ки ифодаи

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

ба $u'+v'$ майл мекунад. Пас тарафи чапи ифодаи охирин ба $f'(x_0)=u'+v'$ баробар мешавад ва аз он формулаи (1) бармеояд.

Айнан ҳамин тавр, ҳосилаи фарқи ду функсия ёфта мешавад. Дар асоси гуфтаҳои боло барои ду функсияҳои *u* ва *v* формулаи

$$(u\pm v)'=u'\pm v' \qquad (2)$$

ҷой дорад.

Формулаҳои (1) ва (2) барои миқдори шумораашон охирноки ҷамъшавандаҳо дуруст аст:

$$(u+v+...+w)'=u'+v'+...+w' \qquad (3)$$

Масалан, дар асоси формулаҳои болоӣ ҳосилаи функсияи

$\varphi(x)=x^3+x^2-\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+4$ ба

$$\varphi'(x)=\left(x^3+x^2-\sqrt{x}-\frac{1}{x}+4\right)'=(x^3)'+(x^2)'-(\sqrt{x})'-\left(\frac{1}{x}\right)'+(4)'=$$

$$=3x^2+2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)+0=3x^2+2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$$

баробар мешавад.

Қоидаи 2 (ҳосилаи зарб). Ҳосилаи зарби ду функсия ба ҳосили зарби ҳосилаи функсияи якум бар функсияи дуюм плюс ҳосили зарби ҳосилаи функсияи дуюм бар функсияи якум баробар аст:

$$(u\cdot v)'=u'v+uv' \tag{4}$$

Қоидаи 2 – ро дар шакли тасдиқоти зерин ҳам баён кардан мумкин аст: **агар функсияҳои** $u(x)$ **ва** $v(x)$ **дар нуқтаи** x_0 **дорои ҳосила (дифференсиронидашаванда) бошанд, он гоҳ зарбашон** $u\cdot v=F(x)$ дар ҳамин нуқта дорои ҳосила (яъне дифференсиронидашаванда) буда, илова бар он формулаи (4) ҷой дорад.

Дурустии формулаи (4) – ро дар мисоли функсияҳои $u(x)=x^2$ ва $v(x)=\frac{1}{x}-x$ месанҷем. Барои тарафи чап $(u\cdot v)'=\left[x^2\cdot\left(\frac{1}{x}-x\right)\right]'=(x-x^3)'=1-3x^2$ ва барои тарафи рост $u'\cdot v+v'\cdot u=(x^2)'\cdot\left(\frac{1}{x}-x\right)+\left(\frac{1}{x}-x\right)'\cdot x^2=2-2x^2-1-x^2=1-3x^2$ - ро ҳосил мекунем. Муқоисаи ифодаҳои ҳосил кардаамон аз ҳаққонияти формулаи (4) шаҳодат медиҳад.

Акнун аз рӯи алгоритми ёфтани ҳосилаҳо $(u\cdot v)'$ - ро ёфта, дурустии формулаи (4) – ро исбот мекунем:

а) Афзоиши ҳосили зарби функсияҳоро меёбем:

$$\Delta(u\cdot v)=u(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0+\Delta x)-u(x_0)\cdot v(x_0)=$$

$$=[u(x_0)+\Delta u]\cdot[v(x_0)+\Delta v]-u(x_0)\cdot v(x_0)=$$

$$=u(x_0)\cdot v(x_0)+u(x_0)\cdot\Delta v+v(x_0)\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v-u(x_0)\cdot v(x_0)=$$

$$=u(x_0)\Delta v+v(x_0)\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v$$

б) $$\frac{\Delta(u\cdot v)}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x_0)+\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot u(x_0)+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x} \tag{5}$$

в) Дифференсиронидашавандагии функсияҳои u ва v дар нуқтаи x_0 (мувофиқи шарт) ба натиҷаҳои зерин меоранд:

$$\text{ҳангоми } \Delta x \to 0, \ \frac{\Delta u}{\Delta x} \to u', \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} \to v', \quad \Delta u \to 0$$

Дар ин ҷо ҳар яки аз се ҷамъшавандаҳои тарафи рости (5) ҳангоми $\Delta x \to 0$ мувофиқан ба $u'v, v'u$ ва 0 майл мекунанд. Бо ибораи дигар тарафи рост ба $u'v + v'u$ майл мекунад. Пас, тарафи чап ҳангоми $\Delta x \to 0$ ба $F'(x) = u'v + v'u$ баробар мешавад. дар баробарии охирин ба ҷои $F(x)$ қиматаш $u \cdot v$ - ро гузошта, формулаи (4) – ро ҳосил мекунем.

Агар дар (4) $v = c = const$ гирем ва аз $(c)' = 0$ будан истифода кунем (ниг. ба **ҷадвали саҳ. 167**), он гоҳ

$$(c \cdot u)' = (c)' u + c \cdot u' = 0 \cdot u + c \cdot u' = c \cdot u'$$

пайдо мешавад.

Ҳамин тариқ,

$$(c \cdot u)' = c \cdot u' \qquad (6)$$

мешавад, ки он аз дурустии тасдиқоти зерин шаҳодат медиҳад: **зарбшавандаи доимиро аз зери аломати ҳосила баровардан мумкин аст.**

Мисоли 1. Ҳосилаи функсияи $f(x) = x^3 \cdot (\sqrt{x} + 2)$ - ро меёбем.

Ҳал. Дар асоси формулаи (4) ва баъдтар (2) ҳосил мекунем:

$$f'(x) = \left[x^3 \cdot (\sqrt{x} + 2 \right]' = (x^3)'(\sqrt{x} + 2) + x^3 \cdot (\sqrt{x} + 2)' =$$

$$= 3x^2(\sqrt{x} + 2) + x^3 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 \right) = x^2 \left(3\sqrt{x} + 6 + \frac{x}{2\sqrt{x}} \right) =$$

$$= x^2 \left(3\sqrt{x} + 6 + \frac{\sqrt{x}}{2} \right) = x^2 \left(\frac{7}{2}\sqrt{x} + 6 \right).$$

Мисоли 2. Ҳангоми $f(x) = (3x^2 + 1)(x + 1)$ будан решаҳои муодилаи $f'(x) = 0$ - ро меёбем.

Ҳал. Аз рӯи формулаи (4) (дар ин ҷо $u = 3x^2 + 1, \ v = x + 1$).

$$f'(x) = \left[\left(3x^2\right)(x + 1) \right]' = \left(3x^2 + 1\right)'(x + 1) + (x + 1)'\left(3x^2 + 1\right) \quad -$$

ро ҳосил мекунем.

Қиматҳои $\left(3x^2+1\right)'$ ва $\left(x+1\right)'$ - ро аввал аз рӯи қоидаи 1 ва баъд аз рӯи формулаи (6) меёбем.

$$\left(3x^2+1\right)' = \left(3x^2\right)' + (1)' = 3(x^2)' + 0 = 3\cdot 2x = 6x,$$
$$(x+1)' = (x)' + (1)' = 1 + 0 = 1$$

Аз ин ҷо,

$$f'(x) = 6x(x+1) + 1\cdot(3x^2+1) = 6x^2 + 3x^2 + 1 = 9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2$$

ва муодилаи $f'(x)=0$ ба муодила $(3x+1)^2=0$ меорад, ки $x=-\dfrac{1}{3}$ решаи каратии он аст.

Қоидаи 3 (ҳосилаи каср). Ҳосилаи тақсими ду функсия ба касри махраҷаш аз квадрати махраҷи касри додашуда сураташ ба фарқе баробар аст, ки тарҳшавандааш аз ҳосили зарби махраҷ ба ҳосилаи сурат ва тарҳкунандааш аз ҳосили зарби сурат бар ҳосилаи махраҷ мебошад:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \tag{7}$$

Бо дигар ибора, **агар функсияҳои *u* ва *v* дар нуқтаи x_0 дорои ҳосила (яъне дифференсиронидашаванда) ва $v(x_0)\neq 0$ бошад, он гоҳ ҳосилаи тақсими онҳо $\phi(x)=u(x):v(x)$ низ дар нуқтаи x_0 дорои ҳосила буда, илова бар он формулаи (7) ҷой дорад.**

Дурустии формулаи

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ - ро, ки пештар (§9) дар асоси таърифи ҳосила ёфта будем, бо ёрии формулаи (7) месанҷем. Дар ҳақиқат, агар $u=1$ ва $v=x$ гирем, он гоҳ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{(1)'\cdot x-(x)'\cdot 1}{x^2} = \dfrac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}$ мешавад.

Барои исботи (7) формулаи (4) – ро барои функсияҳои u ва $\dfrac{1}{v}$ тадбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + \left(\frac{1}{v}\right)' \cdot u$$

Акнун $\left(\frac{1}{v}\right)'$ - ро меёбем:

а). Афзоиши функсияи $\frac{1}{v}$ намуди зеринро мегирад:

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v(x_0+\Delta x)} - \frac{1}{v(x_0)} = \frac{v(x_0) - v(x_0+\Delta x)}{v(x_0)\cdot v(x_0+\Delta x)} = \frac{-\Delta v}{v(x_0)\cdot[v(x_0)+\Delta v]};$$

б). $\dfrac{\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}{\Delta x} = \dfrac{-\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0)\cdot[v(x_0)+\Delta v]};$

в). Ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$ (чун функсияи дар нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда) ва $\Delta v \to 0$ мешавад.

Аз ин ҷо, $\dfrac{\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}{\Delta x} \to \dfrac{-v}{v(v+0)} = -\dfrac{v'}{v^2}, \qquad \left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}, \qquad (8)$

ва $\left(\frac{u}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + \left(\frac{1}{v}\right)' \cdot u = u' \cdot \frac{1}{v} - \frac{v'}{v^2} \cdot u = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

ҳосил мешавад.

Агар дар ҳолати хусусӣ, $u = c = const$ гирем, он гоҳ

$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = \dfrac{(c)' \cdot v - (v)' \cdot c}{v^2} = \dfrac{0 \cdot v - c \cdot v'}{v^2} = -\dfrac{cv'}{v^2}$ мешавад.

Аз ин ҷо, формулаи

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2} \qquad (9)$$

- ро ва ҳангоми $c = 1$ будан формулаи (8) – ро ҳосил мекунем.

Мисоли 3. Ҳосилаи функсияи

а) $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$; б) $f(x)=\sqrt{x}-x^3$; в) $f(x)=(2x+1)\cdot\sqrt{x}$;

г) $f(x)=\dfrac{x^3-4}{x^2+1}$ - ро дар нуқтаи $x=4$ меёбем.

Ҳал. а) $f'(x)=\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)'=(x)'+\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'=1+\left[-\dfrac{(x^2)'}{(x^2)^2}\right]=1-\dfrac{2x}{x^4}=1-\dfrac{2}{x^3}$,

$$f'(4)=1-\frac{2}{4^3}=1-\frac{2}{64}=1-\frac{1}{32}=\frac{32-1}{32}=\frac{31}{32},\ f'(4)=\frac{31}{32}.$$

Дар рафти ҳал аз ҷадвали п. 36-37 ва формулаҳои (1), (8) истифода бурда шуд.

б) $f'(x)=(\sqrt{x})'-(x^3)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-3x^2,\ f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-3x^2,$

$$f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}-3\cdot 4^2=\frac{1}{2\cdot 2}-3\cdot 16=\frac{1}{4}-48=\frac{1-192}{4}=-\frac{191}{4};\ f'(4)=-\frac{191}{4}.$$

в) Барои ёфтани ҳосилаи функсияи $f(x)=(2x+1)\cdot\sqrt{x}$ дар нуқтаи дилхоҳи x аз формулаҳои (4), (1) ва (6) бо тартиби омадаашон истифода мебарем:

$$f'(x)=[(2x+1)\cdot\sqrt{x}]'=(2x+1)'\cdot\sqrt{x}+(\sqrt{x})'\cdot(2x+1)=[(2x)'+(1)']\cdot\sqrt{x}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(2x+1)=2\sqrt{x}+\frac{2x+1}{2\sqrt{x}}=\frac{4x+2x+1}{2\sqrt{x}}=\frac{6x+1}{2\sqrt{x}},\quad f'(x)=\frac{6x+1}{2\sqrt{x}}$$

Акнун қимати ҳосиларо дар нуқтаи матлуби 4 меёбем:

$$f'(4)=\frac{6\cdot 4+1}{2\sqrt{4}}=\frac{24+1}{2\cdot 2}=\frac{25}{4},\quad \text{ҷавоб}:\frac{25}{4}.$$

г) Азбаски $(x^3-4)'=3x^2-0=3x^2$ аст, пас дар асоси қоидаи 3-юми дифференсиронӣ

$$f'(x)=\left(\frac{x^3-4}{x^2+1}\right)'=\frac{(x^3-4)'\cdot(x^2+1)-(x^2+1)'\cdot(x^3-4)}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{3x^2\cdot(x^2+1)-2x(x^3-4)}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^4+3x^2-2x^4+8x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2+8x}{(x^2+1)^2}$$

ва аз ин ҷо $f'(4)=\dfrac{4^4+3\cdot 4^2+8\cdot 4}{(4^2+1)^2}=\dfrac{256+48+32}{17^2}=\dfrac{336}{289}$ мешавад.

Мисоли 4. $f(x)=\dfrac{x^2}{x+5}$. Чунин қиматҳои x – ро меёбем, ки барояшон а) $f'(x)>0$, б) $f'(x)<0$, $(x\neq -5)$ мешаванд.

Ҳал. Аз рӯи формулаи (7)

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x+5}\right)'=\frac{(x^2)'\cdot(x+5)-(x+5)'\cdot x^2}{(x+5)^2}=\frac{2x\cdot(x+5)-1\cdot x^2}{(x+5)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+10x-x^2}{(x+5)^2}=\frac{x^2+10x}{(x+5)^2}.$$

Маълум, ки барои $x\neq -5$ $(x+5)^2>0$ аст, пас аломати каср фақат ба сурат вобаста аст. Аз рӯи методи фосилаҳо нобаробариҳои

$$\frac{x^2+10x}{(x+5)^2}>0 \text{ ва } \frac{x^2+10x}{(x+5)^2}<0$$

- ро, ки мувофиқан ба талаботҳои а) ва б) –и шарти масъала мувофиқ меоянд, ҳал карда натиҷаҳои зеринро ҳосил мекунем:

а) барои $x\in(-\infty;-10)\cup(0;+\infty)$ $f'(x)>0$;

б) барои $x\in(-10;-5)\cup(-5;0)$ $f'(x)<0$;

Мисоли 5. Ақалан формулаи як функсияеро менависем, ки барояш ҳосила ба а) -9; б) $2x+5$; в) $1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ баробар бошад.

Ҳал. Аз ҷадвали ҳосилаҳои саҳ. 167 ва қоидаҳои дифференсиронӣ истифода бурда, барои а) функсияи $-9x$, барои б) функсияи x^2+5x ва барои в) функсияи $x+\sqrt{x}$ - ро навиштан мумкин аст.

?

1. Кадом қоидаҳои асосии дифференсиронии функсияҳоро медонед?
2. Дар асосӣ қоидаҳои 1-3 кадом формулаҳои дифференсирониро дар нуқта ҳосил кардан мумкин аст?
3. Оё қоидаҳои 1 ва 2 барои шумораи охирноки функсияҳо (аз ду зиёд) ҷой доранд?
4. Оё формулаи (7) – ро ба ёрии қоидаи 2 ҳосил намудан мумкин аст?

345. Ҳосилаи функсияҳои $ax+b$ ва ax^2+bx+c - ро ҳангоми

а) $a=1, b=2$; б) $a=1, b=-1$;

в) $a=-1, b=-2;$ г) $a=0, c=1;$
будан ёбед.

346. Ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $x^3+x^2;$ б) $x^3-x^2;$ в) $x^3+11;$ г) $-17+x^2;$

д) $x^2-4x+9;$ е) $x^2+6x-3;$ ж) $x^3+x^2;$ з) $x^3+x^2+1;$

и) $x+\frac{1}{x};$ к) $x^3+\frac{1}{x};$ л) $\frac{1}{x}-\sqrt{x}+x;$ м) $\sqrt{x}-x^2+3.$

347. $f'(1)$ ва $f'(9)$ - ро барои функсияҳои зерин ёбед:

а) $f(x)=x^2-2x+8;$ б) $f(x)=x^3-8;$ в) $f(x)=x^2-x;$

г) $f(x)=x^3+6x;$ д) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x};$ е) $f(x)=\frac{1}{x}-x^2;$

ж) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x}+3;$ з) $f(x)=x^3+\frac{1}{x};$

348. Агар

а) $f(x)=3x+1-x^2;$ б) $f(x)=x^3-x^2-7x+1;$

в) $f(x)=x^3-x^2-5;$ г) $f(x)=x^2+5x-8;$

д) $f(x)=x^3-2x;$ е) $f(x)=x^3+x^2-12x-3$

бошад, он гоҳ решаҳои муодилаи $f'(x)=0$ - ро ёбед.

349. Ҳосилаи функсияҳоро ёбед:

а) $(x-x^3)(x+x^3);$ б) $(x+11)\sqrt{x};$

в) $x^3\cdot(\sqrt{x}+1);$ г) $(x^2+1)(x-1).$

350. Агар

а) $f(x)=(x^3-1)(2-x);$ б) $f(x)=(x+1)\sqrt{x};$

в) $f(x)=(x^2-1)\cdot(\sqrt{x}+1);$ г) $f(x)=x+6,$

бошад, он гоҳ $f'(1)$ - ро ёбед:

351. Ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $\frac{2x+5}{x+3};$ б) $\frac{5-3x}{2x+1};$ в) $\frac{2x}{3x-10}.$

352. Ҳосилаи функсияи

а) $\frac{x^2+3x-5}{x+1};$ б) $\frac{x}{x^2+1};$ в) $\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$ г) $\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$ - ро ёбед.

353. Агар

а) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$; б) $f(x)=\frac{2x^2}{3x-1}$; в) $f(x)=\frac{x-1}{x}$;

г) $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{x}$ бошад, он гоҳ $f'(2)$ - ро ёбед.

354. Барои кадом қиматҳои x ҳосилаи функсияи $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ ба 3 баробар мешавад?

355. Муодилаи $f'(x)=3x^2+17$ - ро ҳангоми $f(x)=(x-1)(x^2-5x+6)$ будан ҳал кунед.

356. Барои кадом қиматҳои x ҳосилаи функсияи

а) $f(x)=3x^3-9x$; б) $f(x)=(2x-1)(x-5)$; в) $f(x)=\frac{1-3x^2}{1-3x}$

қиматҳои мусбат мегирад?

357. Барои кадом қиматҳои x ҳосилаи функсияи

а) $f(x)=7x^2-28x+11$; б) $f(x)=(x-1)\cdot\sqrt{x}$; в) $f(x)=\frac{3x^2}{1-3x}$

қиматҳои манфӣ мегирад?

358. Ақалан формулаи як функсияеро нависед, ки барояшон ҳосила ба

а) 3; б) $3x+2$; в) $3x^2-2$; г) $5-\frac{2}{x^2}$.

баробар аст.

Машқҳо барои такрор

359. Ҳисоб кунед:

$$0{,}364:\frac{7}{25}+\frac{5}{16}:0{,}125+2{,}5\cdot 0{,}8$$

360. Қимати ададии ифодаи ab^2+b^3 - ро ҳагоми $a=10{,}7$ ва $b=-0{,}7$ будан ёбед.

361. Муодиларо ҳал кунед:

а) $(3x+4)^2+3(x-2)=46$; б) $2(1-1{,}5x)+2(x-2)^2=1$;

в) $\frac{x^2}{x-2}-\frac{x+2}{x-2}=4$; г) $\frac{12}{(x+6)^2}+\frac{x}{x+6}=1$.

362. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{4}{3}; \end{cases}$

363. Координатаҳои қуллаи параболаро ёбед:

а) $y=x^2-10x+15$; б) $y=2x^2-5x+3$.

364. Аъзои якум ва фарқи прогрессияи арифметикиро ҳангоми $S_7=-35$ ва $S_{42}=-1680$ будан, ёбед.

365. Аз фурудгоҳ дар як вақт ба самти муайяншуда, ки масофааш 1600 км аст, ду ҳавопаймо парвоз мекунанд. Суръати ҳавопаймои якум назар ба дуюм 80 км/с зиёд мебошад, бинобар ин вай ба ҷои муайяншуда як соат пештар омада мерасад. Суръати парвози ҳавопаймоҳоро муайян кунед.

366. Нишон диҳед, ки функсияи

а) $y=2x+7$; б) $y=5x^2-10x$ дар тамоми $(-\infty;+\infty)$ бефосила аст.

§II. Ҳосилаи функсияи дараҷагӣ ва мураккаб

39. Ҳосилаи функсияи дараҷагӣ.

Бигузор функсияи дараҷагии $f(x)=x^n$, ки n – адади бутуни дилхоҳ аст, дода шуда бошад. Маълум, ки он барои n – ҳои мусбат дорои соҳаи муайянии $-\infty<x<+\infty$ ва барои n – ҳои манфӣ дорои соҳаи муайянии $x\neq 0$ мешавад.

Нишон медиҳем, ки барои n-и бутуни дилхоҳ ва x – и дилхоҳ ($x\neq 0$ ҳангоми $n\leq 1$ будан) формулаи

$$(x^n)'=n\cdot x^{n-1} \qquad (1)$$

ҷой дорад.

Дар п. 36-37 мо нишон дода будем, ки $(x^2)'=2x$, $(x^3)'=3x^2$ мешаванд. Аз формулаи ҳосилаи зарб (п.38)

$$(x^4)'=(x^3\cdot x)'=(x^3)'\cdot x+(x)'\cdot x^3=3x^2\cdot x+1\cdot x^3=3x^3+x^3=4x^3,$$

$$(x^5)'=(x^4\cdot x)'=(x^4)'\cdot x+(x)'\cdot x^4=4x^3\cdot x+1\cdot x^4=4x^4+x^4=5x^4.$$

Баробариҳоро дар намуди

$(x^2)'=2\cdot x^{2-1}$, $(x^3)'=3\cdot x^{3-1}$, $(x^4)'=4\cdot x^{4-1}$, $(x^5)'=5\cdot x^{5-1}$ ҳам ифода кардан мумкин аст. Ин бошад шаҳодати дурустии формулаи (1) барои $n=2,3,4,5$ ва ғайра аст.

Акнун фарз мекунем, ки формулаи (1) ҳангоми $n = k$ будан дуруст аст, яъне

$$(x^k) = k \cdot x^{k-1}$$

Нишон медиҳем, ки (1) барои $n = k+1$ низ ҷой дорад.
Дар ҳақиқат,

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + (x)' \cdot x^k = k \cdot x^{k-1} \cdot x + 1 \cdot x^k =$$

$$= k \cdot x^k + x^k = (k+1) \cdot x^k = (k+1) \cdot x^{(k+1)-1}.$$

Инак, агар формулаи (1) барои $n = 5$ дуруст бошад, он гоҳ вай барои $n = 6$ низ дуруст мешавад. Пас формулаи (1) барои ададҳои пай дар пай пасояндаи 10 (яъне 11, 12, 13,…) то ададиди дилхоҳи натуралии n дуруст мондан мегирад.

Қайд мекунем, ки ҳангоми $x \neq 0$ ва $n = 0$ ё $n = 1$ будан формулаи (1) низ дуруст аст, чунки

$$(x^0)' = 0 \cdot x^{0-1} = 0 \cdot x^{-1} = 0 \cdot \frac{1}{x} = 0, \quad (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

ва инҳо ба қиматҳои маълуми ҳосилаҳои функсияҳои 1 ва x мувофиқ меоянд.

Фарз мекунем, ки $n = -m, m \in N$ (яъне n – адади бутуни манфӣ) мебошад. Он гоҳ, аз рӯи формулаи (8)-и **§10** ҳосил мекунем:

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -m \cdot x^{m-1-2m} =$$

$$= -m \cdot x^{-m-1} = (-m) \cdot x^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

Ҳамин тариқ, барои қиматҳои бутуни манфии n формулаи (1) дуруст аст. Дурустии (1) барои ҳар гуна адади бутуни n нишон дода шуд.

Акнун ҳосилаи функсияҳои

а) $f(x) = 3 \cdot x^{-9}$; б) $f(x) = 2x^{11} - \dfrac{7}{x^3}$. - ро ҳангоми $x \neq 0$ будан, меёбем.

Ҳал. а) $f'(x) = (3 \cdot x^{-9})' = 3 \cdot (x^{-9}) = 3 \cdot (-9)x^{-9-1} = -27x^{-10} = -\dfrac{27}{x^{10}}.$

б) $$f'(x) = \left(2x^{11} - \frac{7}{x^3}\right)' = (2x^{11})' - \left(\frac{7}{x^3}\right)' = 2 \cdot (x^{11})' - 7 \cdot (x^{-3})' =$$

$$= 2 \cdot 11 \cdot x^{11-1} - 7 \cdot (-3)x^{-3-1} = 22x^{10} + 21 \cdot x^{-4} = 22x^{10} + \frac{21}{x^4}.$$

Ниҳоят қайд мекунем, ки формулаи (1) ҳангоми n – адади дилхоҳи ратсионалӣ ва ирратсионалиро ифода кардан низ ҷой дорад. Масалан, ҳосилаи $x^{\frac{1}{2}}$ ба

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left((\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}!\right).$$

Ҳосилаи $x^{\sqrt{2}}+3$ бошад $(x^{\sqrt{2}}+3)' = \left(x^{\sqrt{x}}\right)' + (3)' = \sqrt{2}\cdot x^{\sqrt{2}-1}$ мешавад.

40. Дифференсиронидашавандагии функсияҳои ратсионалӣ ва касрӣ–ратсионалӣ.

Тасдиқоти зерин ҷой дорад: функсияҳои ратсионалии бутун (бисёраъзогиҳо) ва касрӣ-ратсионалӣ дар нуқтаи дилхоҳи соҳаи муайяниашон дифференсиронидашавандаанд.

Ба сифати мисол ҳосилаи функсияҳои

б) $f(x) = x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 9x - 13,$ г) $f(x) = \dfrac{x^6 + 9x^2 - 1}{x^2 + 1}$

-ро дар нуқтаҳои дилхоҳи тааллуқи $(-\infty;+\infty)$ меёбем.

в) Қоидаи 1 ва натиҷаи қоидаи 2-и дифференсиронӣ (**§10**) имконият медиҳад, ки

$$f'(x) = (x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 9x - 13)' = (x^4)' + (5x^3)' - (4x^2)' + (9x)' - (13)' =$$
$$= (x^4)' + 5(x^3)' - 4(x^2)' + 9(x)' - 0$$

ро ҳосил мекунем. Дар асоси формулаи (1)

$f'(x) = 4x^3 + 15x^2 - 8x + 9$ мешавад.

г) Барои $\forall x \in (-\infty;+\infty)$ дар асоси қоидаҳои 3,1 ва натиҷаи қоидаи 2 (§10), тадбиқи бевоситаи формулаи (1) (§11) ҳосил мекунем:

$$f'(x)=\left(\frac{x^6+9x^2-1}{x^2+1}\right)'=\frac{(x^6+9x^2-1)'\cdot(x^2+1)-(x^2+1)'\cdot(x^6+9x^2-1)}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{\left[(x^6)'+(9x^2)'-(1)'\right]\cdot(x^2+1)-\left[(x^2)+(1)'\right]\cdot(x^6+9x^2-1)}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{(6x^5+18x)(x^2+1)-2x(x^6+9x^2-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{4x^7+6x^5+20x}{(x^2+1)^2}.$$

41. Мафҳуми функсияи мураккаб ва ҳосилаи он. Маводи ин пунктро ба ду қисм ҷудо намуда, қисми аввалашро ба шарҳи мафҳуми функсияи мураккаб ва дигарашро ба ёфтани ҳосилаи он мебахшем.

41.1. Функсияи мураккаб. Мисоли зеринро муоина мекунем. Фарз менамоем, ки функсия бо формулаи

$$y=F(x)=\sqrt{4-x^2}$$

дода шуда бошад. Масъалаи аз рӯи қимати маълуми x ёфтани қимати мувофиқи y –и функсияи $F(x)$ - ро мегузорем. Барои ин ишорати $u=f(x)=4-x^2$ - ро дохил карда функсияро ба намуди $y=\sqrt{u}$ менависем. Ин имконият медиҳад, ки аз рӯи қимати маълуми x аввал қимати $u=f(x)=4-x^2$ - ро, сипас $y=g(u)=\sqrt{u}$ -ро ёбем. Аз муҳокимаронии боло чунин бармеояд, ки функсияи f ба адади x адади u – ро ва функсияи g ба адади u адади y – ро мувофиқ мегузорад. Дар ин ҳолат F – ро функсияи мураккаби аз функсияҳои f ва g ташкилёфта номида, ба шакли

$$F(x)=g[f(x)] \tag{1}$$

менависанд. Бо ибораи дигар, функсияҳои мураккабро **функсия аз функсия** ҳам меноманд. Дар мисоли гирифтаамон $f(x)=4-x^2$ аргументи мобайниро ифода мекунад.

Ҳамин тариқ, агар *x* нуқтаи дилхоҳи соҳаи муайянии функсияи мураккаби (1) бошад, он гоҳ барои ҳисоб кардани қимати $F(x)$ аз рӯи дастури болоӣ амал карда, аввалаш қимати *u* –и функсияи f -ро ва баъдан қимати $g(u)$ -ро меёбанд.

Соҳаи муайянии функсияи мураккаби (1) маҷмӯи ҳамон x-ҳои соҳаи муайяниаш f мебошад, ки барояш $f(x)$ ба соҳаи муайянии g дохил мешавад.

Ба мисоли гирифтаамон баргашта, қайд мекунем, ки соҳаи муайянии $u = f(x) = 4 - x^2$ тамоми $(-\infty;+\infty)$ мешавад. Аммо $g(u) = \sqrt{u}$ барои u – ҳои ғайриманфӣ маъно дорад, пас соҳаи муайянии функсияи мураккаб $u \ge 0,\ 4 - x^2 \ge 0,\ |x| \le 2$ ё $x \in [-2;2]$ аст.

Агар $y = \sqrt{1-u^2}$ ва $u = \dfrac{3}{x-1}$ бошад, он гоҳ соҳаи муайянии y маҷмуи қиматҳои нобаробарии $1 - u^2 \ge 0$ - ро қаноаткунанда мебошад, ки аз он $|u| \le 1$ ҳосил мешавад. $u = \dfrac{3}{x-1}$ буданашро ба назар гирифта, нобаробарии $\left|\dfrac{3}{x-1}\right| \le 1$ - ро ҳосил мекунем, ки ҳаллаш

$$-1 \le \frac{3}{x-1} \le 1,\ -1 \ge \frac{x-1}{3} \ge 1, \qquad -3 \ge x-1 \ge 3, \qquad -2 \ge x \ge 4$$

ба $x \in (-\infty;2] \cup [4;+\infty)$ меорад. Яъне, соҳаи муайянии функсияи мураккаби $y = \sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{x-1}\right)^2}$ аз нимфосилаи $(-\infty;2]$ ва нимпорчаи $[4;+\infty)$ иборат аст.

Баъзан муайян кардани функсияи мураккаби $\varphi[\psi(x)]$ ва ё $\psi[\varphi(x)]$ аз руи $\varphi(x) = 3\sqrt{x}$ ва $\psi(x) = x^4 + 2$ талаб карда мешавад. Дар ин ҳолат $\varphi[\psi(x)] = 3\sqrt{\psi(x)} = 3\sqrt{x^4+2}$ ва $\psi[\varphi(x)] = [\varphi(x)]^4 + 2 = \left(3\sqrt{x}\right)^4 + 2 = 81x^2 + 2$ мешавад.

41.2. Ҳосилаи функсияи мураккаб.

1°. Ёфтани ҳосилаи функсияи $y=(8x-3)^2$ ҳеҷ душворие надорад. Кифоя аст, ки қавсро кушода онро ба шакли бисёраъзогӣ (онҳо бошанд дар асоси тасдиқоти п. 40 дар $\forall x\in(-\infty;+\infty)$ дорои ҳосилаанд) биёрем:

$$(8x-3)^2=64x^2-48x+9.$$

Аз ин ҷо,

$$y'=[(8x-3)^2]'=(64x^2-48+9)'=128x-48$$

мешавад.

Вале тадбиқи ин схемаи амалиёт, масалан, барои $y=(2x-4)^{100}$ (гарчанде ба ёфтани ҳосилаи бисёраъзогӣ биёрад ҳам) кори пурмашшақат буда, меҳнати зиёдеро талаб мекунад.

Аз ин рӯ, роҳи дигари ҳалли масъаларо, ки ба қоидаи ёфтани ҳосилаи функсияи мураккаб оварда мерасонад, пешниҳод мекунем.

Агар, функсияи $y=(8x-3)^2$ - ро дар намуди $y=u^2$, ки $u=8x-3$ аст, нависем, он гоҳ ҳосилаи ҳар кадомашро бо осонӣ ёфта метавонем:

$$y'(u)=2u,\ u'(x)=8.$$

Маълум, ки $y'(u)$ чанд маротиба тезтар тағйирёбии y- ро нисбат ба $u, u(x)$ чанд маротиба тағйирёбии u –ро нисбат ба x (ниг. ба қисми охирини эзоҳ дар п. 36-37) ифода мекунанд.

Агар y нисбат ба $uy'(u)$ маротиба ва u нисбат ба $xu'(x)$ маротиба тезтар тағйир ёбад, он гоҳ y нисбат ба $xy'(u)\cdot u'(x)$ маротиба тезтар тағйир меёбад. Аз ин ҷо, формулаи

$$y'(x)=y'(u)\cdot u'(x) \qquad (2)$$

-ро ҳосил мекунем, ки бо ёрии он бе машаққати зиёд

$$y'(x)=(u^2)'\cdot(8x-3)'=2u\cdot 8=16(8x-3)=128x-48$$

ёфт мешавад. Натиҷаи охирин ба ҷавоби дар аввали пункт ҳосилшуда монанд аст. Муқоисаи бевоситаи ду тарзи болоии ёфтани ҳосила аз бартарии тарзи охирин шаҳодат медиҳад.

Айнан ҳамин тавр, ҳосилаи $y=(4x-7)^3$ $(y=u^3,\ u=4x-7)$ -ро меёбем:

$$y'(x)=(u^3)'\cdot(4x-7)'=3u^2\cdot 4=12u^2=12(4x-7)^2=$$
$$=12(16x^2-56x+49)=192x^2-672x+558/$$

2°. Тасдиқоти зеринро исбот мекунем: агар функсияи f дар нуқтаи x_0 ва функсияи g дар нуқтаи $u_0 = f(x_0)$ ҳосила дошта бошад, он гоҳ функсияи мураккаби (1) низ дар нуқтаи x_0 дорои ҳосила шуда, илова бар он

$$F'(x_0) = g'[f(x_0)] \cdot f'(x_0) \tag{3}$$

аст.

Нисбати $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ - ро $(\Delta x \neq 0)$ ҳангоми $\Delta x \to 0$ дида мебароем.

Ишорати
$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f \tag{4}$$
-ро дохил карда

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = g[f(x_0 + \Delta x)] - g[f(x_0)] =$$
$$= g(u_0 + \Delta u) - g(u_0) = \Delta g$$

-ро ҳосил мекунем.

Азбаски f дар нуқтаи x_0 дорои ҳосила аст, пас ҳангоми $\Delta x \to 0$ низ $\Delta u \to 0$ (ниг. ба (4)). Давоми исботро барои ҳамон f - ҳое иҷро менамоем, ки дар атрофи нуқтаи x_0 иҷрои шарти $\Delta f \neq 0$ - ро таъмин менамоянд.

Пас, ҳангоми $\Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta F}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta g}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} \to g'(x_0) \cdot f'(x_0),$$

чунки ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$ ва (чӣ хеле дар боло қайд кардем, аз $\Delta x \to 0$ шарти $\Delta u \to 0$ мебарояд)

$$\frac{\Delta g}{\Delta u} \to g'(u_0).$$

Мисоли 1. Ҳосилаи функсияҳои зеринро меёбем:

а) $y = (9x^2 - 1)^4$ ва б) $y = \sqrt{5x^3 - 3x^2 + x - 9}$.

Ҳал. а) Функсияи $y = (9x^2 - 1)^4$ - ро ба намуди функсияи мураккаб бо ёрии $g(u) = u^4,\ u = 9x^2 - 1$ ифода карда, $g'(u) = (u^4)' = 4u^3$ ва $u'(x) = (9x^2 - 1)' = 9 \cdot 2x - 0 = 18x$ - ро ҳосил менамоем.

Аз ин ҷо,

$$y'(x) = \left[(9x^2-1)^4\right] = 4u^3 \cdot 18x = 4(9x^2-1)^3 \cdot 18x = 72x \cdot (9x^2-1)^3.$$

б) азбаски $g(u) = \sqrt{u}$, $u = 5x^3 - 3x^2 + x - 9$ аст, пас

$$y'(x) = g'(u) \cdot u'(x) = \left(\sqrt{u}\right)' \cdot (5x^3 - 3x^2 + x - 9) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (15x^2 - 6x + 1) =$$

$$= \frac{15x^2 - 6x + 1}{2\sqrt{5x^3 - 3x^2 + x - 9}}, \quad y'(x) = \frac{15x^2 - 6x + 1}{2\sqrt{5x^3 - 3x^2 + x - 9}},$$

мешавад.

Натиҷаи 1. Агар функсияи мураккаб дар шакли $y = f(ax+b)$, ки k ва b ададҳои ҳақиқӣ ва $u = kx + b$ аст, дода шуда бошад, он гоҳ

$$y' = k \cdot f'(u) = k \cdot f'(kx+b) \qquad (5)$$

мешавад.

Натиҷаи 2. Агар функсияи мураккаб дар шакли $y = f(ax^2 + bx + c)$, ки a, b, c -ададҳои ҳақиқӣ ва $u = ax^2 + bx + c$, дода шуда бошад, он гоҳ

$$y' = (2ax+b) \cdot f'(u) = (2ax+b) \cdot f'(ax^2 + bx + c) \qquad (6)$$

мешавад.

Мисоли 2. Ҳосилаи функсияи $y = \dfrac{(2x+1)^3}{(x^2+x+1)^2}$ -ро меёбем.

Ҳал. Аз қоидаи дифференсиронии каср ва натиҷаҳои 1 ва 2 ҳосил мекунем:

$$y' = \left[\frac{(2x+1)^3}{(x^2+x+1)^2}\right]' = \frac{\left[(2x+1)^3\right]' \cdot (x^2+x+1)^2 - \left[(x^2+x+1)^2\right]' \cdot (2x+1)^3}{\left[(x^2+x+1)^2\right]^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 3(2x+1)^2 \cdot (x^2+x+1)^2 - 2(x^2+x+1) \cdot (2x+1) \cdot (2x+1)^3}{(x^2+x+1)^4} =$$

$$= \frac{6(2x+1)^2 \cdot (x^2+x+1)^2 - 2(x^2+x+1) \cdot (2x+1)^4}{(x^2+x+1)^4} = -\frac{2(x^2+x-2)(2x+1)^2}{(x^2+x+1)^3}.$$

Мисоли 3. Ҳосилаи функсияи $f(x) = \sqrt{3+5x^3}$ - ро меёбем.

Ҳал. Функсияро дар шакли функсияи мураккаби $F(x) = g[f(x)]$ мегирем, он гоҳ $g(u) = \sqrt{u}$, $u(x) = 3 + 5x^3$

мешавад. Азбаски $g'(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}$ ва $u'=15x^2$ аст, пас $y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 15x^2=\frac{15x^2}{2\sqrt{3+5x^3}}$ мешавад.

?

1. Формулаи ҳосилаи функсияи дараҷагиро барои дараҷаи бутун нависед. Мисолҳо оред.
2. Оё функсияҳои ратсионалӣ ва касрӣ-ратсионалӣ дар нуқтаҳои соҳаи муайяниашон дорои ҳосила шуда метавонанд? Мисолҳо оред.
3. Функсияи мураккаб аз дигар функсияҳо бо кадом нишонаҳо фарқ мекунад? Мисолҳо оварда аргументи мобайниро нишон диҳед.
4. Формулаи ҳосилаи функсияи мураккабро нависед.
5. Натиҷаҳои 1 ва 2 ҳосилаи кадом функсияҳоро ифода мекунанд?

367. Ҳосилаи функсияҳоро ёбед:

а) x^5; б) x^{11}; в) x^{13}; г) x^{103}; д) x^{n+1}; е) x^{-2}; ж) x^{-4};

з) x^{-7}; и) x^{-15}; к) x^{-n+1}; л) $x^{\frac{3}{5}}$; м) $x^{1+\sqrt{3}}$; и) $x^{\sqrt{5}-4}$.

368. Қимати ҳосилаи функсияҳоро дар нуқтаҳои додашуда ёбед:

а) $f(x)=\frac{1}{x^6}, x_0=2$; б) $f(x)=x^4+2x-9, x_0=3$;

в) $f(x)=x^{-3}+x^3+2,\ x_0=3$; г) $f(x)=x^{11}-2x^{21}+2\sqrt{x},\ \ x_0=1$.

369. Барои кадом қиматҳои x ҳосилаи функсияи $f(x)$ ба нул баробар мешавад:

а) $f(x)=x^3-12x$; б) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}$;

в) $f(x)=x^2+5$; г) $f(x)=x^4-x^3+9$;

д) $f(x)=x^4+4x-11$; е) $f(x)=x^4-12x^2-1$?

370. Аз қоидаи дифференсиронӣ ва ҳосилаи функсияи дараҷагӣ истифода бурда $f'(x)$ - ро ёбед:

а) $f(x)=x^9\cdot(1+x^2)$; б) $f(x)=x^4+(x^7+1)\cdot(x^2-1)$;

в) $f(x)=x^5-\frac{x^3+1}{x^6}$; г) $f(x)=\frac{x^3-3x}{1+4x^2}-x^4$;

д) $f(x)=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+4}$; е) $f(x)=(x^9-1)(2x^3-4x+1)$.

371. Формулаи ақалан як функсияеро нависед, ки ҳосилааш ба

а) $3x^2+4$; б) $5x^9+4x^5-3x$; в) $-\dfrac{3}{x^2}+2$; г) $3x-\dfrac{1}{x^3}$ баробар бошад.

372. Аз рӯи функсияи мураккаби $F(x)=g[f(x)]$ функсияҳои $g(u)$ ва $u=f(x)$-ро муайян намоед:

а) $F(x)=\sqrt{1-\cos x}$; е) $F(x)=\arcsin\dfrac{x-3}{2}$;

б) $F(x)=(2\sin x+3)^2$; ж) $F(x)=(1+7x)^9$;

в) $F(x)=\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; з) $F(x)=\sqrt{\sin x}$;

г) $F(x)=tg\dfrac{2}{x}$; и) $F(x)=ctg\left(x^2-x+3\right)$;

д) $F(x)=(3x-11)^5$; к) $F(x)=\left(1+\cos x\right)^3$.

373. Аз рӯи функсияҳои $f(x)=2\sqrt{x}$, $g(x)=x^2+1$ ва $h(x)=\dfrac{1}{x}$ функсияҳои зеринро бо ёрии формулаҳо нависед:

а) $f[g(x)]$; б) $g[f(x)]$; в) $f[h(x)]$;

г) $h[f(x)]$; д) $g[h(x)]$; е) $h[g(x)]$.

374. Соҳаи муайянии функсияи мураккабро ёбед:

а) $y=\sqrt{1-4x^2}$; б) $y=\sqrt{x^2-0{,}16}$; в) $y=\sqrt{25-x^2}$;

г) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$; д) $y=\sqrt{\cos x-\dfrac{1}{2}}$; е) $y=\sqrt[4]{1-ctgx}$;

ж) $y=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sin 2x}$; з) $y=\sqrt{\dfrac{1}{2}-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}$;

и) $y=\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}$; к) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2}}$.

375. Ҳосилаи функсияро ёбед (№375-377):

а) $(11+x)^{21}$; б) $(9x+23)^{-4}$; в) $(0{,}1x-1)^{-10}$; г) $\sqrt{x+3{,}2}$;

д) $\sqrt{9-2x}$; е) $\sqrt{3x-91}$; ж) $\sqrt{\frac{x}{2}+13}$; з) $(ax+b)^n$;

и) $(ax+b)^{-n}$.

376. а) $\sqrt{5x^2-27}$; б) $\sqrt{x^2+10x-61}$; в) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+1}$;

г) $\sqrt{8x^3+5}$; д) $\sqrt{0{,}25x^4+2}+\sqrt{x^3}$; е) $\sqrt{ax^k+bx+c}$.

377. а) $(10x-3)^2-(x+11)^3$; б) $(2x+5)^4-(3x-1)^7$;

в) $(3x^2+7x+11)^{54}$; г) $(x^2-3)^{103}$; д) $\dfrac{(x^2+11)^2}{(1-x)^3}$; е) $\dfrac{(x^3-7)^3}{(x^2-1)^2}$.

Машқҳо барои такрор

378. Касрро ихтисор кунед:

а) $\dfrac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}$; б) $\dfrac{2a^4+a^3+4a^2+a+2}{2a^3-a^2+a-2}$.

379. Нобаробариҳоро ҳал кунед:

а) $(x^4-3x^2-4)(x^4+8x^2-9)>0$;

б) $(x^3-5x^2-x+5)(x^3+2x^2-9x-18)<0$.

380. Нишон диҳед, ки қимати ифодаи

$$\frac{2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(\pi-\alpha)+\cos^2\alpha-1}{\cos 2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\cos^2\alpha}$$

аз α вобастагӣ надорад.

381. Дар секунҷаи баробарпаҳлӯ яке аз кунҷҳои назди асос ба 52° баробар аст. Кунҷҳои боқимондаи секунҷаро муайян кунед.

382. b_n ва S_n - и прогрессияи геометриро аз рӯи додашудаҳои зерин ёбед:

а) $b_1=1,\ q=5,\ n=4$; б) $b_1=1,\ q=-3,\ n=5$.

383. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases}3x+2y-xy=7,\\ 2x+3y+xy=3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+2y^2+3xy=28,\\ 2x^2+y^2+3xy=20;\end{cases}$

384. Дар мусобиқаи байналхалқии шоҳмотбозон, ки соли 1896 дар Будапешт созмон ёфта буд, шоҳмотбози машҳури рус

Чигорин ғолиб омад. Иштирокчиёни мусобиқа бо якдигар як маротибагӣ бозӣ карданд. Агар 78 бозӣ гузаронида шуда бошад, дар мусобиқа чанд шоҳмотбоз иштирок карда буд?

385. Ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $2\sqrt{x}+\frac{9}{x^5}$; б) $(x^3+3)(x-1)$; в) $\frac{3x^5-1}{1+2x^2}$; г) $x^6-\frac{5}{x}$;

д) $(1+\sqrt{x})(x^2+7)$; е) $\frac{x^4+x}{\sqrt{x}}$.

386. Оё ҳосилаи функсияи $y=5x+\sqrt{x}$ дар нуқтаи $x_0=0$ вуҷуд дорад?

§ 12. Ҳосилаи функсияҳои тригонометрӣ
Ҷадвали ҳосилаи функсияҳо
42. Ҳосилаи функсияи y=sinx.

Исбот мекунем, ки функсияи $\sin x$ дар нуқтаи дилхоҳ ҳосила дорад. Он бо формулаи

$$(\sin x)' = \cos x \tag{1}$$

ёфта мешавад.

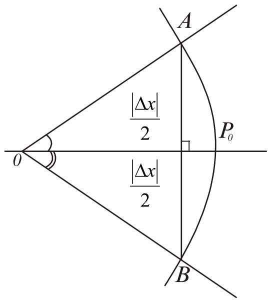
Дар асоси формулаи фарқи синусҳо ҳосил мекунем:

$$\Delta \sin x = \sin(x_0+\Delta x) - \sin x_0 = 2\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot \sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Нисбати $\frac{\Delta \sin x}{\Delta x}$ намуди зеринро мегирад:

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = 2\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$ ё

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$



Расми 59

Дар навбати аввал нишон медиҳем, ки ҳангоми $\Delta x \to 0$ нисбати $\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$

Бо ин мақсад дар давраи воҳидӣ нуқтаҳои А ва В – ро чунон мегирем, ки камонҳои якхелаи P_0A ва P_0B дарозиаш ба $\frac{\Delta x}{2}$ баробар бошанд. Ниг. ба расми 59. Он гоҳ дарозии камони $\overset{\cup}{AB}$ ба Δx ва дарозии хордаи АВ ба $2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|$ баробар мешавад. Барои Δx -ҳои хеле хурд дарозии хорда аз дарозии камони $\overset{\cup}{AB}$ фарқ намекунад: $\overset{\cup}{AB} = AB$.

Пас, ҳангоми $\Delta x \to 0$

$$\frac{AB}{\overset{\cup}{AB}} = \frac{\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|}{\left|\frac{\Delta x}{2}\right|} = \left|\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right| \to 1$$

Акнун бо $\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$ машғул мешавем. Азбаски функсияи $\cos x$ дар тамоми $(-\infty; +\infty)$ бефосила аст, пас ҳангоми $\Delta x \to 0$ кардан $\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x_0$.

Аз ин ҷо, ҳангоми $\Delta x \to 0$

$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \cos(x_0 + \Delta x) \to 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0$ мешавад. Ифодаи $\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} \to \cos x_0$ ҳангоми $\Delta x \to 0$ ё $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \cos x$ аз дурустии формулаи (1) шаҳодат медиҳад.

Акнун аз формулаи функсияи мураккаб истифода бурда, ҳосилаи $\sin(ax+b)$-ро меёбем:

$$[\sin(ax+b)] = (\sin u)' \cdot (ax+b)' = \cos u \cdot (a \cdot 1 + 0) = a \cdot \cos u = a\cos(ax+b)$$

$$[\sin(ax+b)] = a\cos(ax+b) \qquad (2)$$

43. Ҳосилаи функсияи *cosx, tgx* ва *ctgx.*

Исбот мекунем, ки функсияҳои $\cos x$, *tgx ва ctgx* дар нуқтаҳои соҳаи муайяниашон дорои ҳосила буда, барояшон формулаҳои зерин ҷой доранд:

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{3}$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{4}$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{5}$$

а) Барои исботи формулаи (3) аз баробариҳои

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ ва } \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ниг. ба китоби «Алебра» - и с.9, §12, боби IV), истифода мебарем:

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(0 - 1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Дар рафти исбот аз қоидаи ёфтани ҳосилаи функсияи мураккаб низ истифода бурдем.

б) Ҳаққонияти формулаҳои (4) ва (5) бо ёрии баробариҳои

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$$

ва истифодаи қоидаи 3-и дифференсиронӣ (ниг. ба 38) нишон дода мешавад.

Дар ҳақиқат,

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ва

$$(ctgx)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - (\sin x)' \cdot \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

мешавад.

Мисоли 1. Ҳосилаи функсияи $y = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ - ро меёбем.

Ҳал:

$$y' = \left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(1-\cos x)' \cdot \sin x - (\sin x)' \cdot (1-\cos x)}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{(0+\sin x)\sin x - \cos x(1-\cos x)}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{y}{\sin x}.$$

Мисоли 2. Ҳангоми $f(x) = x\sin 2x$ будан, қимати $f'(x) + f(x) + 2$ дар нуқтаи $x = \pi$ ҳисоб карда шавад.

Ҳал: $y' = (x\sin 2x)' = (x)' \cdot \sin 2x + (\sin 2x)' \cdot x =$

$= 1 \cdot \sin 2x + x \cdot \cos 2x \cdot (2x)' = \sin 2x + 2x\cos 2x.$

Қиматҳои $f(\pi)$ ва $f'(\pi)$ - ро меёбем:

$f(\pi) = \pi \sin 2\pi = \pi \cdot 0 = 0,$

$f'(\pi) = \sin 2\pi + 2\pi \cos 2\pi = 0 + 2\pi \cdot 1 = 2\pi.$

Қиматҳои ёфтаамонро гузошта ифодаи матлубро меёбем:

$$(f(x) + f'(x) + 2)\big|_{x=\pi} = f'(\pi) + f(\pi) + 2 = 2\pi + 0 + 2 = 2(1+\pi).$$

Мисоли 3. Аз формулаи (9) –и §10 истифода бурда ҳосилаи функсияҳои $\dfrac{1}{\cos x}$ ва $\dfrac{1}{\sin x}$ ёфта шаванд.

Ҳал. Пеш аз иҷрои амалиёти зарурӣ қайд менамоем, ки ин функсияҳоро мувофиқан бо рамзҳои $\sec x$ ва $\operatorname{cosec} x$ ишорат намуда, "секанс икс" ва "косеканс икс" мехонанд.

Ҳамин тариқ,

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = tgx \cdot \sec x$$

ва

$$(\operatorname{cosec} x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = -ctgx \cdot \operatorname{cosec} x$$

мешавад. Яъне ҳосил менамоем, ки формулаҳои

$$(\sec x)' = tgx \cdot \sec x \qquad (\operatorname{cosec} x)' = -ctgx \cdot \operatorname{cosec} x$$

низ ҷой доранд.

Аз рӯи формулаҳои охирин ҳосилаҳои tgx ва $ctgx$ ин хел ҳам навишта мешаванд:

$$(tgx)' = \sec^2 x, \qquad (ctgx)' = -\cos ec^2 x.$$

?

1. Кадом формулаҳои ҳосилаи функсияҳоро медонед?

2. Дурустии ҷумлаи «ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$ -ро маънидод кунед.

3. Ҳосилаи косинусро бо истифодаи кадом формулаҳои мувофиқоварӣ меёбанд?

4. Агар дар нуқтаи x_0 функсияҳо (ақалан яктояш) дорои ҳосила набошад, он гоҳ формулаҳои аз қоидаҳои дифференсиронӣ бароянда вуҷуд дошта метавонанд?

44. Ҷадвали ҳосилаи функсияҳо. Дар ин ҷо ҷадвали дар п.36-37-и §9 мавқеъёфтаро бо формулаҳои параграфҳои пасоянд пурра карда, ҷадвали зеринро тартиб медиҳем:

№ б/т	Ҳосилаи баъзе функсияҳои асосии элементарӣ	Ҳосилаи функсияҳои мураккаб
1	2	3
1	$(c)' = 0, c = const$	
2	$(x)' = 1$	
3	$(x^2)' = 2x$	$(u^2)' = 2u \cdot u$
4	$(x^3)' = 3x^2$	$(u^3)' = 3u^2 \cdot u$
5	$(x^n)' = nx^{n-1}, \ n \in R$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
6	$(kx+b)' = k$	$[f(kx+b)]' = k \cdot f'(kx+b)$
7	$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
8	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
9	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
10	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

11	$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$
12	$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)'=-\frac{u'}{\sin^2 u}$
13	$(\sec x)'=tgx\cdot\sec x$	$(\sec u)'=tgu\cdot\sec u\cdot u'$
14	$(\cos ecx)'=-ctgx\cos ecx$	$(\cos ecu)'=-ctgu\cos ecu\cdot u'$

Қоидаҳои дифференсиронӣ

1	$[u(x)+v(x)]'=u'(x)+v'(x)$	3	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}$
2	$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v+v'(x)u(x)$	4	$[g(f(x))]=g'(f(x))f'(x)$

Ҳосилаи функсияро ёбед: (№387-388)

387. а) $2x+3\sin x$; б) $2\cos x$; в) $3\sin x+2\cos x$; г) $3tgx$;

д) $\cos x+2tgx$; е) $\sin x+3ctgx$; ж) $tgx+4ctgx$; з) $\sin 2x$;

и) $1+\cos 3x$; к) $-\frac{3}{4}\sin 8x$; л) $2\sin\frac{5x}{2}$; м) $5\cos(-2x)$;

н) $\frac{1}{2}x^2-3\sin\frac{x}{3}$.

388. а) $7\cos\frac{2x}{7}$; б) $-4\cos 1{,}5x$; в) $-\frac{1}{3}\cos(-0,3x)$; г) $\sqrt{x}-tg5x$;

д) $\frac{1}{x}+3tg\frac{x}{2}$; е) $x^2-0{,}2tg2x$; ж) $\frac{1}{5}tg(-4x)$; з) $ctg3x$;

и) $5-1{,}3ctg(-10x)$; к) $3x+4ctg8x$; л) $2ctg\frac{x}{4}-x^{10}$.

Ҳосилаи функсияи тригонометриро ёбед (№389-390)

389. а) $3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; б) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$; в) $0{,}1\sin(10x+\pi)$;

г) $5\cos\left(4x+\frac{3\pi}{2}\right)$; д) $-6\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{3\pi}{2}\right)$; е) $-3\cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)$;

390. а) $2tg(x-4)$; б) $-3tg\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)$; в) $\frac{5}{\cos(x+1)}$;

г) $4ctg\left(\frac{3x}{2}-5\right)$; д) $-0{,}5ctg(2\pi-4x+x^2)$; е) $x+\frac{0{,}1}{\sin(1-x)}$.

391. Ҳосилаи функсияро дар нуқтаҳои $x_0=0$, $x_0=\frac{\pi}{4}$ ва $x_0=\frac{\pi}{3}$ ёбед:

а) $f(x)=2\cos x-3x$; б) $f(x)=x^2+2tgx$;

в) $f(x)=x-\frac{1}{2}\sin 2x$; г) $f(x)=\sin x-\cos x$;

д) $f(x)=2tgx-3x$; е) $f(x)=4x-ctg\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)$.

392. Аз қоидаҳои дифференсиронӣ ва ҷадвали ҳосилаҳо истифода бурда ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $(x^4+1)\sin x$; б) $x\sin x+\frac{1}{3}tgx$; в) $tgx-ctgx$;

г) $x\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x-x$; д) $2ctg^2x$; е) $2x-\cos^2 x$;

ж) $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$; з) $\frac{1+\cos x}{1-\sin x}$; и) $\frac{\sin x-\cos x}{x}$.

393. Муодилаи $f'(x)=0$ -ро ҳангоми

а) $f(x)=\sqrt{3}x+2\cos x$; б) $f(x)=3x+tgx$;

в) $f(x)=\cos^3 x+3\sin x$; г) $f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}x$;

д) $f(x)=2\cos^2 x-\sqrt{2}x$; е) $f(x)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)-x$ будан, ҳал кунед.

394. Агар а) $f(x)=3-\cos x$; б) $f(x)=\sin x-x$ бошад, он гоҳ нобаробарии $f'(x)>0$ - ро ва агар

в) $\varphi(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{2}x$; г) $\varphi(x)=1+2\cos x$

бошад, он гоҳ нобаробарии $\varphi'(x)<0$ - ро ҳал кунед.

395. Аз ҷадвали ҳосилаҳо истифода бурда як намуди функсияи $f(x)$ - ро ба воситаи формула нависед, агар а) $f'(x)=3x^2-\frac{1}{\cos^2 x}$; б) $f'(x)=2x-3\cos 3x$;

в) $f'(x)=3\sin x+\cos x$; г) $f'(x)=\cos x-\frac{3}{2\sqrt{x}}$;

д) $f'(x)=1+\cos x$; е) $f'(x)=\sqrt{2}\cdot x+\cos x$ бошад.

396. Қимати ифодаи $8f'\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)+4$ - ро ҳангоми $f(x)=\sqrt{2}x+\cos x$ будан, ёбед

Машқҳо барои такрор

397. Ҷадвалро пур кунед:

x	-3	-2	-1	0	1	3	5	6
$y=2x+1$								
$y=1-x^2$								
$y=x^3+1$								

398. Мошини боркаш 120 км роҳи мумфарш ва 232 км роҳи сангфарш тай намуд. Дар роҳи сангфарш ронанда суръатро 2 км/соат кам кард. Агар тамоми роҳ дар муддати 6 соат тай карда шуданаш маълум бошад, он гоҳ суръати аввала ба чӣ баробар мешавад?

399. Экстремум ва экстремали функсияи

а) $y=2(x-5)^2+1$; б) $y=-(x-3)^2+5$-ро ёбед.

400. График насохта нишон диҳед, ки хати каҷи $x^2-9y^2+4y+1=0$ тири $0x$ –ро намебурад.

401. Аз рӯи решаҳои додашуда муодила тартиб диҳед:

а) $x_1=1,\ x_2=-2$; б) $x_1=3,\ x_2=-1,\ x_3=1$.

402. Дар ифодаи зерин квадрати пурра ҷудо карда шавад:

а) $x^2-14x+31$; б) $x^2+10x-4$; в) $2x^2+8x-3$.

403. Муқоиса кунед:

а) 21 сомону 52 дирам ва 2218 дирам;
б) 42 тоннаю 318 кг ва 41318 кг;
в) 6 соату 18 дақиқа ва 378 дақиқа.

404. Диаметри доираеро ёбед, ки масоҳаташ 400π воҳ. кв. (воҳиди квадратӣ)-ро ташкил медиҳад:

405. Агар а) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+81$; б) $f(x)=x^3-16x+11$ бошад, он гоҳ муодилаи $f'(x)=0$ -ро ҳал кунед.

406. Агар $f(x)=x^3-3x$ бошад, онгоҳ дар кадом қиматҳои x ифодаи $f'(x)+\frac{f(x)}{x}-27$ ба 0 баробар мешавад?

§13. Мафҳуми ҳосилаи тартиби олӣ.

Пеш аз он, ки мо маҳфуми ҳосилаи тартиби олиро шарҳ диҳем, ба мисол муроҷиат мекунем.

Агар $f(x)=x^5-4x^3+8$ бошад, он гоҳ $f'(x)=5x^4-12x^2$ мешавад. Тарафи рости ифодаи охирин функсияи нави $\varphi(x)$ -ро ифода мекунад, ки дифференсиронидашванда аст: $\varphi'(x)=\left(5x^4-12x^2\right)'=20x^3-24x$. Возеҳ аст, ки дар навбати худ $[f'(x)]'=20x^3-24x$ буда дар нуқтаҳои $(-\infty;+\infty)$ дорои ҳосилаи ба $60x^2-24$ баробар мешавад. Ин хосиятро дар мисоли $f(x)=x^4+2\sin x$ низ мушоҳида намудан мумкин аст:

$f'(x)=4x^3+2\cos x=\varphi(x),\ \ \varphi'(x)=12x^2-2\sin x=\psi,\ \ \psi'(x)=24x-2\cos x,\ldots$

Фарз мекунем, ки функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи дилхоҳи x – и фосилаи (a,b) дифференсиронидашаванда бошад, он гоҳ $y'=f'(x)$ мешавад. Чӣ хеле, ки дар мисолҳои болоӣ мушоҳида намудем, y' функсияи нави аргументаш x-ро, ки аз он вобаста буд, ташкил медиҳад. Агар ҳосилаи ин функсияи нав (яъне $f'(x)$) вуҷуд дошта бошад

$$(y')'=[f'(x)]'$$

он гоҳ онро нисбат ба функсияи аввалаи $y=f(x)$ **ҳосилаи тартиби ду** номида бо y'' ё $f''(x)$ ишорат мекунанд $y''=(y')'$ ва онҳоро мувофиқан **"игрек ду штрих"** ва **"эф ду штрих аз икс"** мехонанд.

Айнан ҳамин тарв, ҳосила аз функсияи $f''(x)$ -ро ҳосилаи тартиби сеюм номида бо $f'''(x)$, ҳосилаи функсияи $f'''(x)$ - ро ҳосилаи тартиби чорум номида бо $f^{IV}(x)$ ишорат * ишорат

---

* Бо мақсади озодшавӣ аз навишти шуморааш хеле зиёди штрихҳо ҳосилаи тартибаш аз се болоро бо рақамҳои римӣ менависанд.

мекунанд ва ҳоказо. Ии ҳосилаҳоро (яъне ҳосилаҳои тартибашон $n \geq 2$ -ро) **ҳосилаи тартиби олӣ** меноманд.

Мисоли 1. Ҳосилаи тартиби дуи функсияи

$$y = (6 - x^2)\sin x - 4x\cos x$$

ёфта шавад.

Ҳал.

$$y' = [(6 - x^2)\sin x - 4x\cos x]' = [(6 - x^2)\sin x]' - (4x\cos x)' =$$

$$= (6 - x^2)'\sin x + (6 - x^2)(\sin x)' - 4[(x)'\cos x + x(\cos x)'] =$$

$$= -2x\sin x + (6 - x^2)\cos x - 4\cos x + 4x\sin x =$$

$$= 2x\sin x + 2\cos x - x^2\cos x = 2x\sin x + (2 - x^2)\cos x,$$

$$y' = 2x\sin x + (2 - x^2)\cos x.$$

Акнун аз баробарии $y'' = (y')'$ истифода бурда y''-ро меёбем:

$$y'' = (y')' = [2x\sin x + (2 - x^2)\cos x]' = (2x\sin x)' + [(2 - x^2)\cos x]' =$$

$$= 2\sin x + 2x\cos x - 2x\cos x - (2 - x^2)\sin x =$$

$$= 2\sin x - 2\sin x + x^2\sin x = x^2\sin x,$$

Ҷавоб: $y'' = x^2\sin x$

Мисоли 2. $y = \sin^2 x,\ y''' = ?$

Ҳал. $y' = (\sin^2 x)' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x.$

Функсияи $\sin 2x$ дифференсиронидашаванда аст, пас

$$y'' = (y')' = (\sin 2x)' = \cos 2x(2x)' = 2\cos 2x, \quad y'' = 2\cos 2x;$$

$$y''' = (y'')' = (2\cos 2x)' = 2(\cos 2x)' = 2(-\sin 2x)(2x)' = -4\sin 2x.$$

Мисоли 3. Қонуни лаппиши гармоникӣ $x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ аст, ки дар он t – вақт, $\omega -$ зуддӣ, $\alpha -$ фаза ва A – амплитудаи лаппиш мебошанд. Нишон медиҳем, ки қонуни лаппиши гармоникӣ муодилаи

$$x''(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0$$

-ро қаноат мекунонад. (A, α, ω -доимианд).

Ҳосилаҳои $x'(t)$ ва $x''(t)$ -ро меёбем:

$$x'(t) = [A\cos(\omega t + \alpha)]' = A[\cos(\omega t + \alpha)]' = A[-\sin(\omega t + \alpha)] \cdot$$

$$\cdot (\omega t + \alpha)' = -A\sin(\omega t + \alpha)(\omega \cdot 1 + 0) = -A\omega\sin(\omega t + \alpha),$$

$$x''(t) = [x'(t)]' = [-A\omega \sin(\omega t + \alpha)]' = -A\omega[\sin(\omega t + \alpha)]' =$$

$$= -A\omega \cos(\omega t + \alpha)(\omega t + \alpha)' = -A\omega \cos(\omega t + \alpha)(\omega \cdot 1 + 0) =$$

$$= -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha), \qquad x''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha).$$

Инак,

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) + \omega^2 A \cos(\omega t + \alpha) =$$

$$= (-A\omega^2 + A\omega^2)\cos(\omega t + \alpha) = 0 \cdot \cos(\omega t + \alpha) = 0.$$

?

1. Мафҳуми ҳосилаҳои тартиби ду ва серо дар мисолҳои мушаххас фаҳмонед.
2. Дар зери истилоҳи "ҳосилаи тартиби олӣ" чиро мефаҳмед?
3. Лаппишҳои гармоникӣ кадом муодиларо қаноат мекунонад?

407. Аз қоидаи дифференсиронӣ ва ҷадвали ҳосилаҳои функсияҳо истифода бурда, ҳосилаи тартиби дуи функсияро ёбед:

а) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; б) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 4}$; в) $y = \dfrac{x^3}{x - 1}$;

г) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 4}$; д) $y = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$; е) $y = x^2 + 2tgx$.

408. Агар а) $f(x) = x^2 \cos x + x$; б) $f(x) = 3 + x^3 \sin x$;

в) $f(x) = x^5 + 2x^3 - 3x^2 + 4$; г) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 7x + 6$

бошад, он гоҳ $f'''(x)$ - ро ёбед.

409. а) $y = 5x^3 - 3x^2 + x + 1$ бошад, y''' -ро ёбед;

б) $y = 4x^8 - 5x^6 + 6x^4 - 7x^2 + 8$ бошад, y^V -ро ёбед;

в) $y = 6x^5 - 3x^3 + 7x + 2$ бошад, y^{VI} -ро ёбед;

г) $y = 7x^3 - 6x^2 + 4$ бошад, y'''-ро ёбед;

д) $y = 2x^6 - 6x^4 + 1$ бошад, y^{VI} -ро ёбед;

е) $y = 3x^3 - 5x + 11$ бошад, y''-ро ёбед;

ж) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + 4x - 11$ бошад, y'''-ро ёбед;

и) $y = x^5 - 3x + 81$ бошад, y^{IV} -ро ёбед.

410. Қимати ҳосилаи тартиби олиро дар нуқтаи додашуда ёбед:

а) $f(x) = 7x^3 - x + 12$, $f''(-2) - ?$; б) $f(x) = x^2 \sin x$, $f''(\pi) - ?$;

в) $f(x)=3\sin x,\ \ f''\left(\frac{\pi}{4}\right)-?;$ г) $f(x)=2\cos x,\ \ f''\left(\frac{\pi}{6}\right)-?;$

д) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1},\ \ f''(4)-?;$ е) $f(x)=3\sin x+4tgx,\ \ f''\left(\frac{\pi}{3}\right)-?.$

411. Қисми ростро ба намуди $A\cos\omega(\omega t+\alpha)$ табдил дода амплитуда, фаза ва зудии лаппишро ёбед:

а) $x(t)=0{,}32\sin\frac{t}{3}\cos\frac{5\pi}{6}+0{,}32\cos\frac{t}{3}\sin\frac{5\pi}{6};$

б) $x(t)=-3\left(\cos 2t\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2t\sin\frac{\pi}{4}\right);$

в) $x(t)=6\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos t-6\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin t;$

г) $x(t)=\frac{5\sqrt{3}}{2}\cos 3t-\frac{5}{2}\sin 3t.$

412. Оё функсияи

а) $x(t)=2\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$ ҳалли муодилаи $x''(t)+4x(t)=0;$

б) $x(t)=4\cos 3t$ ҳалли муодилаи $x''(t)+9x(t)+9=0;$

в) $x(t)=\frac{1}{3}\cos\left(0{,}1t+\frac{\pi}{4}\right)$ ҳалли муодилаи $x''(t)+\frac{x(t)}{100}=0$ аст?

Машқҳо барои такрор

413. Муодилаи зеринро (Региомонтан, асри XV) ҳал намоед:

а) $10x=x^2+\frac{100}{27};$ б) $y+\frac{1}{y}=25;$ в) $10x-60+\frac{10x-60}{x}=80.$

414. График насохта абсиссаҳои нуқтаҳои буришро бо тири $0x$ ёбед:

а) $y=3x^2-27;$ б) $y=4x-12;$ в) $y=3x^2+1;$ г) $y=x^3-\frac{1}{8}.$

415. Самти равиши шохаҳои параболаро ёбед:

а) $y=0{,}1x^2+3x;$ б) $y=-2x^2+5x+31;$ в) $y=3x^2+29;$

г) $y=-4x^2+5x+11;$ д) $y=1-3x-x^2;$ е) $y=3-8x+5x^2.$

416. Масъалае тартиб диҳед, ки матнаш ба ҳалли $(x>0)$ муодилаи $x^2+20x=150$ меорад.

417. Бо ёрии формулаҳои $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ қимати

а) $(81)^2$; б) $(39)^2$; в) $(8{,}9)^2$; г) $(229)^2$;

д) $(602)^2$; е) $(20{,}1)^2$; ж) $(51)^2$; з) $(399)^2$.

ёфта шавад.

418. Фосилаи афзуншавӣ ва камшавии функсияро ёбед:

а) $y = -3x^2 + 6x$; б) $y = 2x^2 + 4x + 11$;

419. Айниятро исбот кунед:

а) $\dfrac{1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} = ctg\alpha$; б) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \cos\alpha + \cos\dfrac{\alpha}{2}} = tg\dfrac{\alpha}{2}$.

420. Қимати ифодаи

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$$

ҳангоми $\sin\alpha - \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ будан, ёфта шавад.

421. Ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $\dfrac{x + 2\sqrt{x}}{1 + \cos x}$; б) $x^3 - 2x + tgx$; в) $(x^3 + 1) \cdot ctg\alpha$

422. Синну соли модар аз писараш дида 4 маротиба зиёдтар аст. Панҷ сол пеш ӯ 9 маротиба калонтар буд. Модару писар чанд солаанд?

Машқҳои иловагӣ ба боби IV.

Ба параграфи 8.

423. Барои функсияи маълуми $f(x)$ афзоиши Δf - ро дар нуқтаи x_0 ба воситаи x_0 ва Δx ифода кунед:

а) $f(x) = 2x^3 - x + 3,\ x_0 = 1$; б) $f(x) = x^2 - 3x + 2,\ x_0 = -2$;

в) $f(x) = 2x - x^2,\ x_0 = 3$; г) $f(x) = 3\sqrt{x},\ x_0 = 9$.

424. $f(x_0 + \Delta x)$, Δf ва $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$-ро ҳангоми

а) $f(x) = 1 - x^2,\ x_0 = 2$; б) $f(x) = 4\sqrt{x},\ x_0 = 4$;

в) $f(x)=2x^3$, $x_0=1$; г) $f(x)=2x+1$, $x_0=3$ будан ёбед.

425. Нисбати $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ - ро дар нуқтаи абсиссааш $\boldsymbol{x}_0$ барои функсияҳои

а) $f(x)=3x^2-4$; б) $f(x)=-\frac{4}{x}$; в) $f(x)=1-\sqrt{x}$

тартиб диҳед.

426. Суръати миёнаи нуқтаи материалии аз рӯи қонуни

а) $x(t)=9t+1$; б) $x(t)=2t^2-3t+1$

ҳаракаткунандаро дар $[t_0;t_0+\Delta t]$ ёбед.

427. Маълум, ки ҳангоми $x\to 3$ функсияҳои $f(x)$ ва $\varphi(x)$ мувофиқан ба 1 ва 5 майл мекунанд. инро ба назар гирифта, лимити функсия ёфта шавад:

а) $f^3(x)$; б) $\frac{f(x)-\varphi(x)}{f^3(x)}$; в) $\frac{f(x)\cdot\varphi(x)}{f(x)+\varphi(x)}$;

428. Лимитро ёбед:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2+1}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(3+x^3)$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{4-\sqrt{x}}{16-x}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1-2\cos x}{x+1}$.

429. Фосилаҳои бефосилагии функсияро ёбед:

а) $-3x^3+4x^5+2x-11$; б) $3x^2+13x-21$; в) $\frac{x^2+4}{x-1}$;

г) $\frac{x^4}{x^2-1}$; д) $\frac{3x}{x^2+3}$; е) $\frac{5x+1}{3}$.

430. Оё функсияи $f(x)$ дар нуқтаҳои додашуда бефосила мешавад:

а) $f(x)=3x^9-4x^5+23$, $(-\infty;+\infty)$;

б) $f(x)=3\sqrt{x}+9x$, $(1;4)$?

431. Маълум, ки $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ ва $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B$ аст. Нишон диҳед,

ки а) $\lim\limits_{x\to a}\{[f(x)]^2-[\varphi(x)]^2\}=A^2-B^2$;

б) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n=A^n$, $n\in Z$ мешавад.

Ба параграфи 9.

Аз алгоритми ёфтани ҳосилаҳо истифода бурда, $f'(x)$ -ро дар нуқтаи маълуми x_0 ёбед (№432-433)

432. а) $f(x)=4x-11,\ x_0=3;$ в) $f(x)=x^3,\ x_0=9;$

б) $f(x)=1-2x^2,\ x_0=1;$ г) $f(x)=2x^2+7,\ x_0=-1.$

433. а) $f(x)=\dfrac{2}{x+1},\ x_0=4;$ в) $f(x)=\dfrac{5}{x}+x^2+1,\quad x_0=2;$

б) $f(x)=7x+2\sqrt{x},\ x_0=1;$ г) $f(x)=x^3-\sqrt{x},\ x_0=1.$

434. Аз маънои механикии ҳосила истифода бурда, суръати ҷисми аз рӯи қонуни $S(t)$ ҳаракаткунандаро дар лаҳзаи вақти t_0 ёбед (S – бо метрҳо, t – бо сонияҳо):

а) $S(t)=9t^2-4t+3,\ t_0=3;$ б) $S(t)=\dfrac{1}{3}t^3-t+13,\ t_0=8.$

435. Қонуни ҳаракат бо формулаи $S(t)=0{,}5t^2+2t-1$ (S – бо метрҳо, t – бо сонияҳо) муайян гаштааст. Ҷисм дар муддати 5 сония кадом масофаро тай мекунад? Суръати он дар ҳамин лаҳзаи вақт ба чӣ баробар аст?

Ба параграфи 10.

Ҳосилаи функсияҳоро ёбед (№436-437):

436. а) $\dfrac{2}{x}+7x-31;$ б) $9x^3-8\sqrt{x};$

в) $4x^2+3\sqrt{x}-2x+19;$ г) $1-2x+3x^2+4x^3.$

437. а) $x^3+\sqrt{x};$ б) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x^2}+\sqrt{x};$

в) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{4}{x^2}+7;$ г) $2x^2+3x^3-1.$

438. $f'(2)$ - ро ҳангоми

а) $f(x)=9x^2+5;$ б) $f(x)=2-3x^3;$

в) $f(x)=3x^2-19x+8;$ г) $f(x)=3-4x^2+9x^3$

будан ёбед.

Ҳосилаи функсияҳоро ёбед (439-440):

439. а) $(x^3-x)(x^2+x)$; б) $\sqrt{x}(x-1)$; в) $x(1+\sqrt{x})$; г) $x^2(x+1)$.

440. а) $x^2\sqrt{x}$; б) $x^2(x^2-2x+4)$; в) $x^3(x^2+1)$; г) $(\sqrt{x}-1)(x-1)$.

441. $f'(4)$ - ро ҳангоми

а) $f(x)=3x^2\cdot\sqrt{x}$; б) $f(x)=(x^3-1)(x+1)$

будан, ёбед.

Ҳосилаи функсияро ёбед (№442-443);

442. а) $\dfrac{x-1}{x+1}$; б) $\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$; в) $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-x+2}$; г) $\dfrac{x^3}{x^2-3x+2}$.

443. а) $\dfrac{x^2}{x+13}$; б) $\dfrac{x+11}{x^3}$; в) $\dfrac{7}{x^2}$; г) $\dfrac{3}{x^3}$.

444. $f'(1)$ - ро ҳангоми

а) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}-\dfrac{1}{11}$; б) $f(x)=\dfrac{2x^2}{1-7x}+3$

будан, ёбед.

Ҳосилаи функсияи $f(x)$ -ро дар нуқтаҳои нишондодашуда ёбед (445-447)

445. $f(x)=x^3-2x+5$;

а) 0; б) 2; в) x_0; г) a+1;

446. $f(x)=2\sqrt{x}$;

а) 1; б) 4; в) 9; г) a.

447. $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$;

а) 2; б) -3; в) 4; г) x_0.

448. Муодилаи $f'(x)=0$ - ро ҳангоми

а) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2x$; б) $f(x)=x^2+4x$;

в) $f(x)=x^5-x^3-2x$; г) г) $f(x)=x^3+4,5x^2$

будан, ҳал кунед.

449. Нобаробарии $f'(x)>0$ - ро ҳангоми

а) $f(x)=1+3x-5x^2$; б) $f(x)=x^2+2x$; в) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+3}$;

г) $f(x)=(x-1)(x-2)$; д) $f(x)=x(x^2-9)$
будан, ҳал кунед.

450. Нобаробарии $f'(x)<0$ - ро ҳангоми

а) $f(x)=x^4+2x^2-1$; б) $f(x)=\frac{2}{3}x^3-8x+\frac{101}{18}$;

в) $f(x)=x^4+4x-3$; г) $f(x)=\frac{1-x}{x+3}$;

д) $f(x)=x^3-6x^2-63x+91$
будан, ҳал кунед.

451. Барои функсияҳои
а) $f(x)=x^3-3x$ ва б) $f(x)=\sqrt{3}x^2-2$
муодилаю нобаробариҳои $f'(x)=0$, $f'(x)>0$ ва $f'(x)<0$ - ро тартиб дода, онҳоро ҳал кунед.

452. Барои кадом қиматҳои x қимати ҳосилаи функсияи $f(x)=7x^2+x+19$ ба 15 баробар аст.

Ба параграфи 11.

Ҳосилаи функсияҳоро ёбед (№453-454);

453. а) x^{11}; б) $5x^8$; в) x^{-7}; г) $2x^{-4}$; д) $2x^5+x^4-5x^3+3x^2-x+7$;

е) x^4-x^2+18; ж) $\frac{x^n}{n}-\sqrt{x}$.

454. а) $x^n\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{x}$; б) $x^{-3}+x^3$; в) $(x^4+1)\cdot\sqrt{x}$; г) $x^7(\sqrt{x}-2)$;

д) $\frac{x^4}{x^2-1}$; е) $\frac{x^5-1}{x+1}$; ж)* $\frac{2}{x\sqrt{x}}-\sqrt{x^3}$; з)* $2\sqrt{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x^2}$.

455. $f'(2)$ - ро ҳангоми

а) $f(x)=9-x^2$; б) $f(x)=\frac{3}{x^4}$;

в) $f(x)=x^{-5}$; г) $f(x)=x^6+1$
будан, ёбед.

456. Аз рӯи функсияи мураккаби $F(x)=g[f(x)]$ функсияҳои $g(u)$ ва $u=f(x)$ -ро муайян намоед:

а) $F(x)=(7x+11)^9$; б) $F(x)=\dfrac{1}{(x+15)^{15}}$;

в) $F(x)=\sin\left(9x^2-\dfrac{\pi}{3}\right)$; г) $F(x)=\cos^6 x$.

Ҳосилаи функсияро ёбед (457-460)

457. а) $(3x-10)^{23}$; б) $(x-2)^{70}$; в) $(7x-4)^{101}$.

458. а) $\dfrac{1}{(3+5x)^{11}}$; б) $\dfrac{4}{(1+2x)^{29}}$; в) $-\dfrac{1}{(3x+2)^{99}}$.

459. а) $\sqrt{25-x^3}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$; в) $\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}$.

460. а) $x^{\sqrt{2}}+3x$; б) $(x+1)^{\sqrt{3}}$; в) $x^{\sqrt{5}}-8$.

461. Ҳосилаи функсияи $y=(x^3+2x^2+3x-4)^3$ - ро дар нуқтаҳои $x=1$ ва $x=2$ ёбед.

462. Ҳосилаи функсияи $S(t)=\sqrt{t^2+1}$ - ро дар нуқтаҳои $t=0$ ва $t=3$ ёбед.

463. $f(x)=(2x+3)^2$. Дар кадом қиматҳои x $f'(x)=f(x)$ мешавад?

464. Дар кадом қиматҳои x ҳосилаи функсияи $y=x^2$ ба 32 баробар мешавад?

Ба параграфи 12.

465. Ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $\sin x+3tgx$; б) $2+\sin x$; в) $1+ctgx$;

г) $3\cos x(1-\sin x)$; д) $\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{2}{\sin x}$; е) $\dfrac{4\cos x}{1+\sin x}$.

466. Ҳосилаи функсияҳои тригонометриро ёбед:

а) $\sin\dfrac{3x}{5}+2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$; б) $2tg(1+x)-3ctg\dfrac{x}{2}$;

в) $5+\sin^2 x$; г) $3-\cos^3 x$;

д) $\dfrac{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1+\cos x}$; е) $\dfrac{2\sin 2x}{1+\cos^2 x}$.

467. Ҳосилаи функсияро дар нуқтаи x_0 ҳангоми

а) $f(x) = 5\sin x - 2tgx,\qquad x_0 = \frac{\pi}{4};$

б) $f(x) = 4x - \cos 2x,\qquad x_0 = \frac{\pi}{6};$

в) $f(x) = x^3 + 3ctgx,\qquad x_0 = \frac{\pi}{3};$

г) $f(x) = \frac{2+\sin x}{2-\sin x},\qquad x_0 = \frac{\pi}{2};$

будан, ёбед.

468. Муодилаи $f'(x) = 0$ - ро ҳал кунед:

а) $f(x) = 4\cos^3 x - 9\cos x;$

б) $f(x) = 2\sqrt{2}\cos^3 x - 3\left(1+\sqrt{2}\right)\cos x;$

в) $f(x) = x - \cos 2x;$ г) $f(x) = -3\cos x - x.$

469. Нобаробарии $f'(x) > 0$ - ро ҳал кунед, агар

а) $f(x) = \frac{1}{2}x - \cos x;$ б) $f(x) = 2\sin x - x$

ва нобаробари $\varphi'(x) < 0$ - ро ҳал кунед, агар

в) $\varphi(x) = \sin x - \frac{1}{2}x;$ г) $\varphi(x) = 4\sin\left(\frac{x}{4} - 1\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}x$ бошад.

470. Барои функсияҳои

а) $f(x) = x - 2\sin x$ ва б) $f(x) = \sqrt{3}x - 2\cos^2 x$

муодилаю нобаробариҳои $f'(x) = 0,$ $f'(x) > 0$ ва $f'(x) < 0$ - ро тартиб дода онҳоро ҳал кунед.

471. Ҳосилаи функсияи $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x}$ - ро дар нуқтаҳое ёбед, ки қимати $f'(x)$ ба 0 баробар бошад.

472. Агар $f(x) = x\sin x$ ва $x_0 = \pi$ бошад, он гоҳ қимати ифодаи $2f'(x_0) + 3f(x_0) - 7$ ба чӣ баробар мешавад?

473. $f(x) = \sin\sqrt{3}x.$ Барои кадом x – ҳо $f'(x) = f(x)$ мешавад?

474. Оё муодилаи $f'(x) = 2,$ ки $f(x) = \sin x$ аст, ҳал дорад?

Ба параграфи 13.

475. Аз қоидаҳои дифференсиронӣ ва ҷадвали ҳосилаҳо истифода бурда, ҳосилаи тартиби дуи функсияро ёбед:

а) $y = \dfrac{x+1}{x-42}$; б) $y = (2x+1)tgx$; в) $y = 2\sin^2 x + 3\cos 2x$.

476. Ҳосилаи тартиби нишондодашударо аз функсияҳои зерин ёбед:

а) $f(x) = x^3 - x\cos x,$ $\quad y''' - ?;$

б) $f(x) = 9x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 23x - 19,$ $\quad y^{IV} - ?;$

в) $f(x) = \dfrac{1}{7}x^7 - \dfrac{1}{6}x^6 + \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{4}x^4 + x,$ $\quad y^{VI} - ?;$

г) $f(x) = 9x^8 + 11x^6 - 13x^4 + 41x - 3,$ $\quad y^{VII} - ?.$

477. Ҳосилаи тартиби талабшудаи функсияи $f(x)$ - ро дар нуқтаи додашудаи x_0 ёбед:

а) $f(x) = (x^3 - 5)\cos x,$ $\quad f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - ?;$

б) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + x - 1,$ $\quad f'''(2) - ?;$

в) $f(x) = 2x^6 + 3x^4 + x,$ $\quad f^{V}(3) - ?;$

г) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x},$ $\quad f^{IV}(1) - ?.$

478. Оё функсияи

а) $x(t) = 7\cos\left(0{,}1t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ ҳалли муодилаи $x''(t) + 0{,}01x(t) = 0;$

б) $x(t) = \dfrac{1}{3}\sin\left(4t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ ҳалли муодилаи $x''(t) + 16x(t) = 0$ аст?

479. Фарз мекунем, ки $y = \sqrt{2x - x^2}$ бошад. Исбот кунед, ки айнияти $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$ ҷой дорад.

480. $y = x^2 - 2x + 2$. Ҳамаи қиматҳои x – ро ёбед, ки барояш ифодаи $y'' + y' - 3y$ ба 0 баробар шавад.

481. $f(x) = \sin x$. Нишон диҳед, ки айнияти $f'''(x) + f(x) = 0$ ҷой дорад.

482. Ҷадвали зеринро пур кунед:

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(1)$
$(x+2)^{-8}$			
$\frac{3}{x^2}$			
$\sin\frac{\pi}{2}x$			

483. $f(x)=2x^2-x$. Гарфики функсияҳои $f(x)$, $f'(x)$ ва $f''(x)$ - ро дар як ҳамвории координатӣ кашед.

484. $f(x)$ ба x^3 баробар буданашро ба ҳисоб гирифта баробарии $3f'(x)=f''(x)+3$ - ро табдил диҳед ва муодилаи ҳосилшударо бо тарзи графикӣ ҳал кунед.

Ҷавобҳо

285. а) (2,98; 3,02); б) (1,5; 2,5); в) (3,99; 4,01); г) (-1,3; -0,7). **286.** а) $x=1{,}1,\ \Delta y=0{,}2$; б) $x=2{,}01,\ \Delta y=0{,}02$; в) $x=3{,}02\ \ \Delta y=0{,}04$; г) $x=4{,}03,\ \Delta y=0{,}06$; д) $x=4{,}12,\ \Delta y=0{,}24$; е) $x=5{,}02,\ \Delta y=0{,}04$. **287.** а) $\Delta x=0{,}1,\ \Delta y=0{,}41$; б) $\Delta x=-0{,}4,\ \Delta y=-2{,}24$; в) $\Delta x=0{,}2,\ \Delta y=1{,}06$; г) $\Delta x=-0{,}1,\ \Delta y=0{,}51$; д) $\Delta x=0{,}1,\ \Delta y=0{,}81$; е) $\Delta x=0{,}3,\ \Delta y=5{,}49$. **288.** а) $\Delta y=-\frac{1}{3606}$; б) $\Delta y=-\frac{1}{2457}$; в) $\Delta y=-\frac{1}{102}$; г) $\Delta y=-\frac{1}{84}$; д) $\Delta y=-\frac{1}{105}$; е) $\Delta y=-\frac{1}{363}$; ж) $\Delta y=\frac{1}{3549}$; з) $\Delta y=\frac{1}{228}$. **289.** а) $2\cdot\Delta x$; б) $\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta x}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$; в) $-2x_0\cdot\Delta x-(\Delta x)^2$; г) $2(1-x_0)\cdot\Delta x-(\Delta x)^2$; д) $2(x_0-2)\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$; е) $(6x_0^2-1)\Delta x+6x_0(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3$; ж) $3x^2\cdot\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$; з) $2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$.

290.

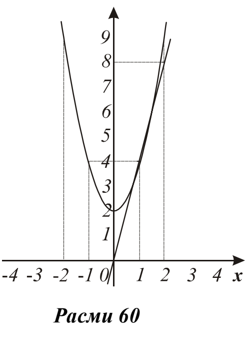
$f(x)$	x	x^2	$ax+b$	ax^2+bx+c	x^3
$f(x_0+\Delta x)$	$x_0+\Delta x$	$(x_0+\Delta x)^2$	$a(x_0+\Delta x)+$ $+b$	$a(x_0+\Delta x)^2+$ $b(x_0+\Delta x)+$ $+c$	$(x_0+\Delta x)^3$
Δy	Δx	$2x_0\Delta x+$ $+(\Delta x)^2$	$a\cdot\Delta x$	$(2ax_0+b)\Delta x+$ $a(\Delta x)^2$	$3x_0^2\Delta x+\Delta x)^3+$ $+3x_0(\Delta x)^2$
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	1	$2x_0+\Delta x$	a	$2ax_0+b+$ $a\cdot\Delta x$	$3x_0^2+3x_0\Delta x+$ $+(\Delta x)^2$

291. а) 4,1; б) 4,01; в) 4,001; г) 3,9; д) 3,99, е)3,999 **292.** а) 3,31; б) 3,0301; в) 3,003001; г) 2,71; д) 2,9701; е) 2,997001. **293.** $\Delta P = 0{,}6$ м; $\Delta S = 5{,}42$ м^2. **294.** $\Delta S = 6(2x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$; а) $\Delta S = 5{,}04$(вох^2); б) $\Delta S = 0{,}03606$(вох^2). **295.** $\Delta V = (3x^2+3\Delta x+\Delta x^2)\Delta x$; а) $\Delta V = 0{,}33$ вох. кубӣ; б) $\Delta V = 2{,}648$ вох. кубӣ; **296.** а) $\Delta f = (3x^2-2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x^2))\cdot\Delta x$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 3x^2-2+3x\cdot\Delta x+\Delta x^2$; б) $\Delta f = \dfrac{-7(2x+\Delta x)\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{-7(2x+\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}$; в) $\Delta f = \dfrac{2(\Delta x-2x)\Delta x}{(x^2-1)[(x+\Delta x)^2-1]}$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2(\Delta x-2x)}{(x^2-1)[(x+\Delta x)^2-1]}$; г) $\Delta f = \dfrac{-3(2x+\Delta x)\Delta x}{(x^2-1)[(x+\Delta x)^2+1]}$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{-3(2x+\Delta x)}{(x^2-1)[(x+\Delta x)^2+1]}$; д) $\Delta f = \left[\dfrac{1}{x(x+\Delta x)}\right]\cdot\Delta x$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{1}{x(x+\Delta x)}$; е) $\Delta f = \left[1-\dfrac{1}{x^2(x+\Delta x)^2}\right](2x+\Delta x)\cdot\Delta x$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \left[1-\dfrac{1}{x^2(x+\Delta x)^2}\right](2x+\Delta x)$; **297.** а) 3; б) -3; в) $v_0+gt_0-\dfrac{g\Delta t}{2}$; г) $-gt_0-\dfrac{gt\Delta t}{2}$.

298. $v_м = 1,5$; $v_м = 1$; $v_м = 0,5$. **299.** а) $x=3$; б) $x_1 = 1; x_2 = -\dfrac{7}{2}$; в) $x_1 = 3; x_2 = 8$; г) $x = 0; (x \ne \pm 1)$. **300.** а) (2;1); б) (8;4); (-8; -4). **302.** а) $x = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; б) $x = \dfrac{\pi n}{3}$, $x = \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

304. а) ҷуфт; б) тоқ; в) на ҷуфт аст на тоқ. **305.** 10 см, 7 см. **306.** 10 соат ва 15 соат – ҳангоми гуногун будани иқтидори борбардории мошинҳо; 12 соат – ҳангоми якхела будани иқтидори борбардорӣ.

<u>307.</u> а) -1; б) 8; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{4}{3}$; е) $\frac{1}{3}$; ж) $\frac{1}{2}$; з) 2; и) $\frac{2}{\pi}$. **<u>308.</u>** а) 81; б) $\frac{13}{81}$; в) $\frac{11}{5}$. **<u>309.</u>** а), б), е) ва з) $(-\infty;+\infty)$; в) $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$; г) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$; д) дар тамоми тири ададӣ ба ғаёр аз нуқтаҳои 0; ± 2; ж) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **<u>310.</u>** а) ҳа; б) дар нуқтаҳои $[0;+\infty)$ бефосила, вале дар $(-4;0)$ бефосилагиаш вайрон мешавад; в) дар нуқтаҳои $x=3;4\in(-\infty;5)$ бефосила шуда наметавонад. **<u>311.</u>** а), г) е) ҳа; б), д) дар нуқтаҳои x_2 бефосила намешавад; в) дар нуқтаи x_1 бефосила нест. **<u>313.</u>** а) $x=0$; б) $x=1$. **<u>314.</u>** $a<-3,\ -3<a<0, 0<a<1$. **<u>315.</u>** 20 км/соат. **<u>316.</u>** 20%. **<u>317.</u>**а)$-\frac{\sqrt{2}+9}{2}$. **<u>319.</u>** а) $-\frac{65}{63}$; б) $\frac{22}{21}$. **<u>320.</u>** а) 1; б) $-\frac{1}{\cos\alpha}$. **<u>321.</u>** а) 1; $-\frac{7}{3}$; б) 2; 1. **<u>322.</u>** а) $\frac{3}{2}$; б) 1. **<u>324.</u>** 1), 2) $v_м=2$. **<u>325.</u>** 1) $v_м=3$; 2) $v_м=6{,}1$. **<u>326.</u>** а) 5; б) $6t$. **<u>327.</u>** а) $v(3)=9$; б) $v(6)=21$. **<u>328.</u>** а) 6,005; б) 6,006002; в) $-\frac{70}{19}\approx-3{,}6842105...$; г) $48{,}2604$. **<u>329.</u>** а) $2x+6x^2$; б) $2x+3$; в) 5; г) $-6x$; д) 4; е) $3x^2$; ж) **Нишондод.** Барои x – ҳои ғайринулӣ $\Delta\varphi=\Delta x\left[1-\frac{3}{x(x+\Delta x)}\right]$ мешавад. Аз он $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=1-\frac{3}{x(x+\Delta x)}$ - ро ҳосил мекунем. Дар зинаи охирини алгоритм мебинем, ки ҳангоми $\Delta x\to 0$ нисбати $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ ба $1-\frac{3}{x^2}$ майл мекунад. Ҷавоб: $\varphi'(x)=1-\frac{2}{x^2}$, $x\neq 0$; з) **Нишондод.** Дар ин ҷо $\Delta\psi=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}-2x\cdot\Delta x-(\Delta x)^2$ мешавад. Зинаи ояндаи алгоритм ба $\dfrac{\Delta\psi}{\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}-2x-\Delta x$ оварда мерасонад. Ниҳоят, ҳангоми $\Delta x\to 0$ $\dfrac{\Delta\psi}{\Delta x}\to\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-2x$ - ро ҳосил мекунем, ки он $\psi'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-2x$; и) $g'(x)=1-\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$; к) $g'(x)=1-4x+9x^2$. **330.** а) $f(100)=f'(-11)=a$; б) $f'(4)=\dfrac{1}{4}$; $f'(625)=\dfrac{1}{50}$; в) $\varphi'(-3)=-\dfrac{1}{9}$, $\varphi'(5)=-\dfrac{1}{25}$; г) $g'(6)=108$; $g'(-1)=3$. **331.** Расми 60. **332.** а) $x=1$; б) $x=\dfrac{1}{16}$. **333.** а) $x_1=0$; $x_2=1$; б) $x=-\dfrac{1}{3}$. **336.** а) $4x-1$; б) x^2-2x+2; в) x^2+2; г) x^2-3. **337.** а), г) – ҷуфт; б), в) – тоқ. **338.** а) $-\dfrac{1}{2}$; б) $-\dfrac{1}{3}$. **339.** а) $\sin 2\alpha$; б) $tg 2\alpha$. **340.** **Нишондод.** Пайдарпаии ададҳои натуралии ҷуфти 2;4;6;...;$2n$ прогрессияи арифметикиро бо фарқи $d=2$ ташкил медиҳад. Аз баски $a_n=2n$ аст, пас $a_1=2$ ва $a_{60}=120$ мешавад. Аз ин ҷо $2S_{60}=(2+120)\cdot 60$, $S_{60}=61\cdot 60=3660$. Ҷавоб: 3660. **341.** а) $x_1=-1$; $x_2=2$; $x_3=-3$; б) $x=-3$. **342.** **Нишондод.** Агар касри матлуби дурустро дар шакли $\dfrac{x}{y}$ гирем, онгоҳ шарти масъала ба ҳалли системаи $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12} \end{cases}$ оварда мерасонад. Ҳалҳои система (3;4), (4;3), (–3;–4) ва (–4;–3) мешавад. Ҷавоб: $\dfrac{3}{4}$. **343.** а) $\dfrac{4}{9}$; б) $2\dfrac{5}{99}$; в) $-4\dfrac{3}{11}$; г) $\dfrac{3}{11}$.



Расми 60

344. не; **345.** а) 1 ва $2x+2$; б) 1 ва $2x-1$; в) -1 ва $-2x-2$; г) 0 ва b. **346.** а) $3x^2+2x$; б) $3x^2-2x$; в) $3x^2$; г) $2x$; д) $2x-4$; ж) $3x^2+2x$

з) $2x+3x^2$; и) $1-\frac{1}{x^2}$; к) $3x^2-\frac{1}{x^2}$; л) $1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$; м) $\frac{1}{2\sqrt{x}}-2x$. **347.** а) $f'(1)=0,\ f'(9)=16$; б) $f'(1)=3,\ f'(9)=243$; в) $f'(1)=1,$ $f'(19)=17$; г) $f'(1)=9,\ f'(9)=249$; д) $f'(1)=\frac{3}{2}\ f'(9)=\frac{29}{162}$; е) $f'(1)=-3,\quad f'(9)=-\frac{1459}{81}$; ж) $f'(1)=-\frac{1}{2},\quad f'(9)=\frac{25}{162}$; з) $f'(1)=2,\quad f'(9)=\frac{19682}{81}$. **348.** а) $x=1{,}5$; д) $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. **349.** а) $-6x^5+2x$; б) $\frac{3x+11}{2\sqrt{x}}$; в) $3x^2\cdot\sqrt{x}+3x^2+\frac{x^3}{2\sqrt{x}}$; г) $3x^2-2x+1$. **350.** а) 3; б) 2; в) 4; г)1. **351.** а) $\frac{1}{(x+3)^2}$; б) $-\frac{13}{(2x+1)^2}$; в) $-\frac{20}{(3x-10)^2}$. **352.** а) $\frac{x^2-2x+8}{(x+1)^2}$; б) $\frac{1-x^2}{(x+1)^2}$; в) $-\frac{1+3x^2}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2}$; г) $\frac{3x^2+4}{2x\sqrt{x}}$. **353.** а) $\frac{8}{25}$; в) $\frac{1}{4}$. **354.** $x_1=0,\ x_2=-2$. **355.** $x=0$. **356.** а) $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; б) $x>\frac{11}{4}$. **357.** а) $x<2$; б) $0<x<\frac{1}{3}$; в) $x\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$. **358.** а) $3x$; б) $\frac{3}{2}x^2+2x$; в) x^3-2x; г) $5x+\frac{2}{x}$. **359.** 5,8. **360.** 4,9. **361.** $x_1=1$; $x_2=4{,}5$; в) $x=3$; г) $x=-4$. **362.** а) $(1;2),(2;1)$; б) $\left(\frac{6}{13};-\frac{6}{11}\right)$. **363.** а) $(5;-10)$; б) $\left(\frac{5}{4};-\frac{1}{8}\right)$. **364.** $a_1=1,\ d=-2$. **365.** 400 км/соат, 320 км/соат. **367.** а) $5x^4$; б) $11x^{10}$; в) $13x^{12}$; г) $103x^{102}$; д) $(n+1)x^n$; е) $-\frac{2}{x^3}$; ж) $-\frac{4}{x^5}$; з) $-\frac{7}{x^8}$; и) $-\frac{15}{x^{16}}$; к) $\frac{1-n}{x^n}$; л) $\frac{3}{5x^{\frac{2}{5}}}$; м) $\left(1+\sqrt{3}\right)\ x^{\sqrt{3}}$; $\left(\sqrt{5}-4\right)x^{\sqrt{5}-5}$ **368.** а) $-\frac{3}{64}$; б) 110; в) $26\frac{26}{27}$; г) -30.

369. а) $x_{1,2}=\pm 2$; б) $x=\pm 1$; в) $x=0$; г) $x_{1,2}=0,\ x_3=\frac{3}{4}$; д) $x=-1$; е) $x=0,\ \ x_{2,3}=\pm\sqrt{6}$. **370.** а) $11x^{10}+9x^8$; б) $9x^8-7x^6+4x^3+2x$; в) $\frac{5x^{11}+3x^3+6}{x^7}$; г) $\frac{-64x^7-32x^5+4x^4-4x^3+15x^2-3}{\left(1+4x^2\right)^2}$; д) $\frac{2x^5-16x^3+6x}{\left(x^2+4\right)^2}$; е) $24x^{11}-40x^5+9x^8-6x^2+4$. **371.** а) x^3+4x; б) $\frac{5}{10}x^{10}+\frac{2}{3}x^6-\frac{3x^2}{2}$; в) $\frac{3}{x}+2x$; г) $\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}$. **372.** а) $g=\sqrt{u};\ \ u=1-\cos x$; б) $g=u^2$; $u=2\sin x+3$; в) $g=\sin u; u=3x-\frac{\pi}{4}$; г) $g=tgu;\ u=\frac{2}{x}$; д) $g=u^5;\ u=3x-11$; е) $g=\arcsin u;\ \ u=\frac{x-3}{2}$; ж) $g(u)=u^9;\ u=1+7x$; з) $g(u)=\sqrt{u}$; $u=\sin x$; и) $g(u)=u^3;\ \ u=1+\cos x$; к) $g=ctgu;\ \ u=x^2-x+3$.

373. а) $2\sqrt{x^2+1}$; б) $4x+1$; в) $\frac{2}{\sqrt{x}}$; г) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; д) $1+\frac{1}{x^2}$; е) $\frac{1}{x^2+1}$.

374. а) $|x|\le\frac{1}{2}$; б) $x\in(-\infty;-0{,}4]\cup[0{,}4;+\infty)$; в) $|x|\le 5$; г) $x>1$; д) $-\frac{\pi}{3}+2n\pi<x<\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ \ n\in Z$; е) $\frac{\pi}{4}+n\pi<x<\pi+n\pi,\ \ n\in Z$; ж) $-\frac{5\pi}{8}+n\pi\le x\le\frac{\pi}{8}+n\pi,\ \ n\in Z$; з) $-\frac{3\pi}{2}+2n\pi\le x\le-\frac{\pi}{6}+2n\pi$, $n\in Z$; и) $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$; к) $x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2};+\infty\right)$. **375.** а) $21(11+x)^{20}$; б) $-36(9x+23)^{-5}$; в) $-(0{,}1x-1)^{11}$; г) $\frac{1}{2\sqrt{x+3{,}2}}$; д) $-\frac{1}{\sqrt{9-2x}}$; е) $-\frac{3}{2\sqrt{3x-91}}$; ж) $\frac{1}{\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{x}{2}+13}}$; з) $an(ax+b)^{n-1}$; и) $-an(ax+b)^{-n-1}$. **376.** а) $\frac{5x}{\sqrt{5x^2-27}}$; б) $\frac{x+5}{\sqrt{x^2+10x-61}}$;

г) $\dfrac{12x^2}{\sqrt{8x^3+5}}$; д) $\dfrac{x^3}{2\sqrt{0,25x^4+2}}+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$; е) $\dfrac{akx^{k-1}+b}{2\sqrt{ax^k+bx+c}}$.

377. а) $-3x^2+134x-393$; б) $8(2x+5)^3-21(3x-1)^6$;

в) $54(3x^2+7x+11)^{53}\cdot(6x+7)$; г) $206x(x^2-3)^{102}$;

д) $\dfrac{-x^4+4x^3+2x^2+4x+3}{(1-x)^4}$; е) $\dfrac{x(x^3-7)^2(5x^3-9x+28)}{(x^2-1)^3}$.

378. а) $\dfrac{a+2}{a-1}$; б) $\dfrac{a^2+1}{a-1}$. **379.** а) **Нишондод.** Нобаробариро аввал $(x^2-4)(x^2-1)(x^2+1)(x^2+9)>0$ ва баъд ба намуди $(x-2)(x+2)(x+1)(x-1)>0$ овардан мумкин аст; б) Нобаробариро ба намуди $(x^2-1)(x-5)(x^2-9)(x+2)>0$ оварда бо ёрии методи интервалҳо ҳал кардан мумкин аст. **381.** 52°; 76°. **382.** а) $b_4=125$; $S_4=156$; б) $b_5=81$; $S_5=61$. **383.** б) (1;3), (-1; -3). **384.** Бигузор дар мусобиқа x шоҳмотбоз иштирок карда бошад. Онгоҳ яке аз ин шоҳмотбозон бо дигарҳояш $(x-1)$ бозӣ мекунад. Аз $(x-1)$ шоҳмотбози боқимонда якеаш бо дигаронаш як маротибӣ бозӣ карда $(x-2)$ вохурӣ мегузаронад. Возеҳ аст, ки дар охир ду шоҳмотбоз мемонаду бо якдигар як бозии финалӣ мегузаронанд. Дар асоси муҳокимарониҳо прогрессияи арифметикии $x-1$; $x-2;...3;2;1$ - ро ҳосил мекунем, ки суммаи аъзоҳояш мувофиқи шарти масъала ба 78 баробар аст. Пас, дар асоси формулаи суммаи аъзоҳои прогрессияи арифметикӣ $78=\dfrac{(x-1)+1}{2}\cdot(x-1)$ ва аз он муодилаи $x^2-x-156=0$ - ро ҳосил мекунем, ки решаи мусбаташ $x=13$ аст. Ҷавоб: 13 шоҳмотбоз. **385.** а) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{45}{x^6}$; б) $4x^3-3x^2+3$;

в) $\dfrac{18x^6+15x^4+4x}{\left(1+2x^2\right)^2}$; г) $6x^5+\dfrac{5}{x^2}$; д) $\dfrac{5}{2}x\sqrt{x}+\dfrac{7}{2\sqrt{x}}+2x$; е) $\dfrac{7x^3+1}{2\sqrt{x}}$.

<u>386.</u> не. **<u>387.</u>** а) $2+3\cos x$; б) $-2\sin x$; в) $3\cos x-2\sin x$; г) $\dfrac{3}{\cos^2 x}$; д) $-\sin x+\dfrac{2}{\cos^2 x}$; е) $\cos x-\dfrac{3}{\sin^2 x}$; е) $\cos x-\dfrac{3}{\sin^2 x}$; ж) $\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{4}{\sin^2 x}$; з) $2\cos 2x$; и) $-3\sin 3x$; к) $-6\cos 8x$; л) $5\cos\dfrac{5x}{2}$; м) $10\sin(-2x)$; н) $x-\cos x$. **<u>388.</u>** а) $-2\sin\dfrac{2x}{7}$; б) $6\sin 1{,}5x$; в) $-\dfrac{1}{10}\sin(-0{,}3x)$; г) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{5}{\cos^2 x}$; д) $-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$;

е) $2x-\dfrac{2}{\cos^2 10x}$; ж) $-\dfrac{4}{5\cos^2(-4x)}$; з) $-\dfrac{3}{\sin^2 3x}$; и) $-\dfrac{13}{\sin^2(-10x)}$; к) $3-\dfrac{32}{\sin^2 8x}$; л) $-\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{x}{4}}-10x^9$. **<u>389.</u>** а) $-3\sin x$; б) $6\sin 3x$;

в) $-\cos 10x$; г) $20\cos 4x$; д) $2\cos\dfrac{x}{3}$; е) $1{,}5\sin 0{,}5x$. **<u>390.</u>** а) $2\sec^2(x-4)$; б) $6\sec^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-2x\right)$; в) $-5ctg(x+1)\cos ec(x+1)$; г) $-6\cos ec^2\left(\dfrac{3}{2}x-5\right)$; д) $(x-2)\cos ec^2(2\pi-4x+x^2)$; е) $1+\dfrac{\cos(1-x)}{10\sin^2(1-x)}$. **<u>391.</u>**

а) $f'(0)=3$; $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-3-\sqrt{2}$; $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)$;

б) $f'(0)=2$; $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=4+\dfrac{\pi}{2}$; $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2}{3}(4+\pi)$; в) $f'(0)=0$; $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$; $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{2}$; г) $f'(0)=1$; $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$; $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$; д) $f'(0)=-1$; $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$; $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}$;

е) $f'(0)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=8;$ $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{28}{3}$. **392.** а) $x^3(3\sin x+x\cos x)+\cos x;$ б) $\sin x+x\cos x+\frac{1}{3}\sec^2 x;$ в) $4\cos ec^2(2x);$ г) $-\sin x(\sin x+2x\cos x);$ д) $-4ctgx\cos ec^2 x;$ е) $2+\sin 2x;$ ж) $-\frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2};$ з) $-\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2};$ и) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\cos x+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\sin x.$ **393.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+n\pi,\ n\in Z;$ б) $x=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+2k\pi,;$ $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2k\pi,$ $k\in Z;$ в) $x=n\pi,$ $n\in Z;$ г) $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z;$ д) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z;$

е) $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n,\ \ n\in Z.$ **394.** а) $2n\pi<x<(2n+1)n\pi,\ \ n\in Z;$ $-\frac{\pi}{3}+2n\pi<x<\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ \ \ n\in Z;$ в) $\frac{7}{24}\pi+n\pi<x<\frac{25\pi}{24}+n\pi,$ $n\in Z;$ г) $2k\pi<x<(2k+1)\pi,\ \ \ k\in Z.$ **395.** а) $x^3-tgx;$ б) $x^2-\sin 3x;$ в) $\sin x-3\cos x;$ г) $\sin x-3\sqrt{x};$ д) $x+\sin x;$ е) $2x+\cos x.$ **396.** $6+\frac{7\pi}{2}$. **398.** **Нишондод.** Шарти масъала ба ҳалли муодилаи $\frac{120}{x}+\frac{232}{x-2}=6$ оварда мерасонад, ки дар он x суръати аввалаи мошини боркашро ифода мекунад. **399.** а) $x=5,\ y_{\min}=1;$ б) $x=3,\ y_{\max}=5.$ **400.** **Нишондод.** Хати каҷ тири $0x$ – ро ҳангоми y=0 будан буриданаш мумкин аст. Вале дар ин ҳолат муодилаи $x^2-9y^2+4y+1=0$ ба $x^2+1=0$ табдил меёбад, ки он решаҳои ҳақиқӣ надорад. Ҷавоб: Хати каҷ тири $0x$ – ро намебурад. **401.** а) $x^2+x-2=0;$ б) $x^3-3x^2-x+3=0.$ **402.** а) $(x-7)^2-18;$ б)

$(x+5)^2-29$; в) $2(x+2)^2-11$. **403.** а) 21 сомону 52 дирам<2218 дирам; б) 42 т 318 кг>41318 кг; в) 6с 18 дақиқа=378 дақиқа. **404.** 420 воҳ. **405.** а) $x=\pm3$; б) $x=8$. **406.** $x=\pm3$. **407.** а) $\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$; б) $\frac{32-24x-24x^3+12x^4-2x^6}{(x^3+4)^3}$; в) $\frac{2x(x^2-3x+3)}{x-1}$; г) $\frac{15x^4-72x^2-16}{4x\sqrt{x}(x^2+4)^3}$; д) $\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^3 x}$; е) $2+4tgx\cdot\sec^2 x$. **408.** а) $-6x\cos x-(6-x^2)\sin x$; б) $(6-9x^2)\sin x+(18x-x^3)\cos x$; в) $12(5x^2+1)$; г) $6(4x-3)$. **409.** а) 30; б) $26880x^3-360x$; в) 0; г) 42; д) $720x^2-144$; е) $18x$; ж) $6x-2$; з) $120x$. **410.** а) -84; б) -4π; в) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; г) 1; д) $\frac{71}{864}$; е) $30{,}5\sqrt{3}$. **411.** а) $A=0{,}32,\ \omega=\frac{1}{3},\alpha=\frac{\pi}{3}$; б) $A=-3,\ \omega=2,\alpha=\frac{\pi}{4}$; в) $A=6,\ \omega=1,\alpha=\frac{\pi}{3}$; г) $A=5,\ \omega=3,\alpha=\frac{\pi}{6}$. **412.** а) ҳа; б) не; в) ҳа. **413.** а) $x=5-\sqrt{21\frac{8}{27}}$; б) $y=\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{621}{4}}$; в) $x=\frac{13}{2}+\sqrt{\frac{193}{4}}$. **414.** а) $x=\pm3$; б) $x=3$; в) параболаи $y=x^2+1$ тири $0x$ – ро намебурад; г) $x=\frac{1}{2}$. **415.** а) ба боло; б) ба поён; в) ба боло; г) ба поён; е) ба боло.

416. Намуна. Дарозии майдони росткунҷашакл аз бараш дида 20 м зиёдтар буда, масоҳаташ ба 1500 м² баробар аст. Бар ва дарозии майдонро ёбед. Ҷавоб: 30 м ва 50 м. **417.** а) 6561; б) 1521; в) 79,21; г) 89401; д) 362404; е) 404,01; ж) 2601; з) 159201. **418.** а) $(-\infty;1)$ -

афзуншаванда; $(1;+\infty)$ - камшаванда; б) $(-\infty;-1)$ - камшаванда, $(-1;+\infty)$ афзуншаванда. **420.** $1\frac{5}{6}$. **421.** а) $\frac{\left(x+\sqrt{x}\right)\left(1+\sin x+\cos x\right)+\sqrt{x}\sin x}{\sqrt{x}(1+\cos x)^2}$; б) $3x^2-2+\sec^2 x$; в) $3x^2 ctgx-(x^3+11)\cos ec^2 x$. **422.** **Нишондод.** Бо x –солҳои писарро ишорат карда ба ҳалли муодилаи $\frac{4x-5}{x-5}=9$ омадан мумкин аст. Ҷавоб: Модар 32 сола ва писар 8 сола аст. **423.** а) $5\Delta x+6(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3$; б) $-7\Delta x+(\Delta x)^2$; в) $-4\Delta x-(\Delta x)^2$; г) $\frac{\Delta x}{\sqrt{9+\Delta x}+3}$.

424.

№ б/т	$f(x_0)$	$f(x_0+\Delta x)$	$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$	$\frac{\Delta f}{\Delta x}$
а)	-3	$-3-4x-(\Delta x)^2$	$-4\Delta x-(\Delta x)^2$	$-4-\Delta x$
б)	8	$4\sqrt{4+\Delta x}$	$\frac{4\Delta x}{2+\sqrt{4+\Delta x}}$	$\frac{4}{2+\sqrt{4+\Delta x}}$
в)	2	$2(1+\Delta x)^3$	$6+6(\Delta x)^2+2(\Delta \mathbf{x})^3$	$6+6\Delta x+2(\Delta \mathbf{x})^2$
г)	7	$7+2\Delta x$	$2\Delta x$	2

425. а) $6x_0+3\Delta x$; б) $\frac{4}{x_0^2+x_0\Delta x}$; в) $-\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\Delta x}}$. **426.** а) 9; б) $4t_0-3+2\Delta t$. **427.** а) 1; б) -4; в) $\frac{5}{6}$. **428.** а) $L=19$; б) $L=4$; в) $L=\frac{1}{6}$; г) $L=-1$. **429.** а), б), д), е) $(-\infty;+\infty)$; в) $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; г) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1+\infty)$. **430.** а) ҳа; б) не.

432. а) 4; б) -4; в) 243; г) $-\frac{2}{25}$. **433.** а) $-\frac{2}{25}$; б) 8; в) $\frac{11}{4}$; г) $\frac{5}{2}$. **434.** а) 86 м/с; б) 63 м/с. **435.** $S(4)=3{,}5м$; $\nu(4)=7$ м/с. **436.** а) $7-\frac{2}{x^2}$; б) $27x^2-\frac{4}{\sqrt{x}}$; в) $8x-2+\frac{3}{2\sqrt{x}}$; г) $12x^2+16x-2$. **437.** а) $3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $\frac{1}{2}+\frac{6}{x^3}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; в) $\frac{2}{3}x+\frac{8}{x^3}$; г) $4x+9x^2$. **438.** а)36; б) -36; в) -7; г) 92. **439.** а) $x(5x^3+4x^2-3x+2)$; б) $\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$; в) $1+\frac{3}{2}\sqrt{x}$; г) $x(3x+2)$. **440.** а) $\frac{5x^2}{2\sqrt{x}}$; б) $2x(2x^2-3x+4)$; в) $x^2(5x^2+3)$; г) $\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-1$. **441.** а) 60; б) 183. **442.** а) $\frac{2}{(x+1)^2}$; б) $\frac{2+x-x^2}{2\sqrt{x}(x^2-x+2)}$; г) $\frac{x^2(x^2-6x+6)}{(x^2-3x+2)^2}$. **443.** а) $\frac{x^2+26x}{(x^2+13)^2}$; б) $-\frac{2x+33}{x^4}$; в) $-\frac{14}{x^3}$; г) $-\frac{9}{x^4}$. **444.** а) 1; б) $-\frac{5}{18}$. **445.** а) -2; б) 10; в) $3x_0^2-2$; г) $3a^2+6a+1$. **446.** а) 3; б) 6; в) 9; г) $3\sqrt{a}$. **447.** а) $\frac{1}{4}$; б)4; в) $\frac{1}{9}$; г) $\frac{4}{(x_0+2)^2}$. **448.** а) 1 ва 2; б) 2 в) ± 1; г) 0 ва 3. **449.** а) $\left(-\infty;\frac{3}{10}\right)$; б) $(-1;+\infty)$; в) $(-\infty;+\infty)$; г) $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$; д) $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$. **450.** а) $(-\infty;0)$; б) $(-2;2)$; в) $(-\infty;-1)$; г) $(-\infty;+\infty)$; д) $(-3;7)$. **452.** $x=1$. **453.** а) $11x^{10}$; б) $40x^7$; в) $-7x^{-8}$; г) $-8x^{-5}$; д) $10x^4+4x^3-15x^2+6x-1$; е) $4x^3-2x$; ж)

$x^{n-1}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **454.** а) $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{x^n}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}$; б) $3x^2-\frac{3}{x^4}$; в) $\frac{9x^4+1}{2\sqrt{x}}$; г) $\frac{15x^7-28x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; д) $\frac{2x^3(x^2-2)}{(x^2-1)^2}$; е) $\frac{4x^5+5x^4+1}{(x+1)^2}$; ж) $\frac{-3x^3-3}{x^2\sqrt{x}}$. **455.** а) -4; б) $-\frac{3}{8}$; в) $-\frac{5}{64}$; г) 192. **456.** а) $g=u^9, u=7x+11$; б) $g=u^{15}, u=x+15$; в) $g=\sin u, u=9x^2-\frac{\pi}{3}$; г) $g=u^6, u=\cos x$.
457. а) $69(3x-10)^{22}$; б) $70(x-2)^{69}$; в) $707(7x-4)^{100}$. **458.** а) $-\frac{5}{(3x+5)^{12}}$; б) $-\frac{116}{(1+2x)^{30}}$; в) $\frac{297}{(3x+2)^{100}}$. **459.** а) $\frac{-3x^2}{2\sqrt{25-x^3}}$; б) $\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$; в) $-\frac{1}{x\sqrt{2x^2+x}}$. **462.** $S'(0)=0,\ S'(3)=\frac{3}{\sqrt{10}}$; **463.** *x=-1,5; x=0,5;* **464.** *x=16* **465.** а) $\cos x+\frac{3}{\cos^2 x}$; б) $\cos x$; в) $-\frac{2}{\sin^2 x}$; г) $-3(\sin x+\cos 2x)$; д) $tgx\sec x-2ctgx\cos ecx$; е) $-\frac{4}{1+\sin x}$. **466.** а) $\frac{3}{5}\cos\frac{3x}{5}+2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; б) $2\sec^2(1+x)+\frac{3}{2}\cos ec^2\frac{x}{2}$; в) $\sin 2x$; г) $3\cos^2 x\sin x$. **467** а) $\frac{5\sqrt{2}}{2}-4$; б) $4+\sqrt{3}$; в) $\frac{\pi^2}{3}-4$; г) 0. **468.** а) $x=4\pi, x=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi,\quad n\in Z$; б) $x=\pi n,\ x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi n,\quad n\in Z$; в) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n,\quad n\in Z$; г) $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+n\pi,\quad n\in Z$. **469.** а) $-\frac{\pi}{6}+2n\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2n\pi,\ n\in Z$; б) $-\frac{\pi}{3}+2n\pi<x<\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z$;

в) $\frac{\pi}{3}+2n\pi<x<\frac{5\pi}{2}+2n\pi,\ \ n\in Z$; г) **Нишондод.** Бигузор $\frac{x}{4}-1=y$ бошад, онгоҳ нобаробарии $\varphi'(x)<0$ ба нобаробарии $\cos y<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ меорад, ки ҳаллаш $\frac{3\pi}{4}+2n\pi<y<\frac{5\pi}{4}+2n\pi$ мешавад. Ба ҷои y $\frac{x}{4}-1$ гузошта $\frac{3\pi}{4}+2n\pi<\frac{x}{4}-1<\frac{5\pi}{4}+2n\pi$ - ро ҳосил мекунем, ки аз он $1+\frac{3\pi}{4}+2n\pi<\frac{1}{4}x<1+\frac{5\pi}{4}+2n\pi$ пайдо мешавад. Ҷавоб: $4+3\pi+8n\pi<x<4+5\pi+8n\pi,\qquad n\in Z$. **470.** а) $f'(x)=0\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$; $f'(x)>0\Rightarrow\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{3}+2k\pi$; $f'(x)<0\Rightarrow-\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in Z$; б) $f'(x)=0\Rightarrow x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n$; $f'(x)>0\Rightarrow\frac{\pi}{3}+n\pi<x<\frac{7\pi}{6}+n\pi$; $f'(x)<0\Rightarrow\frac{\pi}{6}+n\pi<x<\frac{\pi}{3}+n\pi,\quad n\in Z$.

475. а) $\frac{86}{(x-2)^3}$; б) $\frac{4\cos x+2(2x+1)\sin x}{\cos^3 x}$; в) $-8\cos 2x$. **476.** а) $3\cos x-(1+x)\sin x$; б) 216; в) $120(6x-1)$; г) $362880x$. **477.** а) $\frac{\sqrt{2}}{128}(320+96\pi-12\pi^2-\pi^3)$; б) 240; в) 6552; г) -24. **478.** а), б) ҳа. **480.** $x_1=2,\ x_2=\frac{4}{3}$. **484.** $x_1=1,\ x_2=\frac{1}{3}$.

БОБИ V

Баъзе тадбиқҳои бефосилагӣ ва ҳосила

§14. Тадбиқи бефосилагӣ дар ҳалли нобаробариҳо
§15. Баъзе тадбиқҳои ҳосила

§14. Тадбиқи бефосилагӣ дар ҳалли нобаробариҳо

Дар навбати аввал тадбиқоти зеринро ба қайд мегирем: **агар дар $(a;b)$ функсияи $f(x)$ бефосила буда, дар он ба 0 баробар нашавад, он гоҳ функсия дар фосилаи номбурда аломаташро нигоҳ медорад.**

Ин тасдиқоти ба мафҳуми бефосилагӣ вобаста имконият медиҳад, ки методи ба мо аз синфи 9 маълуми фосилаҳоро (дар п. 11 – и §4 бо ёриаш нобаробариҳои яктағйирёбандаро ҳал карда будем) пурратар намуда, нобаробариҳои қатъии $f(x)>0$ ва $f(x)<0$ - ро ҳал намоем.

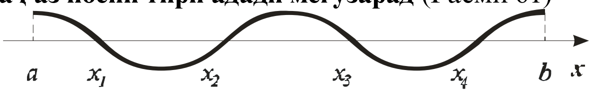
Функсияи $f(x)$ - ро дар $(a;b)$ бефосила шуморида схемаи зерини ҳалли нобаробариҳои болоиро пешниҳод менамоем:

1). Нуқтаҳоеро (шумораашон охирнок аст) ошкор месозанд, ки дар онҳо $f(x)=0$ аст (яъне нулҳои функсияро меёбанд);

2). Аз рӯи нулҳои ёфташуда фосилаи $(a;b)$ - ро ба шумораи охирноки фосилаҳое, ҷудо мекунанд, ки дар ҳар кадомашон функсия аломаташро нигоҳ медорад (мувофиқи тасдиқот!);

3). Барои муайян кардани аломат қимати функсияро дар ягон нуқтаи фосила ҳисоб кардан кифоя аст.

4). Тағйирёбии аломатро дар хати рости координатӣ бо хатҳои мавҷӣ аз рӯи нишонаи зерин ба қайд мегирем; дар он фосилаҳое, ки $f'(x)>0$ аст, хати каҷ аз болои тир ва дар фосилаҳое, ки $f'(x)<0$ аст, хати каҷ аз поёни тири ададӣ мегузарад (Расми 61)*



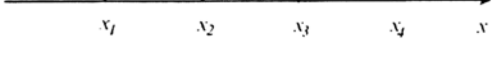
Расми 61

Масалан, аз расм чунин бармеояд, ки

-ҳангоми $x\in(a;x_1)$ будан $f'(x)>0$

---

* Дар бисёр адабиётҳои таълимӣ онро ин хел ҳам менависанд:



-ҳангоми $x \in (x_1; x_2)$ будан $f'(x) < 0$

-ҳангоми $x \in (x_2; x_3)$ будан $f'(x) > 0$

-ҳангоми $x \in (x_3; x_4)$ будан $f'(x) < 0$

-ҳангоми $x \in (x_4; b)$ будан $f(x) > 0$

мешавад.

Агар $f'(x) > 0$ бошад, онгоҳ ҳалли нобаробарӣ якҷояшавии фосилаҳои $(a; x_1)$, $(x_2; x_3)$, $(x_4; b)$ ва агар $f'(x) < 0$ бошад, фосилаҳои $(x_1; x_2)$ ва $(x_3; x_4)$ мешавад.

Қайд мекунем, ки агар нобаробарӣ ғайриқатъӣ бошал, онгоҳ нулҳои сурат ба фосилаҳои мувофиқ дохил карда мешаванд.

Акнун истифодаи схемаи болоиро дар ҳалли якчанд нобаробариҳои мушаххас меорем.

Мисоли 1. Нобаробарии $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4} > 0$ - ро ҳал мекунем.

Тарафи чап функсияи касрӣ – ратсионалӣ буда, дар нуқтаҳои 1 ва 3 ба 0 баробар мешавад. Аз нуқтаҳои тири ададӣ нулҳои махраҷро истисно карда соҳаи муайяниро, ки дар он функсия бефосила аст, ба панҷ фосилаҳои $(-\infty;-2)$, $(-2;1)$, $(1;2)$, $(2;3)$, $(3;+\infty)$ ҷудо мекунем. (пункти 1-2-и схема):

Расми 62 а)

Бо ёрии санҷиши бевосита аломати қимати функсияро дар фосилаҳо ошкор менамоем (пункти 3)-и схема.

Натиҷаҳоро дар нақша тасвир менамоем (пункти 4):

Расми 62 в)

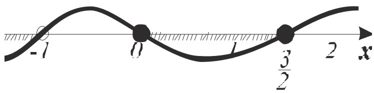
Ҳалли нобаробарии матлуб якҷояшавии фосилаҳои $(-\infty;2), (1;2)$ ва $(3;+\infty)$ мебошад.

Мисоли 2. Нобаробарии ғайриқатъии $\dfrac{x(2x-3)}{x+1} \le 0$ - ро ҳал мекунем.

Нулҳои сурат ададҳои 0 ва $\frac{3}{2}$ буда, нули махраҷ адади -1 мебошад. Функсияи касрӣ –ратсионалии $f(x)=\frac{x(2x-3)}{x+1}$ дар тамоми тири ададӣ бе нули махраҷ (яъне адади -1) муайян ва бефосила аст. Нуқтаҳои -1; 0 ва $\frac{3}{2}$-и тирро ба чор фосила ҷудо мекунад, ки дар

$$\forall x\in(-\infty;-1), \qquad f'(x)<0,$$
$$\forall x\in(-1;0), \qquad f'(x)>0,$$
$$\forall x\in\left(0;\frac{3}{2}\right), \qquad f'(x)<0,$$
$$\forall x\in\left(\frac{3}{2};+\infty\right), \qquad f'(x)>0$$

мебошад. Ин натиҷаро дар тири ададӣ тасвир менамоем:



Расми 63

Қиматҳои $x=0$ ва $x=\frac{3}{2}$ ба ҳал дохил мешаванд (нобаробарии матлуб ғайриқатъӣ аст). Аз ин ҷо ҳалли нобаробари $(-\infty;-1)\cup[0;1{,}5]$ мешавад.

Мисоли 3. Соҳаи муайянии функсия $y=\sqrt{x^4-5x^2+4}$ - ро меёбем.

Ҳал. Дар асоси хосияти решаи квадратӣ маҷмуи ҳамаи x – ҳои нобаробарии $x^4-5x^2+4\geq 0$ - ро қаноаткунанда соҳаи муайянии функсияро ташкил медиҳад.

Нобаробарии охиринро аз рӯи схемаи болоӣ ҳал мекунем. Нулҳои бисёраъзогии x^4-5x^2+4 решаҳои муодилаи биквадратии $x^4-5x^2+4=0$ мебошанд. Гузориши $x^2=t$ - ро тадбиқ намуда онро ҳал мекунем:

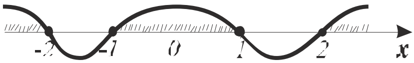
$$t^2-5t+4=0, \qquad t_1=\frac{8}{2}=4, \qquad x_{1,2}=\pm 2,$$

$$t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2},\qquad t_2=\frac{2}{2}=1,\qquad x_{3,4}=\pm1,$$

$$t_{1,2}=\frac{5\pm3}{2},\qquad -2;-1;1;2 \text{ нулҳои функсия.}$$

Ададҳои ёфтаамон тири ададиро ба панҷ фосилаҳои $(-\infty;-2),(-2;-1),(-1;1)(1;2)$ ва $(2;+\infty)$ ҷудо мекунанд.

Амалиёти минбаъдаамон аз рӯи схема (қимати бисёраъзогиро дар ягон нуқтаи дилхоҳи ҳар як фосила ҳисоб карда, аломаташро, ки барои нуқтаҳои дигари ҳамон фосилаҳо доимӣ нигоҳ медоранд, ба назар мегирем) ба нақшаи зерин меорад:



Расми 64

Аз рӯи он соҳаи муайянии функсияро навишта метавонем: $D(y)=(-\infty;-2]\cup[-1;1]\cup[2;+\infty)$.

?

1. Бо иҷрои кадом шартҳо функсияи $f(x)$ дар интервал аломаташро нигоҳ медорад?

2. Схемаи ҳалли нобаробариҳои қатъиро аз рӯи методи фосилаҳо баён кунед.

3. Ҳангоми ҳалли нобаробариҳои ғайриқатъӣ чӣ хел амал мекунанд? Мисолҳо оред.

Нобаробариҳои зеринро бо методи фосилаҳо ҳал кунед (485-487)

485. а) $(x-3)(x-4)>0$; б) $(x+1)(x-2)\ge0$;

в) $(x+0{,}5)(x-1)(x-6)<0$; г) $(x-0{,}5)(x+2)(x-7)\ge0$;

д) $\frac{(x-1)(x-2)}{x^2-9}<0$; е) $\frac{x^2-4}{(x+1)(x-3)}\ge0$;

ж) $\frac{(x-3)(x-4)}{(x-5)(x-6)}<0$; з) $\frac{(x-2)(x-5)}{(x+2)(x+5)}\ge0$.

486. а) $7x^2-3x-4\ge0$; б) $2x^2-5x+3<0$; в) $3x^2-x-10>0$;

г) $x^2-8x-9\le0$; д) $x^4-4x^2+3\le0$; е) $x^4-3x^2+2\ge0$;

487. а) $\frac{(x-4)^2(x+4)^3(x-1)}{(x+1)(x-3)^2}\le0$; б) $\frac{(x+1)(x+2)(x+3)^4}{x^3(x-4)^2}\le0$;

в) $(x^2-4)(x+3)(x^3-1)\ge0$; г) $(x^4-1)(x^3+8)(x-3)\ge0$;

д) $\dfrac{x-2}{5-x} > 1$; е) $3x^3 + x^2 + 12x - 2 > x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.

488. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y = \sqrt{x^3 + 5x^2 - x - 5}$; б) $y = \sqrt{\dfrac{5x - 3 - x^2}{x^2 + 1}}$.

489. Дар кадом қиматҳои x ифода маъно надорад:

а) $\dfrac{x^3 + 1}{\sqrt{(3-x)(x^2+1)}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}} + \dfrac{x}{3}$?

Машқҳо барои такрор

490. Оё муодила **(**а)-д)**)** ва нобаробариҳои **(**е)-и)**)-и** зерин баробарқувваанд;

а) $x^2 + 14 = 7x + 4$ ва $(x-5)(x-2) = 0$; б) $x^2 - 3x + 2 = 0$ ва $x^3 + 3x + 2 = 0$; в) $3x - 7 = 5x + 5$ ва $2(x+6) = 0$; г) $\dfrac{1}{5}(2x-1) = 1$ ва $\dfrac{3x-1}{8} = 1$; д) $(x-5)^2 = 3(x-5)$ ва $x - 5 = 3$;

е) $2x - 1 \geq 2$ ва $2(x-1) \geq 1$; ж) $(x-1)(x+2) < 0$ ва $x^2 + x < 2$;

з) $(x-2)(x+1) < 3x + 3$ ва $x - 2 < 3$;

и) $x(x+3) \geq 2x$ ва $x^2(x+3) \geq 2x^2$.

491. Ифодаи $\dfrac{1 + \sin\alpha - \cos 2\alpha - \sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1}$ - ро содда кунед.

492. Ба ҳосили зарб табдил диҳед:

а) $\sin\alpha + \cos\alpha$; б) $2\sin\alpha + \sqrt{3}$.

493. Барои кадом қиматҳои x қимати ҳосилаи функсияи

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ ба 11 баробар аст?

494. Суммаи $-17 + (-14) + (-11) + \ldots + 13$ - ро ёбед.

495. Аз ду шаҳр, ки масофаи байнашон 700 км аст, дар як вақт ду қатора ба пешвози якдигар баромаданд. Суръати ҳаракати як қатора аз дигараш 20 км/соат зиёдтар аст. Агар қаторахо беист ҳаракат карда баъди 5 соат вохӯрда бошанд, онгоҳ суръатҳояшонро ёбед.

496. Ҳосилаи функсияҳои зеринро ёбед:

а) $y = 9x^{13} - 4x$; б) $y = 3\cos x - 7\sin x$.

§ 15. Баъзе татбиқҳои дигари ҳосила
45. Ҳосила дар физика ва техника

Пеш аз баёни мақсади асосӣ хотиррасон менамоем, ки «ҳосилаи координата аз рӯи вақт суръат аст» (маънои механикии ҳосила), чунки ҳангоми $\Delta t \to 0$

$$v_{\text{миёна}}(\Delta \mathrm{t}) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \to v(t_0) \qquad \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v(t_0) \right)$$

ва барои функсияи дифференсиронидашавандаи $x(t)$ (қонуни ҳаракат) $v(t) = x'(t)$ мебошад.

Азбаски суръати лаҳзагӣ функсияи вақт мебошад, **пас ҳосилаи он (чун тағйирёбии суръат дар фосилаи вақт) шитоби ҳаракат номида мешавад.**

Агар хати рости координатӣ амудӣ ба поён ва мавқеъи ибтидоии нуқтаи материалӣ ба 0 ҳамҷоя шавад, он гоҳ

$$x(t) = \frac{gt^2}{2}, \quad g = 9{,}8\frac{\text{м}}{\text{сон}^2}, \quad v = gt$$

ва $a(t) = 9{,}8\dfrac{\text{м}}{\text{сон}^2}$, яъне шитоб бузургии доимӣ мешавад.

Агар ҳаракати нуқтаи материалӣ аз рӯи қонуни квадратӣ, ки муодилааш

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0$$

$(a \neq 0,\ v_0 = v(0))$ ва $x_0 = x(0)$ аст, ба амал ояд, он гоҳ $v(t) = at + v_0$ ва шитобаш $v'(t) = a = const$ мешавад.

Агар $a > 0$ бошад, мо ба ҳаракати собитшитоб (тезшаванда) ва агар $a < 0$ бошад бо ҳаракати сустшаванда дучор мешавем.

Ҳангоми $a = 0$ будан ҳаракати нуқтаи материалӣ мунтазам аст. Бояд қайд намуд, ки баръаксаш ҳам ҷой дорад: агар ҳаракати нуқтаи материалӣ (ё ҷисм) аз рӯи хати рост ба шитоби доими *a* доро бошад, он гоҳ қонуни ҳаракат

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0$$

- ро қаноат менамояд.

Баъзе масъалаҳоеро дида мебароем, ки ба суръату шитоб вобаста буда, вале қонуни ҳаракаташон квадратӣ нестанд. Инчунин масъалаҳои физикиеро ҳал мекунем, ки мазмуни техникӣ доранд.

Масъалаи 1. Суръати ҷисми ростхатта ҳаракаткунанда ба решаи квадратӣ аз роҳи тайшуда нисбат дорад (масалан ҳангоми озодафтӣ). Нишон медиҳем, ки ин ҳаракат дар зери таъсири қувваи доимӣ ба амал меояд.

Ҳал. Аз рӯи қонуни Нютон қувваи F – и ҳаракатро ба амал оваранда ба шитоб мутаносиб аст:

$$F = k \cdot a(t), \qquad a(t) = x^n(t)$$

$k = const$ - коэффитсиенти мутаносибӣ. Аз баски мувофиқи шарти масъала $x'(t) = \lambda \cdot \sqrt{x}$ ва λ - доимӣ аст, пас $x = x(t)$ - ро ба назар гирифта, онро чун ҳосилаи функсияи мураккаб дифференсиронида (п.42).

$$x''(t) = (x'(t))' = \left(\lambda \cdot \sqrt{x(t)}\right)' = \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} \cdot x'(t) = \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} \cdot \lambda \cdot \sqrt{x} = \frac{\lambda^2}{2}$$

- ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо қувваи таъсиркунандаи матлуб

$$F = \frac{k\lambda^2}{2} = const$$

мешавад.

Масъалаи 2. Нуқтаи материалӣ аз рӯи қонуни $x(t) = A\sin\omega t$ (ҳаракат характери даврӣ дошта лаппишҳои гармоникиро ба амал меорад; ниг. ба мисоли 3 – и §13) ҳаракат мекунад. Суръат ва шитоби онро дар лаҳзаи вақти $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$ меёбем.

Ҳал. Дар навбати аввал суръат ва шитобро дар лаҳзаи дилхоҳи вақт меёбем:

$$v(t) = x'(t) = (A\sin\omega t)' = A\cos\omega t \cdot (\omega t)' = A\omega\cos\omega t,$$

$$a(t) = v'(t) = (A\omega\cos\omega t)' = A\omega(-\sin\omega t)(\omega t)' = A\omega^2 \sin\omega t.$$

Дар лаҳзаи $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$ суръати шитоби матлуб мувофиқан $v = \mathrm{A}\omega$ ва $a = 0$ (яъне ҳаракат мунтазам аст) мешаванд. Аз вобастагии охирини $a(t) = -A\omega^2 \sin\omega t$ хулоса кардан мумкин аст, ки дар байни шитобу қонуни ҳаракат мутаносибӣ ҷой дорад:

$$a = -\omega^2 \cdot x, \qquad \frac{a}{x} = -\omega^2.$$

Масъалаи 3. Мила дар гирди тир аз марказаш бо қонуни $\varphi(t) = At + Bt^3$ - ро қаноаткунанда чарх мезанад

$\left(A = 4\dfrac{рад}{сон}; B = 0{,}2\dfrac{рад}{сон^3}\right)$. Моменти чархзании М – и ба мила таъсиркунандаро дар лаҳзаи $e = 2$сон. меёбем, ки агар моменти инертсияи мила $I = 0{,}048\,\text{кг} \cdot \text{м}^2$ бошад.

Ҳал. Муодилаи асосии динамикаи ҳаракати чархзананда $M = 1 \cdot \varepsilon$ аст, ки дар ин ҷо ε - шитоби кунҷиро ифода мекунад. барои ёфтани ε аз муодилаи ҳаракат пай дар пай ду маротиба ҳосила мегирем:

$$\varphi'(t) = \left(At + Bt^3\right)' = (At)' + \left(Bt^3\right)' = A + Bt^2.$$

$$\varphi''(t) = [\varphi'(t)]' = \left(At + Bt^2\right)' = 0 + 3 \cdot 2Bt = 6Bt.$$

Дар лаҳзаи $t = 2\,сон,\ \varepsilon = \varphi''(2) = 6 \cdot 0{,}2 \cdot 2 = 2{,}4\left(\dfrac{\text{рад}}{\text{сон}^2}\right)$ ва аз ин ҷо моменти чархзании матлуб

$$M = 1 \cdot \varepsilon = 0{,}048 \cdot 2{,}4 = 0{,}1152\,н \cdot м$$

мешавад.

?

1. Тасдиқоти «ҳосилаи координата аз рӯи вақт суръат аст» - ро шарҳ диҳед.
2. Мафҳуми шитобро бо ёрии ҳосилаҳои тартиби яку ду шарҳ диҳед. Мисолҳо оред.
3. Дар кадом ҳолатҳо шитоби ҳаракати нуқтаи материалӣ бузургии доимиро ифода мекунад?

497. Дар гирди тир чархзании ҷисм бо қонуни $\varphi(t) = 7t^2 - 3r - 4$ мувофиқ аст. Суръати кунҷиро дар лаҳзаи дилхоҳи вақт ва ҳангоми $t = 5$сон. будан ёбед (кунҷ бо радианҳо, суръат бо радиан дар сония ва вақт бо сонияҳо чен карда мешаванд).

498. Қонуни ҳаракати ростхаттаи нуқтаи материалӣ $x(t) = \dfrac{1}{5}t^5 - \dfrac{1}{3}t^3 + 3t$ мебошад. Формулаҳои ҳисоб кардани суръат ва шитоби ҳаракатро дар лаҳзаи дилхоҳи вақт тартиб диҳед. Аз рӯи он $v(3)$ ва $a(3)$ - ро ёбед, ки агар вақт бо сонияҳо ва кӯчиш бо метрҳо чен карда шавад.

499. Нуқтаи материалӣ ростхатта аз рӯи қонуни $x(t) = At + Bt^2$ $\left(A = 3\dfrac{\text{м}}{\text{сон.}}, B = 0{,}06\dfrac{\text{м}}{\text{сон}^2}\right)$ - ро қаноаткунанда, ҳаракат мекунад. Суръат ва шитоби нуқтаи материалиро дар лаҳзаи $t_1 = 0$ ва

$t_2 = 3$ сон. ёбед. Суръат ва шитоби миёна дар се сонияи аввали ҳаракат ба чӣ баробар мешавад?

500. Нуқтаи материалӣ аз рӯи қонуни характери лапишнок доштаи $x(t) = 2\sin 4t$ ҳаракат мекунад. Суръат ва шитоби онро дар лаҳзаи вақти $t = \dfrac{\pi}{2}$ ёбед.

501. Дар хати рост ду нуқтаи материалӣ аз рӯи қонунҳои $S_1(t) = 2t^2 - t$ ва $S_2(t) = t^3 + 1$ ҳаракат мекунад. Дар кадом фосилаи вақт

а) суръатҳои ҳаракати нуқтаҳо баробар мешаванд;

б) суръати ҳаракати нуқтаи нуқтаи якум аз дуюм калонтар мемонад?

502. Қонуни ҳаракати ростхаттаи нуқтаи материалии массааш $m = 15кг$ намуди $S(t) = 5t^3 - 3t^2 + 2t$ - ро дорад. Қувваи ба нуқта дар лаҳзаи $t = 3$ сония таъсиркунандаи F – ро ёбед.

503. Кунҷи гардиши ҷисм дар атрофи тир бо тағйирёбии t аз рӯи қонуни $\varphi(t) = 0{,}1t^2 - 0{,}5t + 2$ ба амал меояд. Суръати кунҷии $\left(\text{бо}\,\dfrac{\text{рад}}{\text{сон}}\right)$ чархзании ҷисмро дар лаҳзаи $t = 10$сон. ёбед.

504. Ҷисми массааш m=5 кг аз рӯи қонуни $S(t) = 3 - t - t^2$ (S – бо метрҳо ва t – бо сонияҳо чен мешаванд) ростхатта ҳаракат мекунад. Энергияи кинетикии $\left(\dfrac{m\vartheta^2}{2}\right)$ онро баъди 5 сонияи ҳаракаташ ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

505. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = 1;$ б) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = 1.$

506. Содда кунед:

а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\alpha\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right);$ б) $\cos^2\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right).$

507. Нобаробариро бо методи фосилаҳо ҳал кунед:

а) $x^2 - 2x - 3 \le 0;$ б) $x - x^2 - 1 \ge 0.$

508. Барои кадом қиматҳои x ададҳои x, $\sqrt{4-3x}$, $3-x$ аъзоҳои пай дар паи прогрессияи геометрӣ мешаванд?

509. Суммаи n аъзои аввалаи прогресияи арифметикиро ҳангоми $a_1=3,\ a_n=81$ ва $n=40$ будан ёбед.

510. Агар

а) $f(x)=3x^2-5x+19$; б) $f(x)=3x^2-x+11$

бошад, он гоҳ дар кадом қиматҳои x $f'(x)$ баробари 0 мешавад.

46. Аломатҳои афзуншавӣ ва камшавии функсия

Ин ду мафҳум ба мо аз синфи 9 шинос аст. Кӯтоҳакак хотиррасон мекунем, **ки «функсияи $y=f(x)$ дар ягон қисми $(a;b)$ - и соҳаи муайянӣ (ё дар тамоми нуқтаҳои $D(f)$ афзуншаванда (камшаванда) номида мешавад, агар дар ин фосила ба қимати калони аргумент қимати калони (хурди) функсия мувофиқ ояд». Бо дигар ибора, функсия дар фосилаи $(a;b)$ афзуншаванда (камшаванда) номида мешавад, агар ҳангоми $x_2>x_1$ будан шарти $f(x_2)>f(x_1)$ $(f(x_2)<f(x_1))$ иҷро гардад.**

Акнун бошад аз формулаи Лагранж * истифода бурда аломатҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияро бо ёрии ҳосила исбот мекунем.

Теорема. Функсияи $f(x)$ дар фосилаи $(a;b)$ меафзояд (кам мешавад), агар дар ҳар як нуқтаи фосила шарти $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ иҷро гардад.

Исбот. Дар фосилаи $(a;b)$ ду нуқтаҳои x_1 ва x_2 - ро бо тарзи дилхоҳ интихоб мекунем. Барои аёнӣ фарз мекунем, ки $x_1<x_2$ $(x_2-x_1>0)$ аст.

Мувофиқи формулаи Лагранж $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$

ва аз ин ҷо $f(x_2-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)$, $x_1<c<x_2$ мешавад.

---

* Формулаи номбурда намуди $f(b)-f(a)=(b-a)\cdot f'(c)$ -ро дорад

Агар $f'(x)>0$ бошад, он гоҳ $f'(c)>0$ ва $f(x_2)-f(x_1)$ чун ҳосили зарби ду адади мусбат (яъне $f'(c)>0$ ва $x_2-x_1>0$) калон аз 0 мешавад: $f(x_2)-f(x_1)>0$.

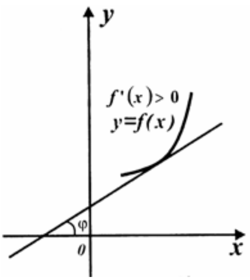
Нобаробарии охирин афзуншавандагии $f(x)$ - ро дар $(a;b)$ ифода мекунад.

Ҳолати камшаванда будан низ ҳамин тавр исбот мешавад.

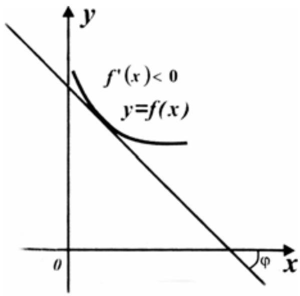
Натиҷаи теоремаи исботшуда аз мазмуни геометрии ҳосила ҳам бармеояд.

Дар ҳақиқат, агар дар ягон фосилаи $f'(x)>0$ бошад, он гоҳ $f'(x)=k=tg\varphi>0$ мешавад. Ин бошад мазмуни онро дорад, **ки расандаи ба хати каҷ гузаронидашуда ба боло равона буда, графики функсия дар ин фосила «баланд» мешавад, яъне функсия меафзояд.** (Расми 65).

Айнан ҳамин тавр ҳангоми $k=tg\varphi=f'(x)$ будан расандаи график ба поён равона буда, худи график дар фосилаи муҳокимашаванда «паст» мефурояд, яъне $f(x)$ камшаванда аст **(Расми 66).**



Расми 65



Расми 66

Мисоли 1. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияи $f(x)=x^3-3x+2$ - ро ёфта, графикашро месозем.

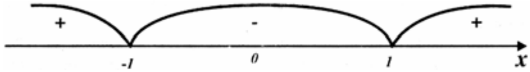
Ҳал. Маълум, ки $D(f)=(-\infty;+\infty)$ аст. Ҳосилаи функсияро дар фосила ёфта нобаробариҳои $f'(x)>0$ ва $f'(x)<0$ - ро ҳал мекунем.

Нобаробарии $f'(x)>0$ ба

$$f(x)=(x^3-3x+2)'=3x^2-3=3(x^2-1)>0,\ (x-1)(x+1)>0$$

меорад, ки онро ҳал карда, ба натиҷаи зерин меоем: дар $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ $f(x)>0$ буда, функсия дар ин фосила меафзояд.

Нобаробарии $f'(x)<0$ ба $3x^2-3<0$ оварда шуда, ба монанди боло ҳосил мекунем, ки дар $x\in(-1;1)$ $f(x)$ кам мешавад.



Расми 67

Бо мақсади сохтани графики функсия қимати функсияро дар нуқтаҳои $x=\pm1$ ҳисоб мекунем:

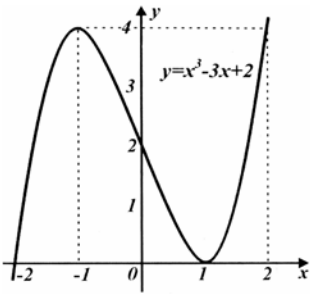
$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=-1+3+2=4,\ f(1)=1^3-3\cdot1+2=-3+3=0$

Азбаски

$x^3-3x+2=(x^3-x)-(2x-2)=x(x^2-1)-2(x-1)=(x-1)(x^2+x-2)=$
$=(x-1)(x-1)(x+2)=(x-1)^2(x+2)$ аст, пас нуқтаҳои бурриши график бо тири $0x$ (дар ин ҳолат $y=0$ мегиранд) (1;0) ва (-2;0) мешаванд.

Ниҳоят қайд мекунем, ки график тири $0y$ – ро (дар ин ҳолат $x=0$ гирифтан зарур аст) дар нуқтаи (0;2) мебурад.

Нуқтаҳои (-1;4), (-2;0), (0;2) ва (1;0) – ро дар ҳамвории координатӣ қайд карда, графики функсияи дар фосилаҳои $(-\infty;-1)$ ва $(1;+\infty)$ афзуншаванда ва дар фосилаи (-1;1) камшавандаи $f(x)=x^3-3x+2$ - ро месозем (расми 68).



Расми 68

Барои муайян кардани фосилаҳои афзуншавӣ (онро бо рамзи $(\uparrow)$ ишорат мекунем) ва камшавии $(\downarrow)$ функсия аз рӯи дастури зерин амал кардан қулай аст:

- нуқтаҳоеро, ки дар онҳо ҳосила ба нул баробар аст ё вуҷуд надорад, дар тири ададӣ қайд мекунем;

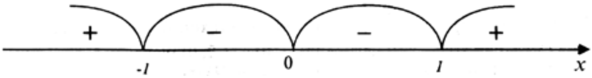
- бо ёрии ин нуқтаҳо фосилаҳоеро, ки дар якҷояги соҳаи муайяниро ташкил дода дар ҳар якаш $f(x)$ аломаташро нигоҳ медорад, муайян мекунем.

Мисоли 2. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияи

$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ - ро ёфта, графикашро месозем.

Ҳал. Барои ин функсия соҳаи муайянӣ ҳамаи нуқтаҳои тири ададӣ ғайр аз нуқтаи 0 аст.

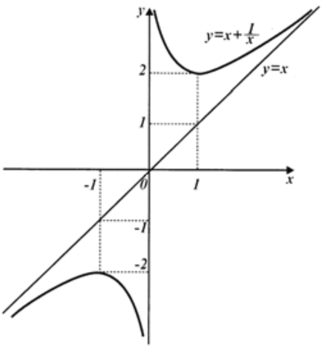
Аз рӯи қоидаҳои дифференсиронӣ $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$ - ро ҳосил мекунем, ки дар нуқтаҳои $x=\pm 1$ $f'(x)$ - ро ба 0 мубадал мегардонад. Дар нуқтаи $x=0$ функсия ва ҳосилааш вуҷуд надорад, пас нуқтаҳои ± 1 ва 0 соҳаи муайяниро ба чор фосилаҳои $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$ ва $(1;+\infty)$ ҷудо мекунанд. Аломати ҳосиларо дар ҳар яки ин фосилаҳо муайян мекунем:



Расми 69

Аз расм намоён аст, ки функсия дар фосилаҳои $(-\infty;-1)$ ва $(1;+\infty)$ афзуншаванда $(\uparrow)$ ва дар фосилаҳои (-1;0), (0;1) камшаванда $(\downarrow)$ аст.

Ҳангоми сохтани график дар назар медорем, ки функсия тоқ буда, тирҳои координатавиро намебурад. Нуқтаҳои $(\pm 1;\pm 2)$ ба графики функсия тааллуқ дошта абсиссаҳояшон фосилаҳои афзуншавиро аз камшавӣ ҷудо мекунанд дар атрофи нуқтаи ба $x=0$ хеле наздик ҷамъшавандаи $\frac{1}{x}$ беҳад афзуда беҳад афзуншавии қимати $f(x)$ - ро таъмин мекунад.



Расми 70

Дар асоси ин маълумотҳо графики функсияро месозем **(расми 70).**

Мисоли 3. Нишон медиҳем, ки дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ функсияи $y=x^3+3x$ афзуншаванда ва $y=\cos 4x-8x$ камшаванда аст.

Ҳал. а) Азбаски $y'=(x^3+3x)'=3x^2+3=3(x^2+1)$ асту дар $(-\infty;+\infty)$ шарти $y'=3(x^2+1)>0$ иҷро мешавад, пас, худи функсия ҳам мувофиқи теоремаи исботкардаамон дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ афзуншаванда мешавад.

б) Маълум, ки фосилаи $(-\infty;+\infty)$ соҳаи муайянии функсияи $y=\cos 4x-8x$ - ро ташкил медиҳад. Азбаски $y'=-4\sin 4x-8$ ва

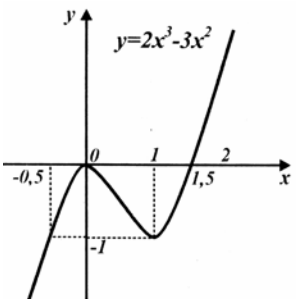
$|\sin 4x| \le 1$ аст, пас барои x – и дилхоҳ $f'(x) < 0$ аст. Аз ин ҷо камшавандагии функсия дар маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ бармеояд.

Дар охир қайд менамоем, ки фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияро кӯтоҳ – **фосилаҳои монотонии функсия ҳам мегӯянд.**

Мисоли 4. Фосилаҳои монотонии функсияи

$y = 2x^3 - 3x^2$ - ро меёбем.

Ҳал. Азбаски $y' = 6x^2 - 6x = 6x(x-6)$ аст, пас нобаробарии $y' > 0$ - ро, ки ба $6x(x-6) > 0$ баробарқувва аст, ҳал намуда фосилаҳои афзуншавиро меёбем: $x < 0$ ва $x > 1$. Нобаробарии $y' < 0$ ё $6x(x-6) < 0$ - ро ҳал карда аниқ менамоем, ки фосилаи камшавӣ $0 < x < 1$ аст.



Расми 71

Графики функсияи $y = 2x^3 - 3x^2$ дар расми 71 акс ёфтааст. Дар он фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии дар боло ёфтаамон, баръало намоён аст.

?

1. Мафҳуми афзуншавӣ ва камшавии функсияро бе ёрии ҳосила шарҳ диҳед. Мисолҳо оред.
2. Теоремаро оид ба афзуншавӣ ва камшавии функсия баён намоед. Дар рафти исбот аз кадом формула истифода мебаранд?
3. Барои муайян кардани фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсия аз кадом дастур истифода мебаранд? Мисолҳо оред.

---

511. Эскизи графики функсияи бефосилаи $y = f(x)$ - и дар порчаи $[a;b]$ додашударо ёбед, агар

а) $a = -1;\ b = 6;\ f'(x) > 0$ дар $-1 < x < 6, f(0) = 0, f(6) = 4;$

б) $a = -4;\ b = 2;\ f'(x) < 0$ дар $-4 < x < 2, f(-4) = 1, f(1{,}5) = -3;$

бошад.

512. Фосилаи афзуншавӣ ва камшавии функсияро ёфта графикашро созед:

а) $f(x) = 2x - 3;$	и) $f(x) = x^3 - 3x^2;$
б) $f(x) = 1 - 4x;$	к) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 8x;$

в) $f(x)=-0{,}25-2;$

г) $f(x)=-3x+5;$

д) $f(x)=2x^2-5x+3;$

е) $f(x)=-x^2+4x-3;$

ж) $f(x)=x^2+x+1;$

з) $f(x)=-x^2+x+1;$

л) $f(x)=x^3-3x^2+3x-8;$

м) $f(x)=x^3+9x;$

н) $f(x)=2+\dfrac{1}{x};$

о) $f(x)=\dfrac{3}{x-1};$

п) $f(x)=1+\dfrac{1}{x^2};$

р) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x}.$

513. Нишон диҳед, ки функсия афзуншаванда аст:

а) $f(x)=x^3+4x-100;$ г) $f(x)=x(x^2+1);$

б) $f(x)=x^5+x^3+x-8;$ д) $f(x)=3x^9+x^7+2x^5-1;$

в) $f(x)=3x-\dfrac{1}{x};$ е) $f(x)=0{,}2\sin 5x+2x.$

514. Исбот кунед, ки функсияи $g(x)$ дар нуқтаҳои соҳаи муайяниаш камшаванда аст:

а) $g(x)=-\dfrac{1}{7}x^7-9x;$ в) $g(x)=\dfrac{5}{x}+3;$ д) $g(x)=\dfrac{1}{x}-x^3+100;$

б) $g(x)=1-3x^3;$ г) $g(x)=\dfrac{x+9}{x};$ е) $g(x)=\cos 3x-6x.$

515. Барои кадом қиматҳои a функсияи $y=ax-\sin x$ дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ меафзояд?

516. Барои кадом қиматҳои a функсияи $y=ax^3+3x^2-2x+7$ дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ кам мешавад?

Машқҳо барои такрор

517. Графики функсияро созед:

а) $y=|x+2|+|x-3|;$ б) $y=\dfrac{3x-2}{|x-1|}.$

518. P – фоизи адади a – ро ҳангоми

а) a=2,5, P=240; б) a=14,5, P=2,5

будан, ёбед.

519. Ифодаро дар намуди бисёраъзогии стандартӣ нвисед:

а) $(x-7)(x+5)-x^3(x^2+2x-1)$; б) $(3a-b)^2+4\left(a-\frac{b}{2}\right)\left(a+\frac{b}{2}\right)$.

520. Содда кунед:

а) $\frac{x^2+12}{x^2-4}-\frac{x+3}{x-2}$; б) $\frac{3-x}{xy-x^2}-\frac{3-y}{y^2-x^2}$.

521. Қуллаи параболаи $y=x^2-8x+11$ дар кадом чоряк ҷойгир аст?

522. Аъзои якум ва махраҷи аъзоҳояш мусбати прогрессияи геометрии беохир камшавандаи (b_n) - ро ҳангоми аъзои дуюмаш ба $\frac{1}{4}$ ва суммааш аз суммаи (b_n^2) се маротиба зиёд будан, ёбед.

523. Дарозӣ ва бари росткунҷаро ҳангоми фарқи ченакҳояш ба 5 м ва масоҳаташ 500 м^2 баробар будан, ёбед.

524. Ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $y=x^2-\frac{5}{x}$; б) $y=x^3-x\cos x$.

47. Нуқтаҳои критикӣ ва экстремуми функсия

Бояд қайд кард, ки мо дар синфи 9 борҳо ба мафҳумҳои нуқтаҳои экстремалӣ ва экстремуми функсия дучор шуда будем. Охирин маротиба бо онҳо ҳангоми омӯзиши функсияҳои тригонометрӣ (боби 2) шинос шудем.

Акнун мафҳуми нишонаҳои мавҷудияти экстремумро бо ёрии ҳосила баён мекунем.

47.1. Маълум, ки барои функсияи дилхоҳи дар ягон фосила муайян ҳолатҳои имконпазири зерин ҷой дорад: а) $f'(x)>0$; б) $f'(x)<0$; в) $f'(x)=0$; г) $f'(x)$ вуҷуд надорад.

Мисоли функсияҳоеро овардан мумкин аст, ки барояшон фақат як қисми ин ҳолатҳо иҷро мешаванд.

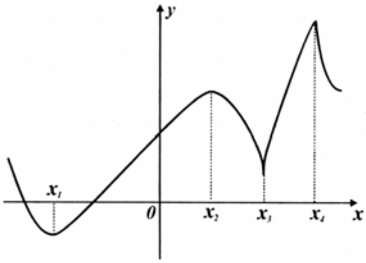
Агар дар п.46 рафтори функсияи дар нуқтаҳои дохилии ягон фосила (аз соҳаи муайянӣ) фақат шартҳои а) ва б) – ро қаноткунанда омӯхта шуда бошанд, дар ин пункт рафтори функсияро ҳангоми ҷой доштани ҳолатҳои в) ва г) тадқиқ мекунем.

Таърифи 1. Нуқтаҳои дохилии соҳаи муайянии функсияи $f(x)$ - ро, ки дар онҳо ҳосилаи тартиби як баробари 0 аст, нуқтаи статсионарӣ* меноманд.

---

* Статсионарӣ аз калимаи лотинии "Stationaris" гирифта шуда маъянояш беҳаракат аст.

Таърифи 2. Маҷмӯи нуқтаҳои статсионарӣ ва нуқтаҳои дохилии соҳаи муайянии функсия, ки дар онҳо ҳосила вуҷуд надорад, нуқтаҳои критикӣ ном доранд (ниг. ба нуқтаҳои x_1, x_2, x_3 ва x_4 - и расми 72)



Расми 72

Дар поён нишон медиҳем, ки фақат дар чунин нуқтаҳо функсия дорои экстремум шуда метавонад.

Масалан, ба расми 71 (ниг. ба п. 46), ки дар он функсияи $y = 2x^3 - 3x^2$ акс ёфтааст, баргашта нуқтаҳои абсиссаашон $x = 0$ ва $x = 1$ - ро дида мебароем. Дар ин нуқтаҳо ҳосилаи функсия ба 0 баробар аст. Дар навбати аввал атрофи нуқтаи $x = 0$ (яъне фосилае, ки ин нуқтаро дар бар мегирад) – ро дида мебароем.

Аз нақша намоён аст, ки қимати калонтаринашро функсияи $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ дар ҳолати $x = 0 \in (-1;1)$ будан, мегирад. Қимати функсияро, ки ба $x = 0$ мувофиқ меояд, максимуми он меноманд. Айнан ҳамин тавр $x = 1$ абсиссаи нуқтаи минимуми функсияи $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ мешавад, чунки қимати он дар ҳамин нуқта аз қиматҳои дилхоҳи дигари ягон атрофи $x = 1$ (масалан (1; 2)) хурд аст.

47.2. Теоремаи Ферма* (нишонаи зарурии мавҷудияти экстремум). Агар нуқтаи x_0 нуқтаи экстремуми функсияи дифференсиронидашавандаи $f(x)$ бошад, онгоҳ ҳосилаи он дар ҳамин нуқта ба 0 баробар аст.

Исбот. Агар нишон диҳем, ки ҳангоми $f'(x) \neq 0$ будан абсиссаи нуқтаи x_0 экстремуми функсия намешавад, онгоҳ

---

* Ферма Пьер (1601-1665) – риёзидон ва ҳуқуқшиноси франсавӣ буда дар назарияи ададҳо асарҳои намоён навиштааст. Ӯ муаммоҳои зиёде пешниҳод кардааст, ки дар байнашон «муодилаи $x^n + y^n = z^n$ дар қимати натуралии аз ду калон ҳалҳои натуралӣ надорад» то ҳоло исботи худро наёфтааст. Ӯ дар физика (аниқтараш дар қисми оптика) низ як қатор натиҷаҳои назаррас дорад. Ферма асосгузори геометрияи аналитикӣ мебошад. Хонанда як қатор маълумотҳои дигарро аз қисми маълумотҳои таърихӣ ёфта метавонад.

теоремаро исбот кардагӣ мешавем. Бо ин мақсад аввал $f'(x)$ - ро аввал калон аз 0 мегирем: $f'(x) > 0$. Онгоҳ аз таърифи ҳосила ҳангоми $x \to x_0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0) \qquad \left(\text{ё} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \right).$$

Агар $f'(x) > 0$ бошад, пас худи нисбат ҳам барои ҳамаи x – ҳои ба x_0 кифоя наздик мубат мешавад:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0.$$

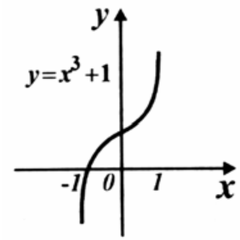
Аз нобаробарии охирин ҳосил мекунем:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) > f(x_0)\,\text{агар}\, x > x_0 \,\text{бошад} \Rightarrow x_0 - \text{абсиссаи} \\ \text{нуқтаи максимум шуда наметавонад;} \\ f(x) < f(x_0)\,\text{агар}\, x < x_0 \,\text{бошад} \Rightarrow x_0 - \text{абсиссаи} \\ \text{нуқтаи миннимум шуда наметавонад.} \end{cases}$$

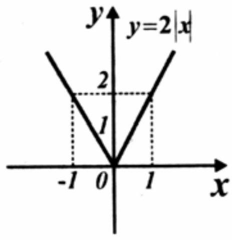
Ҳолати $f'(x) < 0$ айнан ҳамин тавр исбот карда мешавад.

Қайд. Ҳосилаи функсияи $y = x^3 + 1$ дар нуқтаи $x = 0$ ба 0 баробар бошад ҳам, барои функсия нуқтаи экстремалӣ шуда наметавонад. **(Расми 73)**. Функсия дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ афзншаванда аст, чунки $f'(x) = \left(x^3 + 1\right)' = 3x^2 > 0$ мебошад. Барои ҳамин ҳам теоремаи исбот кардаамон шарти зарурии мавҷудияти экстремум буда, ҳаргиз шарти кифоягӣ шуда наметавонад.

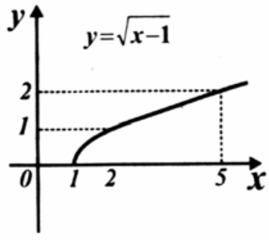
Чӣ хеле, ки дар боло қайд кардем, функсия дар нуқтаҳои ҳосилааш мавҷуд набуда низ дорои экстремум мешавад. Ба сифати мисол функсияи $y = 2|x|$ - ро мегирем. Маълум аст, ки функсияи $|x|$ дар нуқтаи $x = 0$ дорои ҳосила нест. Вале мушоҳидаи бевоситаи графики $y = 2|x|$ **(расми 74)** аз он шаҳодат медиҳад, ки 0 нуқтаи критикӣ буда, худи функсия дар он дорои минимум аст.



Расми 73

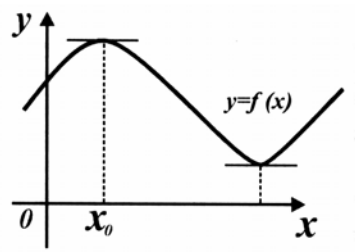


Расми 74



Расми 75

Ниҳоят қайд мекунем, ки агарчанде $f'(1)$ вуҷуд надошта бошад ҳам, нуқтаи $x=1$ барои функсияи $f(x)=\sqrt{x-1}$ нуқтаи критикӣ шуда наметавонад (**расми 75)** . Сабаби асосӣ дар он аст, ки нуқтаи $x=1$ нуқтаи дохилии соҳаи муайянӣ нест.



Расми 76

Шарти $f'(x_0)=0$ маънои геометрии зеринро дорад: дар нуқтаи экстремум функсияи дифференсиро-нидашавандаи $f(x)$ расандаи ба тири $0x$ паралелро доро аст **(расми 76)**

Теорема (нишонаи кифоягии мавҷудияти экстремум). Агар функсияи $f(x)$ - и дар нуқтаи x_0 бефосила дар фосилаи $(a;x_0)$ шарти $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ ва дар фосилаи $(x_0;b)$ шарти $f'(x)<0$ $(f'(x)>0)$ - ро қаноат намояд, онгоҳ x_0 нуқтаи максимуми (минимуми) функсияи $y=f(x)$ мешавад.

Пеш аз исбот қайд мекунем, ки шарти теоремаро ин хел ҳам баён кардан мумкин аст: агар дар атрофи нуқтаи x_0 аломати ҳосила аз плюс ба минус иваз шавад, x_0 - нуқтаҳои максимум ва агар аломати ҳосила аз минус ба плюс тағйир ёбад, онгоҳ x_0 нуқтаи минимум мешавад. Бо дигар ибора, агар ҳангоми гузариш аз болои нуқтаи x_0 аломати ҳосила доимӣ монад, онгоҳ функсия дорои экстремум намешавад. Хотиррасон мекунем, ки маҳз аз ҳамин сабаб нуқтаи $x=0$ барои функсияи $y=x^3+1$ нуқтаи экстремалӣ набуд (аломати ҳосила дар атрофи нуқтаи $x=0$ фақат мусбат буд).

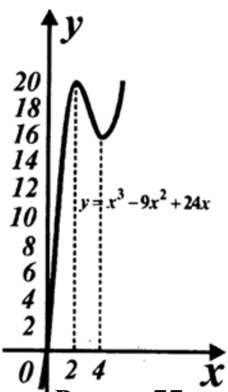
Акнун ба исботи теорема шурӯъ мекунем.

Исбот. Бигузор функсияи дар нуқтаи x_0 бефосилаи $f(x)$ шарти $f'(x)>0$ - ро дар нуқтаҳои $(a;x_0)$ қаноат намояд. Онгоҳ дар асоси теоремаи п.46 функсияи номбурда дар $(a;x_0)$ меафзояд. Аз ин ҷо $f(x)<f(x_0)$ мешавад. дар фосилаи $(x_0;b)$ функсияи $f(x)$ кам мешавад, чунки дар ин нуқтаҳо $f'(x)<0$ аст. Пас мешавад. Ҳамин тариқ, барои x – ҳои нобаробари x_0 - и фосилаи $(a;b)$ нобаробарии $f(x)<f(x_0)$ иҷро мешавад, ки он аз нуқтаи максимумро ифода кардани x_0 шаҳодат медиҳад.

Исботи дар боло кардаамон нишонаи кифоягии мавҷудияти максимуми функсия буд. Нишонаи кифоягии мавҷудияти минимум айнан ҳамин тавр исбот карда мешавад.

Дар асоси муҳокимаҳои дар боло гузаронидаамон ҷадвали зеринро тартиб додан мумкин аст:

№ б/т	Аломати $f(x)$ дар атрофии нуқтаи x_0		Равиши функсия дар нуқтаи x_0
	$x<x_0$	$x>x_0$	
1	-	+	Минимум
2	+	-	Максимум
3	-	-	Экстремум надорад; дар атрофи x_0 функсия камшаванда аст.
4	+	+	Экстремум надорад; дар атрофи x_0 функсия афзуншаванда аст.



Расми 77

Ҳангоми тадқиқи функсия оид ба экстремум аз рӯи дастури зерин амал мекунем;

1). Соҳаи муайянии функсияро муайян карда ҳосилаи $f''(x)$ - ро меёбанд;

2). нуқтаҳои критикии функсияро ошкор месозанд;

3). аломати ҳосилаи функсияро дар атрофи нуқтаҳои критикӣ муайян мекунанд;

4). дар асоси нишонаи кифоягии мавҷудияти экстремум хулосаҳои заруриро мебаробаранд.

Ба дастури характери намунавӣ доштани боло такя намуда истода якчанд мисолу масъалаҳоро ҳал мекунем.

Мисоли 1. Функсияи $y = x^3 - 9x^2 + 24x$ - ро доир ба экстремум тадқиқ мекунем.

1) Чун бисёраъзогии тартиби 3 функсия ва ҳосилааш дар тамоми фосилаи $(-\infty;+\infty)$ муайяну бефосила аст. $f'(x)$ - ро меёбем:

$$y' = (x^3 - 9x^2 + 24x)' = 3x^2 - 18x + 24.$$

2) Муодилаи $f'(x) = 0$ - ро ҳал карда нуқтаҳои статсионариро ошкор месозем;

$$3x^2 - 18x + 24 = 0; \quad x^2 - 6x + 8 = 0;$$

$$x_{1,2} = 3 \pm 1, \quad x_1 = 4; \quad x_2 = 2.$$

3)-4). Нуқтаҳои 2 ва 4 тири ададиро ба се фосила ҷудо менамояд. Аломати $f'(x) = (x-2)(x-4)$ - ро дар онҳо ошкор сохта, қимати функсияро дар нуқтаҳои 2 ва 4 – и ба экстремум шубҳанок ҳисоб карда таблитсаи зеринро пур мекунем:

x	$(-\infty;2)$	2	(2;4)	4	$(4;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\uparrow$	20	$\downarrow$	16	$\uparrow$
Ху-лоса	афзуншаванда	max $\cap$	камшаванда	min $\cup$	афзуншаванда

Аз таблитса маълум, ки $y_{max} = f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 = 20$ ва $y_{min} = f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 = 64 - 144 + 96 = 16$ мешавад. Графики функсия дар расми 77 тасвир карда шудааст.

Мисоли 2. Функсияи $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ - ро доир ба экстремум тадқиқ мекунем.

Ин функсия дар тамоми нуқтаҳои нобаробарии $x^2 - 2x \geq 0$ - ро қаноаткунанда муайян аст. Онро бо ёрии методи фосилаҳо ҳал карда, $D(f) = (-\infty;0] \cup [2;+\infty)$ - ро ҳосил менамоем.

$f'(x)$ - ро аз рӯи формулаи $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{y'}{2\sqrt{u}}$ - и ҷадвали ҳосилаҳо меёбем:

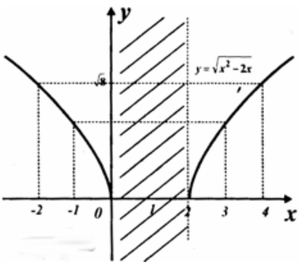
$$y' = f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 2x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x}} \cdot \left(x^2 - 2x\right)' = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2}} = \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 2}}$$

Аз $f'(x)=0$ муодилаи $x-1=0$ ҳосил мешавад, ки ҳаллаш $x=1\notin D(f)$. Нуқтаҳои $x=0$ ва $x-1=0$ - и соҳаи муайяниро, ки дар онҳо ҳосила вуҷуд надорад, дар тири ададӣ қайд мекунем. Баъд аз он, ба монанди мисоли 1 таблитсаи зеринро пур мекунем:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	-	вуҷуд надорад	вуҷуд надорад	+
$f(x)$	$\downarrow$	0	вуҷуд надорад	$\uparrow$
Хулоса	камшаванда	экстремум надорад	функсия муайян нест	афзуншаванда

Функсия дар фосилаи $(-\infty;0)$ фақат кам ва дар фосилаи $(2;+\infty)$ фақат меафзояд. Тағйирёбии аломат дар атрофи нуқтаҳои 0 (аз рост муайян нест) ва 2 (аз чап муайян нест) мушоҳида карда намешавад, пас функсия дорои экстремум нест (**расми 78** бо штрихҳо соҳае нишон дода шудааст, ки функсия номуайян аст).

Мисоли 3. Экстремуми функсияи $y=x^3(4-x)$ - ро меёбем.



Расми 78

Ҳал. Соҳаи муайяниаш фосилаи $(-\infty;+\infty)$ мешавад (чун бисёраъзогии дараҷаи чор). Ҳосилаи ёфтамон ҳам чун худи функсия дар ҳамаи нуқтаҳои $D(f)$ муайян ва бефосила аст. Онро баробари нул кунонида решаҳои $x=0$ ва $x=3$ - ро ҳосил мекунем, ки оид ба экстремум шубҳаноканд.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;3)$	3	$(3;+\infty)$
y'	+	0	+	0	-
y	$\uparrow$	0	$\uparrow$	27	$\downarrow$
хулоса	афзуншаванда	Экстр. надорад	афзуншаванда	max $\cap$	камшаванда

Нишондодҳои болоӣ шаҳодат медиҳанд, ки $x=0$ нуқтаи экстремум шуда наметавонад Вале дар нуқтаи $x=3$ функсия дорои максимум аст, чунки дар атрофи он ҳосила аломаташро аз плюс ба минус иваз мекунад.

$$y_{\max}=y(3)=3^3\cdot(4-3)=27\cdot 1=27$$

47.3. Қайд. Функсияро доир ба экстремум бо ёрии ҳосилаи тартиби дуюм (ва аз он боло) ҳам тадқиқ мекунанд. Теоремае, ки беисбот дар поён меорем характери кифоягӣ дорад. Аз ин рӯ онро нишонаи дуюми кифоягии мавҷудияти экстремум низ меноманд.

Теорема. Бигузор $f'(x_0)=0$ ва дар нуқтаи x_0 $f''(x_0)\neq 0$ мавҷуд бошад. Онгоҳ, агар $f''(x_0)>0$ бошад, x_0 - нуқтаи минимум ва ҳангоми $f''(x_0)<0$ будан x_0 - нуқтаи максимуми функсия $f(x)$ мешавад.

Барои ба дурустии теорема боварӣ ҳосил кардан функсияи $y=x^3-9x^2+24x$ - и дар мисоли 1 дида баромадаамонро, мегирем.

Маълум, ки $f'(2)=f'(4)=0$ аст. Азбаски $f''(x)=(3x^2-18+24)=6x-18,\quad f''(2)=-6<0$ ва $f''(4)=6>0$ аст, пас дар асоси нишонаи дуюми кифоягии мавҷудияти экстремум функсия дар нуқтаи $x_0=2$ дорои максимум ва дар нуқтаи $x=4$ дорои минимум мешавад. Чӣ хеле, ки мебинем ин натиҷа ба натиҷаи мисоли 1 якхела аст.

Мисоли 4. Аз рӯи нишонаи дуюми кифоягии мавҷудияти экстремум функсияҳои зеринро тадқиқ мекунем:

а) $f(x)=x^3-3x+4;$

б) $f(x)=x^4-8x^2+16.$

Ҳал. а) Худи функсия (чун бисёраъзогии тартиби се) ва ҳосилааш $f'(x)=3x^2-3$ (чун дуаъзогии квадратӣ) дар тамоми маҷмӯи $R=(-\infty;+\infty)$ муайяну бефосила аст. Муодилаи $f'(x)=0$ - ро ҳал карда нуқтаҳои статсионариро меёбем:

$$f'(x)=0 \qquad 3x^2-3=0,$$

$$3(x^2-1)=0 \qquad x=\pm 1.$$

Акнун ҳосилаи тартиби дуюмро ёфта қимати онро дар нуқтаҳои ± 1 ҳисоб мекунем:

$$f''(x)=(3x^2-3)=6x-0=6x; \qquad f''(1)=6\cdot 1=6>0$$

ва $f''(-1)=6(-1)=-6<0$

Пас, функсия дар нуқтаи $x=1$ дорои минимум мешавад:

$$y_{\min}=f(1)=1^3-3\cdot 1+4=5-3=2; \qquad y_{\min}=2.$$

Дар нуқтаи $\boldsymbol{x}=-1$ бошад, функсия дорои максимум мешавад:

$$y_{\max}=f(-1)=(-1)^3-3(-1)+4=-1+3+4=6; \qquad y_{\max}=6.$$

б) Чун мисоли а) $D(f)$ ва $D(f')$ тамоми маҷмӯи R мешавад. Муодилаи $f'(x)=0$ бошад ба $4x^3-16x=0,$ $4x(x^2-4)=0$ меорад, ки аз он нуқтаҳои $x_1=-2,\ x_2=0$ ва $x_3=2$ -и ба экстремум шубҳанокро меёбем.

Ҳосилаи тартиби ду ва қиматҳои он дар нуқтаҳои x_1, x_2 ва x_3

$$f''(x)=f'(x)=\left(4x^3-16x\right)'=12x^2-16;$$

$$f''(-2)=32>0,\ f''(0)=-16<0,\ f''(2)=32>0$$

мешаванд. Яъне дар нуқтаҳои ± 2 функсия дорои минимум $(y_{\min}=f(\pm 2)=0)$ ва дар нуқтаи 0 дорои максимум $(y_{\max}=f(0)=16)$ мешавад.

Бо мақсади аёнтар тасвир кардани рафти ҳал истифодаи таблитсаи зерин хеле муфид аст:

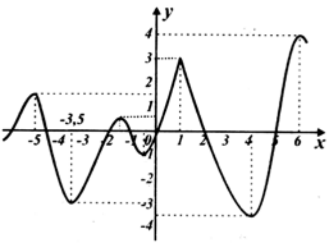
x	-2	0	2
$f'(x)$	0	0	0
$f''(x)$	32	-16	32
$f(x)$	min $\cup$	max $\cap$	min $\cup$
Хулоса	$y_{\min}=0$	$y_{\max}=0$	$y_{\min}=0$

?

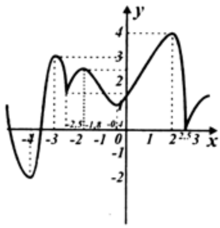
1. Таърифи минимум ва максимуми функсияро диҳед. Мисолҳо оред.
2. Кадом нуқтаҳоро нуқтаҳои статсионарӣ меноманд? Нуқтаи критикӣ чист?
3. Функсия дар кадом нуқтаҳо ба экстремум шубҳанок аст?
4. Шарти зурурии мавҷудияти экстреумро баён кунед. Оё натиҷаи ин шарт ҳамавақт нуқтаҳои ба экстремум шубҳанокро дода метавонад? Мисолҳо оред, ки шарти зарурии мавҷудияти экстремум иҷро шавад ҳам, вале дар x_0 функсия дорои экстремум намешавад.
5. Нишонаи кифоягии мавҷудияти экстремумро баён кунед. Мисолҳои аёнӣ биёред. Тарзи бо ёрии ҳосилаи тартиби ду доир ба экстремум тадқиққунии функсияҳоро баён кунед.

525. Дар расми 79 графики функсияи $y=f(x)$ кашида шудааст. Нуқтаҳои максимум ва минимуми функсияро ёбед.

526. Дар расми 80 графики функсияи $y=f(x)$ акс ёфтааст. Нуқтаҳои критикии функсияро ёбед.



Расми 79



Расми 80

527. Нуқтаҳои статсионарии функсияҳоро ёбед:

а) $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$; б) $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+x$; в) $y=\sin x-\cos x$.

528. Нуқтаҳои критикии функсияҳои зеринро ёбед:

а) $x^2(x-12)^2$; б) $y=(x-1)(x-2)^3$;

в) $y=x^4-8x^3+24x^2-32x+12$; г) $y=\dfrac{16}{x(4-x^2)}$;

д) $y=x^3+3x+7$; е) $y=3\sqrt{x}$.

529. Нуқтаҳои экстремум ва экстремали функсияро ёбед:

а) $y=x^2-3x+11$; б) $y=3x^2+5x-19$; в) $y=-x^2+8x$;

г) $y=\dfrac{x}{5}+\dfrac{5}{x}$; д) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{18}{x}$; е) $y=1-6x-x^2$;

ж) $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{3}x^3$; з) $y=3x^3+1$; и) $y=\sqrt{x^2+1}$.

530. Агар

а) $f(x)=2x^2-8x$; б) $f(x)=x^3-27x+1$; в) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$;

г) $f(x)=\dfrac{4-x}{3x+6}$; д) $f(x)=6x^5+15x^4+10x^3$.

бошад, онгоҳ фосилаҳои монотонӣ ва нуқтаҳои экстремуми функсияро ёбед.

531. Нуқтаҳои ба экстремум шубҳанокро ошкор сохта қимати функсияро дар ин нуқтаҳо ёбед:

а) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$; б) $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$.

532. Оё функсияҳои зерин нуқтаҳои ба экстремум шубҳанок доранд:

а) $y = 5x - 7$; б) $y = 9 - 11x$; в) $y = 2x^3 + x$; г) $y = \frac{x}{3} - \frac{2}{x}$?

533. Функсияи

а) $f(x) = x^3(x-1)^2$; б) $f(x) = 3x^5 - x^4 - 1$;

в) $f(x) = \frac{4}{x(2-x^2)}$; г) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

- ро бо ёрии ҳосилаи тартиби ду доир ба экстремум тадқиқ намоед.

Машқҳо барои такрор

534. Қатора аз назди одами дар платформа беҳаракат истода дар муддати 6 сония, аз платформаи дарозиаш 150 м дар муддати 15 сония гузашт. Суръати ҳаракати қатора ва дарозии онро ёбед.

535. Ҳисоб кунед:

а) $\frac{3\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}\right):1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$; б) $\left(\frac{3{,}75+2{,}5}{2\frac{1}{3}-1{,}875}-\frac{2{,}75-1{,}5}{8\frac{1}{8}+1{,}5}\right):\frac{10}{11}$.

536. Касрро содда кунед:

а) $\frac{a^2+2x-15}{a^2-9}$; б) $\frac{2b^2-5b-3}{b^2+b-6}$; в) $\frac{2c^2-3c-2}{c^2+3c-10}$.

537. Исбот кунед, ки суммаи

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

ба $\frac{n}{n+1}$ баробар аст.

538. Муодиларо ҳал кунед:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{18}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right).$$

539. Чор адади пай дар паи натуралиеро ёбед, ки ҳосили зарбаш ба 5040 баробар бошад.

540. Ҳосилаи тартиби дуи функсияҳоро ҳангоми

а) $y = 4x - 3\sin 2x$; б) $y = 5x + 3\cos 5x$

будан ёбед.

541. Исбот кунед, ки функсияи $y = x + \frac{1}{x}$ дар фосилаи (-1;1) камшаванда аст.

542. Агар $y = 2x + 1$ бошад, онгоҳ дар кадом қиматҳои x ифодаи $-3y' + 8y$ баробари 0 мешавад.

48. Сохтани графики функсия

Бо мақсади хусусиятҳои муҳими функсияҳоро ба ҳисоб гирифтан ва бехато сохтани (эксизи) графики функсия дохил намудани схемаи зерин муфид аст:

1. Хосияти функсияҳои тадқиқшавандаи $y = f(x)$ - ро ба ҳисоб гирифта соҳаи муайянии онро меёбанд. Барои осонии кор онро дар фосилаи $(a;b)$ маълум мешуморем: $D(f) = (a;b)$ (он тамоми нуқтаҳои тири ададиро низ ифода карданаш мумкин аст);

2. Ҷуфт, тоқ, даврӣ будан ё набудани функсияро ошкор месозанд. Ин пункт имконият медиҳад, ки мувофиқан нисбат ба тири 0y, ибтидои координата ва ё дар фосилаҳои муайян симметрӣ будани графикро муайян намоем;

3. Нуқтаҳои бурриши графики функсияро бо тирҳои координата меёбем (яъне ба ёфтани нуқтаҳои $(0; f(0))$ ва $(x_0;0)$, ки барои охиринаш $f(x_0) = 0$ аст, машғул мешавем). Координатаи якчанд нуқтаҳоеро меёбем, ки ҷойгиршавии графикро дар чорякҳо ифода кунад;

4. Муодилаи $f(x) = 0$ - ро ҳал намуда фосилаҳои доимияти аломатро муайн мекунем, чунки фақат ҳангоми гузариш аз болои нулҳо* функсия аломаташро дигар менамояд;

5. Муодилаи $f'(x) = 0$ - ро ҳал карда нуқтаҳои статсионарии функсияро ёфтан мумкин аст. Ба онҳо нуқтаҳои ба соҳаи муайянӣ дохилшавандаю, вале дар онҳо ҳосилаи тартиби якаш мавҷуд набударо илова намуда нуқтаҳои критикиро ошкор сохтан зарур аст. Аломати ҳосилаи функсияро дар атрофи нуқтаҳои критикӣ муайян намуда фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияро меёбем;

---

* Мисолҳои зиёде мавҷуданд, ки ҳангоми гузариш аз болои нуқтаҳои каниш (яъне нуқтаҳои бефосилагиро вайронкунанда) аломати қимати худро тағйир медиҳанд.

6. Характери нуқтаҳои критикиро омӯхта (дар асоси нишонаи кифоягии мавҷудияти экстремум) қиматҳои экстремалии функсияро дар ин нуқтаҳо меёбем;

7. Рафтори функсияро ҳангоми $x \to a$ ва $y \to b$ (яъне дар нуқтаҳои фосилаи соҳаи муайянӣ) тадқиқ мекунем;

8. Дар асоси пунктҳои 1-7 графики функсияро месозем.

Қайд. Ҳангоми тадқиқи баъзе функсияҳо на ҳамаи пунктҳои болоӣ истифода бурда мешаванд.

Масалан, агар ҳосилаи функсия дар тамоми нуқтаҳои $D(f)$ нобаробари 0 бошад (яъне ё камшаванда ва ё афзуншаванда), онгоҳ ҳоҷат ба тадбиқ аз рӯи пункти 6 намемонад.

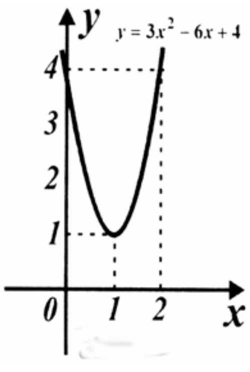
Мисоли 1. Графики функсияи $y = 3x^2 - 6x + 4$ - ро месозем.

Ҳал. 1. $D(f) = (-\infty;+\infty)$. 2. Функсия на ҷуфт аст ва на тоқ, чунки барояш шартҳои $f(-x) = f(x)$ ва $f(-x) = -f(x)$ дар $(-\infty;+\infty)$ иҷро намешаванд. Яъне график ба тири $0y$ ва нисбат ба ибтидои координата симметрӣ нест. 3. График тири $0x$ – ро намебурад, чунки дискриминанати муодилаи $3x^2 - 6x + 4 = 0$ (яъне $f(x) = 0$) манфӣ аст. График бо тири $0y$ дар нуқтаи (0;4) бурида мешавад. 5. $f'(x) = 0$ - ро ҳал мкунем:

$$(3x^2 - 6x + 4)' = 0,\ 6x - 6 = 0,\ 6x = 6,\ x = 1.$$

Азбаски дар фосилаи $(-\infty;1)$ аломати ҳосила манфӣ ва дар $(1;+\infty)$ мусбат аст, пас дар нуқтаи $x = 1$ функсия дорои минимум мешавад:

$$y_{\min} = y(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 4 = 3 - 6 + 4 = 1.$$



Расми 81

Графики функсия намуди зеринро дорад (расми 81).

Мисоли 2. Функсияи $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ - ро тадқиқ намуда графикикашро месозем.

Ҳал: Тадқиқотро аз рӯи схемаи пешниҳодшуда амалӣ мегардонем.

1. Функсия чун бисёраъзогӣ дар тамоми $R = (-\infty;+\infty)$ муайян аст.

2. Соҳаи муайяни нисбат ба 0 симметрӣ буда, вале худи функсия дар он на ҷуфт асту ва на тоқ. Функсия даврӣ ҳам нест, чунки барои ихтиёри $x \in R = (-\infty;+\infty)$ $f(x+\omega) \neq f(x)$

3-6. График тири $0y$ – ро (яъне $x = 0$) дар нуқтаи (0;1) мебурад.

Муодилаи $f'(x) = 0$ - ро ҳал мекунем:

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \ (x-1)(x-3) = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Аз рӯи ин ду нуқтаи ба экстремум шубҳанок ҷадвали зеринро тартиб медиҳем:

x	$(-\infty;1)$	1	(1;3)	3	$(3;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\uparrow$	$\frac{7}{3}$	$\downarrow$	1	$\uparrow$
Хулоса	афзуншаванда	max $\cap$	камшаванда	min $\cup$	афзуншаванда

Қимати функсия дар фосилаи $(-\infty;1)$ аз -∞ то $\frac{7}{3}$ меафзояд (аломатҳо дар нугҳои порчаҳо гуногунанд!), пас фақат дар ҳамин фосила (аниқтараш дар $(-1;0) \in (-\infty;1)$ муодилаи $f(x) = 0$ расо як реша дошта метавонад. Онро бо x_0 ишорат карда $(x_0 \in (-1;0))$ муайян менамоем, ки график тири $0x$ – ро дар нуқтаҳои $(x_0;0)$ мебуридааст.

Аз тарафи дигар графики функсия дар нуқтаҳои абсиссаашон тааллуқи фосилаи $(-\infty; x_0)$ дар чоряки сеюми нимҳамвории поёни тири $0x$ ва дар нуқтаҳои абсиссаашон тааллуқи $(x_0;+\infty)$ буда дар нимҳамовории аз тири $0x$ боло ҷойгир мешаванд.

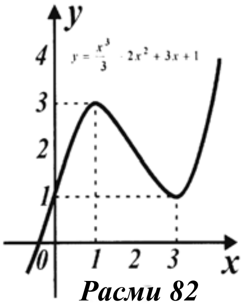
Ниҳоят аз ҷадвал чунин бармеояд, ки функсия дар фосилаҳои $(-\infty;1)$ ва $(3;+\infty)$ афзуда, дар фосилаи (1;3) кам мешавад. Яъне дар атрофи нуқтаҳои 1 ва 3 ҳосила аломаташро иваз мекунад ва

$$y_{\max} = f(1) = \frac{7}{3}, \ y_{\min} = f(3) = 1$$

мешавад.

7. Маълум, ки ҳангоми $x \to -\infty$ $y \to -\infty$ ва ҳангоми $x \to +\infty$ $y \to +\infty$.

8. Дар асоси маълумотҳои 1-7 эксизи график намуди расми 82 – ро мегирад.



Расми 82

Мисоли 3. Функсияи $y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$ -ро тадқиқ карда графикашро месозем.

Ҳал. $D(f)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$

1. Бефосилагиаш дар нуқтаи $x=2$ вайрон мешавад, яъне адади 2 абсиссаи нуқтаи каниш буда, хати каҷи графикро ифодакунанда дар он канда мешавад.

2. Функсия на даврӣ, на ҷуфт ва на тоқ аст, яъне график ба ягон хел хосиятҳои симметрӣ доро нест.

3. График тирҳои координатиро дар нуқтаҳои (-1;0) ва $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ мебурад.

4. Функсия дар фосилаҳои $(-\infty;-1)$ ва $(-\infty;-1)$ ва $(-1;2)$ қиматҳои фақат манфӣ (яъне график дар нимҳавории дар поёни тири $0x$ воқеъ буда, ҷойгир аст) ва дар қиматҳои $(2;+\infty)$ қиматҳои фақат мусбат мегирад (яъне график дар нимҳамвории дар болои тири $0x$ воқеъ буда, ҷойгир аст)

5;6. Муодилаи $f'(x)=0$ - ро ҳал мекунем:

$$f'(x)=\left[\frac{(x+1)^2}{x-2}\right]'=\frac{2(x+1)(x-2)-(x+1)^2}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{(x+1)(2x-4-x-1)}{(x-2)^2}=\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}=0\Rightarrow(x+1)(x-5)=0,\ x_1=-1,\ x_2=5.$$

Бо мақсади ёфтани фосилаҳоҳои монотонӣ ва экстремуми функсия ҷадвали зеринро тартиб медиҳем:

x	$(-\infty;-1)$	-1	(-1;2)	2	(2;5)	5	(3;+∞)
$f'(x)$	+	0	-	Вуҷуд надорад	-	0	+
$f(x)$	↑	0	↓	Вуҷуд надорад	↓	12	↑
Хулоса	афзуншаванда	max ∩	камшаванда	Экст. нест	камшаванда	min ∪	афзуншаванда

Аз таблитса аён аст, ки (-1; 0) нуқтаи максимуми функсия ва (5;12) – нуқтаи минимуми функсия мешавад.

7. Ҳангоми $x \to 2$ $y \to \infty$ мекунад.

8. Натиҷаи пунктҳои 1-7 – ро ҷамъбаст намуда графики фуксияро месозем, ки он дар расми 83 акс ёфтааст.

Мисоли 4. Функсияи $y = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x$ - ро тадқиқ намуда графикашро месозем.

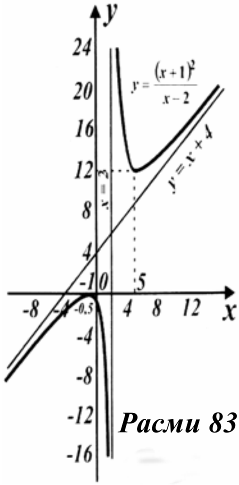
Ҳал. 1. Соҳаи муайянӣ ва бефосилагии (чун суммаи алгебравии функсияҳои бефосила) функсия тамоми нуқтаҳои тири аддаӣ мешавад.

2-4. Функсия тоқ аст, чунки дар соҳаи нисбат ба 0 симетрии $(-\infty;+\infty)$ шарти

$$f(-x) = \sin(-x) - \frac{1}{2}\sin(-2x) = -\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x = -\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = -f(x)$$

иҷро мешавад. Пас, графикаш нисбат ба ибтидои координата симметрӣ аст.

Функсия даврӣ буда давраш $\omega = 2\pi$ аст. Аз ин рӯ тадқиқотро фақат дар порчаи $[-\pi;\pi]$ гузаронида, графикашро сохта натиҷаро (дар асоси хосияти давригӣ) ба тамоми тири ададӣ давом медиҳем.



Расми 83

Тоқ будани функсия имконият медиҳад, ки графикро на дар тамоми $[-\pi;\pi]$ балки дар $[0;\pi]$ созему баъд онро нисбат ба ибтидои координата симметрӣ инъикос намоем ва баъд даврӣ будани $f(x)$ - ро ба ҳисоб гирем. Ҳамин тариқ, минбаъд тадқиқотро дар $[0;\pi]$ мегузаронем.

Барои ёфтани абсиссаи нуқтаҳои бурриш бо тири $0x$ муодилаи

$$\sin x - 0{,}5\sin 2x = 0$$

- ро ҳал мекунем.

Аз он $\sin x - \sin x \cdot \cos x = 0$ ва ё

$$\sin x(1 - \cos x) = 0$$

- ро ҳосил мекунем. Дар порчаи номбурдаи $[0;\pi]$ муодилаи охирин ду решаҳои $x_1 = 0$ ва $x_2 = \pi$ - ро дорад. Яъне графики функсия тири $0x$ – ро дар ягон нуқтаи дохилии порча намебурад.

Дар фосилаи $(0;\pi)$ функсия фақат қимати мусбат гирифта графикаш дар нимҳамвории болои тири $0x$ ҷой мегирад (дар

$\forall x \in (-\pi;0)$ бошад $f(x) < 0$ шуда, графикаш дар нимҳамвории поёнӣ мавқеъ дорад).

Дар нӯгҳои порча $f(0) = f(\pi) = 0$ мешавад.

5,6. Барои ба фосилаҳои монотонӣ ноил гаштан муодилаи $f(x) = 0$ - ро ҳал мекунем:

$$\cos x - \cos 2x = 0,$$

$$\cos x - (1 + \cos 2x) + 1 = 0,$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0,$$

$$\cos x = 1,\ \cos x = \frac{1}{2}.$$

Аз муодилаи якум $x = 0$ ва аз дуюмаш $x_2 = \frac{2\pi}{3}$ - ро меёбем. Нуқтаи $\frac{2\pi}{3}$ сегменти $[0;\pi]$ - ро ба ду сегментҳои $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ ва $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$ ҷудо мекунад.

Дар нуқтаҳои сегменти якум нобаробарии $f'(x) = \cos x - \cos 2x \geq 0$ иҷро мешавад. Пас, функсия дар он меафзояд.

Азбаски дар нуқтаҳои сегменти дуюм шарти $f'(x) \leq 0$ иҷро мешавад, пас дар он функсия кам мешавад.

Дар атрофи нуқтаи $x = \frac{2\pi}{3}$ афзуншавӣ ба камшавӣ иваз шуда функсия дорои максимум аст:

$$y_{\max} = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

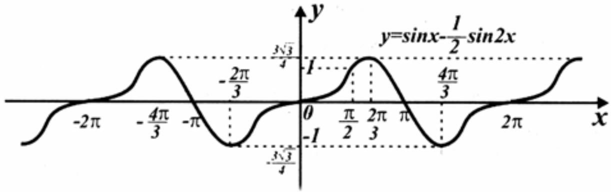
(дар нуқтаи $x = -\frac{2\pi}{3}$ функсия дорои минимум аст):

$$y_{\min} = f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

7. Барои тарҳи (эксиз) дурусти графикро сохтан ҷадвали зерини баъзе қиматҳои функсияро меорем:

x	0	$\arccos\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f(x)$	0	$\approx\frac{3}{4}$	1	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

8. Графики функсия намуди зеринро дорад:



Расми 84

?

1. Барои сохтани графики функсия бо ёрии ҳосила аз рӯи кадом схема амал мекунанд?
2. Оё истифодаи ҳамаи 8 пункт дар тадқиқи функсияҳо ҳатмист?
3. Мисоли функсияҳоеро оред, ки барояш дастури пешниҳодшуда характери намунавиро дорад.

543. Аз рӯи графики функсияи $y=f(x)$ - и дар расми 85 тасвирёфта

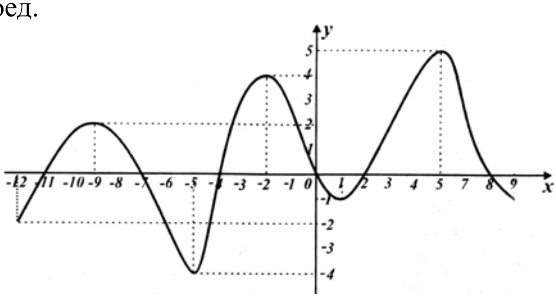
а) соҳаи муайянӣ ва тағйирёбии функсия;

б) нулҳои функсия

в) фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсия;

г) қимати экстремалии функсия

- ро ёбед.



Расми 85

544. Дар порчаи $[-2;5]$ тарҳи графики функсияи бефосилаи $y=f(x)$ - ро аз рӯи маълумотҳои ҷадвали

x	-2	(-2;1)	1	(1;4)	4	(4;5)
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	-2	$\uparrow$	3	$\downarrow$	0	$\uparrow$

ва шартҳои $f(-1)=0,\ f(4)=0,\ f(0)=2,\ f(5)=1$ созед.

545. Графики функсияи квадратиро созед:

а) $f(x)=3x^2-2x+11$; б) $f(x)=5x^2-3x-2$; в) $f(x)=x^2-2x$;

г) $f(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+2x-\dfrac{1}{3}$; д) $f(x)=-x^2+4x-4$;

е) $f(x)=\dfrac{x^2}{5}-x+3$; ж) $f(x)=3-4x-x^2$;

з) $f(x)=3x^2-7x+4$; и) $f(x)=-2x^2-2x+5$;

к) $f(x)=-6x^2-24x+13$; л) $f(x)=x^2+8x+1$.

546. Функсияро тадқиқ намуда графикашро созед:

а) $y=2x^3-7x+5$; б) $y=x^3-3x$; в) $y=3x^3-9x+6$;

г) $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+4x$; д) $y=x^3+x^2$; е) $y=x^4-3x^2+2$;

ж) $y=3x^4-x^2-2$; з) $y=x^4-x^2$; и) $y=0,2x^5-\dfrac{1}{3}x^3$;

к) $y=\dfrac{12}{5}x^5-4x^3$; л) $y=x^5-5x^4$; м) $y=\dfrac{x^4-16}{x}$;

н) $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$; о) $f(x)=x+2\sqrt{-x}$; п) $y=x\sqrt{1-x}$.

547. Функсияи тригонометриро тадқиқ карда графикашро созед:

а) $y=2\sin\dfrac{x}{2}$; б) $y=\dfrac{1}{2}\cos 2x$;

в) $y=1+\cos x$; г) $y=-1+\sin x$.

Машқҳо барои такрор

548. Қимати решаро ёбед:

а) $\sqrt{\dfrac{165^2-124^2}{164}}$; б) $\sqrt{\dfrac{149^2-76^2}{73}}$; в) $\sqrt{\dfrac{288}{176^2-112^2}}$.

549. Моҳигир бо қаиқ аз пункти A ба болооби дарё (яъне муқобили ҷараён) ҳаракат кард. Баъди 6 км – ро тай намудан белҳои қаиқрониро ба як тараф гузошта ӯ бо моҳигирӣ машғул шуд. Ҷараёни дарё қаикро баъди 4 соату 30 дақиқа аз пункти A баромаданш боз ба мавқеъи аввала овард. Агар суръати дарё 2 км/соат бошад, суръати қаикро дар оби ором ёбед.

550. Муодилаҳои зеринро ҳал кунед:

а) $\frac{x+15}{4}-\frac{21}{x+2}=2;$ б) $\frac{16}{x-3}+\frac{30}{1-x}=3.$

551. Хатогиро дар исботи зерин нишон диҳед:

$$16-36=20-45; \qquad 16-36+\frac{81}{4}=25-45+\frac{81}{4};$$

$$4^2-2\cdot4\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2\cdot5\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2;$$

$$\left(2\cdot2-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2; \quad 2\cdot2-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}; \quad 2\cdot2=5.$$

552. Графики функсияи $y=f(x)$ - и дар сегменти $[a;b]$ бефосиларо дар ҳолатҳои зерин созед:

а) $a=-4,\ \ b=2,\ \ f(-4)=-2,\ \ f(x)$ дар порчаи $[-4;0]$ афзояду дар $[1;2]$ функсияи $f(x)=x$ - ро ифода кунед;

б) $a=1,\ \ b=6,\ \ f(6)=2$ дар $[1;2]$ $f(x)=x^2$ - ро ифода намуда $(2;6]$ кам шавад.

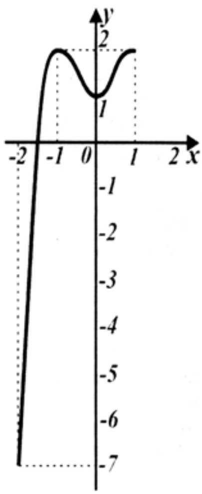
553. Муодилаи расандаро ба хати каҷи $y=x^3+1$ дар нуқтаи $x_0=1$ тартиб диҳед.

49. Ёфтани қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсия

Дар амалия масъалаҳоеро ҳал кардан зарур меояд, ки дар онҳо ёфтани қимати калонтарин ва ё хурдтарини функсия дар ягон порча зарур аст.

Духтани курта аз рӯи як миқдор мовут бо назардошти сарфи камтарин, ёфтани қимати росткунҷаи масоҳаташ калонтарин аз байни росткунҷаҳои периметрашон баробар ва ҳоказо мисоли чунин масъалаҳоянд.

Функсияи $y=x^4+2x^2+1$ - ро дар порчаи $[-2;1]$ дида мебароем, ки графикаш дар расми 86 акс ёфтааст. Қимати калонтаринро дар $[-2;1]$, ки ба 2 баробар аст, функсия дар ду нуқтаҳои $x=-1$ ва $x=1$ мегирад. Қимати хурдтаринро бошад, ки ба -7 баробар аст, дар нуқтаи $x=-2$ қабул менамоянд. Нуқтаи $x=0$ нуқтаи минимуми функсия мешавад. Яъне чунин атрофи нуқтаи $x=0$ мавҷуд аст, ки (масалан, фосилаи $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$) қимати хурдтаринро функсия фақат дар нуқтаи $x=0$ мегирад. Вале дар порчаи дарозии нисбат ба $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ калонтарини $[-2;1]$ қимати хурдтаринро функсия на дар нуқтаи минимум, балки дар аввали порча (яъне дар нуқтаи $x=2$) мегирад: $f(-2)=-7$



Расми 86

Ҳамин тариқ, аз мисоли гирифтаамон чунин мебарояд, ки **барои ёфтани қимати калонтарину хурдтарини функсия дар порча зарур аст, қиматҳои онро дар нуқтаҳои макисмуму минимум ва охирҳои порча муқоиса намоем.**

Исбот намудан мукин аст, **ки функсияи $y=f(x)$ - и дар порчаи $[a;b]$ муайяну бефосила дар порчаи номбурда ба қимати калонтарин ва хурдтарин соҳиб мешавад.**

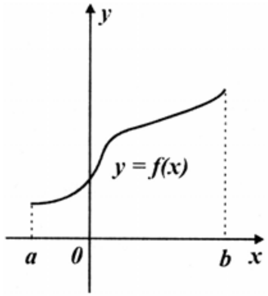
Ин тасдиқот ба Вейерштрас* таалуқ дорад.

Барои ошкор сохтани қоидаҳои умумии ёфтани қимати калонтарин ва хурдтарини функсия омӯзиши ду мавридҳои имконпазири зерин хеле муфид аст.

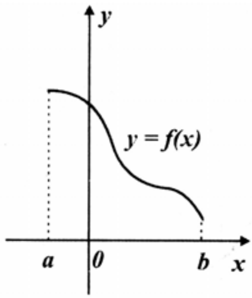
1°. **Мавриде, ки функсияи $f(x)$ дар $[a;b]$ нуқтаи критикӣ надорад.** Дар ин маврид функсия ё фақат меафзояд (расми 87) ё фақат кам мешавад (расми 88).

---

* Вейерштрасс Карл Теодор Вилгелм (1815-1897) – риёзидони немис. Аз солҳои таҳсил дар гимназия, ки онро ба ҷои 7 сол дар 5,5 сол ба итмом расонд, ба риёзиёт мароқи зиёд дошт. Дар соҳаҳои гуногуни математика (геометрияи дифференсиалӣ, алгебраи хаттӣ, ҳисоби вариатсионӣ, назарияи функсияҳои бисёртағйирёбандаи комплексӣ…) теоремаҳои классикиро исбот намудааст. Корҳои илмии ӯ дар асоснокунӣ ва бунёди назарияи қатъии анализи математикӣ мақоми бузург бозидаанд.



Расми 87



Расми 88

Мушоҳида нишон медиҳад, ки қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ аз қиматҳои $f(x)$ дар нугҳои порча (яъне дар нуқтаҳои a ва b) иборатанд.

2°. **Мавриде, ки $f(x)$ дар $[a;b]$ шумораи охирноки нуқтаҳои критикӣ дорад**. Ин нуқтаҳо дар якҷоягӣ бо a ва b порчаи $[a;b]$ - ро ба порчаҳои миқдорашон охирнок ҷудо мекунанд. Нисбати ҳар кадоми ин порчаҳо мулоҳизаҳои дар 1° критикии дурустанд.

Ҳамин тариқ, дар ин ҳолат нуқтаҳои калонтарин ва хурдтарини функсия дар нуқтаҳои критики функсия ё дар нуқтаҳои a ва b ҳосил мегарданд.

Дар асоси гуфтаҳои боло схемаи зеринро пешниҳод менамоем:

1). Ҳамаи нуқтаҳои $x_1, x_2, ..., x_n$ - и шумораашон охирноки ба экстремум шубҳаноки функсияро меёбем.

2). Қимати функсияро дар ҳар яки онҳо ва дар нугҳои порчаи $[a;b]$ яъне $f(x_1)$, $f(x_2), ..., f(x_n)$, $f(a)$, $f(b)$ меёбем;

3). Қиматҳои ёфтаи функсияро муқоиса карда аз байнашон калонтарин ва хурдтаринашро интихоб мекунем (ин ду адад – ду хати горизонталӣ – сарҳадеро ифода мекунанд, ки дар байнашон ҳамаи қиматҳои $f(x)$ - и абсиссаашон $[a;b]$ ҷойгир мешавад).

Мисоли 1. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияи $y = x^4 - 2x^2 + 5$ - ро дар порчаи $[-2;3]$ меёбем.

Ҳал. 1). $f'(x)$ - ро ёфта ба нул баробар мекунем: $f'(x) = 0$. Аз он

$4x^3 - 4x = 0,\ 4x(x^2 - 1) = 0,\ 4x(x-1)(x+1) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$

- ро ҳосил мекунем.

2) Қиматҳои $f(-2), f(-1), f(0), f(1)$ ва $f(3)$ - ро меёбем:

$f(-2) = 13,\ f(-1) = 4,\ f(0) = 5,\ f(1) = 4,\ f(3) = 68.$

3) Муқоисаи бевоситаи ададҳои 13, 4, 5, 4 ва 68 ба натиҷаи матлуби зерин меорад:

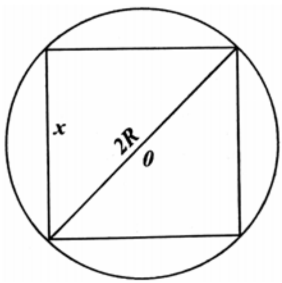
$$y_{\text{калонтарин}} = f(3) = 68, \quad y_{\text{хурдтарин}} = f(\pm 1) = 4.$$

Мисоли 2. Андозаҳоеро меёбем, ки аз рӯяшон ба доираи радиусаш R росткунҷаи масоҳаташ калонтарин ҷой гирад.

Ҳал. Ба сифати аргумент яке аз тарафҳои росткунҷаро интихоб намуда, онро бо x ишорат мекунем. Онгоҳ тарафи дигари росткунҷа (аз рӯи теоремаи Пифагор) ба

$$\sqrt{(2R)^2 - x^2} \text{ ё } \sqrt{4R^2 - x^2}$$

ва масоҳаташ ба $S = x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}$ баробар мешавад. Аён аст, ки x дар порчаи $[0;2R]$ тағйир меёбад. Аз ин рӯ ҳалли масъала ба ёфтани қимати калонтарини функсияи $S(x) = x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}$ дар порчаи $[0;2R]$ меорад.



Расми 89

Ҳосила $S'(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{2R^2 - x^2}}$ аст. Вай ҳангоми $x = 2R$ будан вуҷуд надорад.

Акнун ҳамон қиматҳоеро меёбем, ки барояшон $S'(x) = 0$ мешавад:

$$\sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{2R^2 - x^2}} = 0,$$

$$4R^2 - x^2 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 2R^2, \qquad x = \pm R\sqrt{2}.$$

Азбаски мувофиқи шарт $0 \le x \le 2R$ аст, пас қиматҳои функсияи $S(x)$ - ро дар нуқтаҳои $x_1 = 0$, $x_2 = R\sqrt{2}$ ва $x_3 = 2R$ ёфтан кифоя аст:

$$S(0) = S(2R) = 0, \; S\left(2\sqrt{R}\right) = R\sqrt{2} \cdot \sqrt{4R^2 - x^2} = 2R^2.$$

Аз байни қиматҳои ёфтаамон калонтаринаш $2R^2$ мебошад. Ҳангоми яке аз тарафҳои росткунҷа $R\sqrt{2}$ будан, дигараш ҳам $\sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$, яъне тарафҳо ба ҳам баробар мешаванд.

Аз ин ҷо хулосаи зерин дуруст аст: **дар байни росткунҳои дарункашидашуда масоҳати калонтаринро квадрат дорад.**

Мисоли 3. Шоссе равиши ҳаракатро аз ғарб ба шарқ муайян мекунад. Аз шоссе дар масофаи 9 км ба тарафи шимол дуртари маҳал, гурӯҳи геологон ва дар масофаи 15 км ба тарафи шарқу аз нуқтаи ба гурӯҳ наздиктарини шоссе, маркази ноҳия ҷойгир аст. Гурӯҳ ба маркази ноҳия алоқачии велосипедсаворро фиристод, ки дар маҳал бо суръати 8 км/соат ва дар шоссе бо суръати 10 км/соат ҳаракат мекунад. Алоқачӣ бояд аз рӯи кадом маршрут ҳаракат кунад, то ки вақти камтарин сарф шавад?

Ҳал. Дар навбати аввал нақшаро мекашем, ки дар он P мавқеъи гурӯҳи геологон, хати рости l - шоссе B – маркази ноҳия ва PMB – роҳи ҳаракати алоқачиро ифода мекунад (Расми 90).

Мувофиқи шарти масъала PA=9 км ва AB=15 км буда, мавқеъи нуқтаи M дар байни нуқтаҳои A ва B алҳол маълум нест. Бо t вақти ҳаракати алоқачиро аз пункти P то B ифода мекунем.

Бигузор $AM = x$ $(x \geq 0)$ бошад. Аз рӯи шарти масъала M мавқеъи дилхоҳро дар порчаи AB гирифта метавонад. Пас, сарҳади аниқи тағйирёбии x сегменти $0 \leq x \leq 15$ мешавад.

Азбаски $PM = \sqrt{PA^2 + AM^2} = \sqrt{81 + x^2}$

аст, пас вақти ба тай кардани ин масофа сарфшуда $t_1 = \dfrac{\sqrt{91 + x^2}}{8}$ мешавад.

Инчунин, $MB = 15 - x$ буда, вақти сарфкардаи алоқачӣ дар ин қисми роҳ ба $t_2 = \dfrac{15 - x}{10}$ баробар аст.

Вақти умумии сарфшуда $t = t_1 + t_2 = \dfrac{\sqrt{81 - x^2}}{8} + \dfrac{15 - x}{10}$ мешавад.

Ҳамин тариқ, мо функсияи $t(x) = \dfrac{\sqrt{81 - x^2}}{8} + \dfrac{15 - x}{10}$ - ро ҳосил кардем, ки мувофиқи шарти масъала қимати хурдтаринашро дар $[0;15]$ ёфтан зарур аст.

Бо ин мақсад ҳосилаашро ёфта

$$t'(x)=\frac{1}{8}\left(\sqrt{81+x^2}\right)'+\frac{1}{10}(15-x)'=\frac{1}{8}\cdot\frac{2x}{\sqrt{81+x^2}}+\frac{1}{10}(0-1)=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{x}{\sqrt{81+x^2}}-\frac{1}{10},\quad t'(x)=\frac{1}{8}\cdot\frac{x}{\sqrt{81+x^2}}-\frac{1}{10}$$

онро ба нул баробар карда муодилаи ҳосилшударо ҳал мекунем:

$$\frac{x}{8\sqrt{81+x^2}}-\frac{1}{10}=0,$$

$$10x-8\sqrt{81+x^2}=0,$$

$$10x=8\sqrt{81+x^2}$$

$$100x^2=64(81+x^2),$$

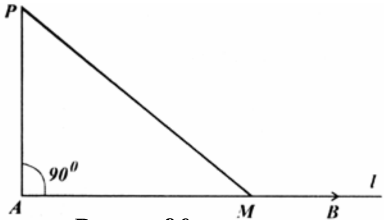
$$100x^2=64\cdot 81+64x^2,$$

$$100x^2-64x^2=64\cdot 81,$$

$$36x^2=64\cdot 81,$$

$$x^2=144\ (x\ge 0),\ \ x=12\text{км}.$$

Қимати $x=12\in(0;15)$ аст ва дар атрофи он аломати ҳосила аз минус ба плюс иваз мешавад. Муқоисаи бевоситаи қиматҳои



Расми 90

$$t(0)=\frac{105}{40}=2{,}625$$

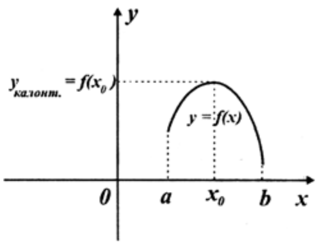
$$t(12)=\frac{87}{40}=2{,}175 \text{ ва}$$

$$t(15)=\frac{5\sqrt{306}}{40}\approx 2{,}187$$

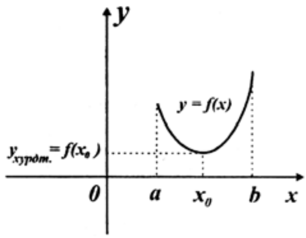
ба он оварда мерасонад, ки функсияи $t(x)$ фақат ҳангоми $x=12$ будан, ба қимати хурдтарин доро мешавад.

Ҳамин тариқ, алоқачии велооспедрон вақти камтаринро аз маҳали ҷойгиршавӣ то маркази ноҳия фақат дар ҳолате сарф мекунад, ки агар аз километри 12 – уми шоссе сар карда (мавқеъи нуқтаи M) 3 км – и охиринашро (MB) тай намояд.

Қайд. Ҳангоми ҳалли масъалаҳо баъзан эҳтиёҷот ба ёфтани қимати калонтарин ва хурдтарин на дар порча, балки дар фосила ба миён меояд. Инчунин мисоли функсияҳое вомехӯранд, ки дар фосилаи додашуда фақат як нуқтаи статсионарӣ дорад: ё нуқтаи максимум ё минимум. Онгоҳ дар нуқтаи ягонаи максимумро ифодакунанда функсия ба қимати калонтарин ва дар нуқтаи ягонаи минимумро ифодакунанда функсия ба қимати хурдтарин соҳиб мегардад (ниг. ба расмҳои 91 ва 92).



Расми 91



Расми 92

Мисоли 4. Адади 50 – ро ба намуди суммаи ду адади мусбати бутун чунон менависем, ки кубҳояшон хурдтарин бошад.

Ҳал. Агар ҷамъшавандаи якумро бо x ишорат кунем, он гоҳ дуюмаш $50-x$ мешавад. Мувофиқи шарт функсияи $f(x)=x^3+(50-x)^3$ - ро ҳосил мекунем, ки барояш $x>0,\ 50-x>0$ аст.

Ҳамин тариқ, масъала ба ёфтани ҳамин гуна қимати x оварда расонида шуд, ки дар он функсияи $f(x)=x^3+(50-x)^3$ дар фосилаи (0;50) қимати хурдтаринро мегирад.

Ҳосилаи функсияро меёбем:

$$f'(x)=3x^2-3(50-x)^2=300x-7500.$$

Нуқтаи ягонаи статсионариаш $x=25$ мешавад, ки дар нуқтаҳои атрофаш ҳосила аломатро аз «–» ба «**+**» иваз мекунад. Функсия дар нуқтаи $x=25$ дорои минимум мешавад ва азбаски он ягона аст, қимати хурдтаринро ифода мекунад:

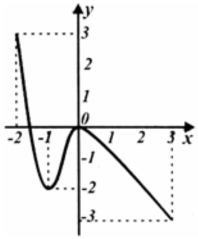
$$f(25)=25^3+(50-25)^3=25^3+25^3=31250.$$

Ҳамин тариқ, навишти адади 50 дар шакли суммаи 25+25 суммаи кубҳои хурдтаринро дорад.

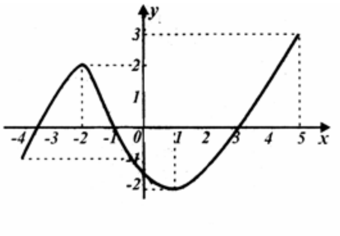
?

1. Дар зери мафҳуми қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсия чиро мефаҳмед? Муҳокимарониро бо нақшаҳо асоснок кунед.
2. Аз рӯи кадом схема қимати калонтарин ва хурдтарини функсияҳоро меёбанд?
3. Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ бефоёсила бошаду ягон нуқтаи критикӣ надошта бошад, онгоҳ нисбати қимати калонтарину хурдтарин чиҳо гуфтан мумкин аст?
4. Агар дар фосилаи $(a;b)$ функсия дорои нуқтаи ягонаи статсионарӣ бошад, онгоҳ дар кадом маврид он дорои қимати хурдтарин мешавад?

554. Аз рӯи графики функсия (ниг. ба расмҳои 93-94) нуқтаҳои экстремум ва қиматҳои калонтарину хурдтарини функсияро ёбед.



Расми 93



Расми 94

555. Экстремуми функсияи

а) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ - ро дар порчаи $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$;

б) $f(x) = x^5 - 5x^4$ - ро дар порчаи $[3;5]$;

в) $f(x) = 3x^3 - 9x + 6$ - ро дар порчаи $[-2;0]$;

г) $f(x) = \sin^2 x - \sin x$ - ро дар порчаи $[0;\pi]$ ёбед.

556. Қимати калонтарин ё хурдтарини функсияро дар фосилаҳои нишондодашуда ёбед:

а) $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x^2}$, $0 < x < +\infty$; б) $f(x) = \dfrac{2}{x} - x^2$, $-\infty < x < 0$.

557. Адади 16 – ро ба ду ҷамъшавандаи мусбати бутун чунон ҷудо кунед, ки ҳосили зарбашон калонтарин бошад.

558. Адади мусбати ғайринулиеро ёбед, ки дар ҷамъ бо адади чаппааш суммаи хурдтаринро медиҳад.

559. Ҳамин хел адади мусбатеро ёбад, ки дар фарқ бо кубаш калонтарин бошад.

560. Ададеро ёбед, ки дар ҷамъ бо квадраташ суммаи хурдтаринро диҳад.

561. Қонуни ҳаракати ростхаттаи нуқтаи материалӣ $S(t) = 3t - 2t^2 + \dfrac{2}{3}t^3$ аст (S – роҳ бо метрҳо). Дар кадом лаҳзаи вақт суръати ҳаракат калонтарин буда, ба чӣ баробар аст?

562. Барои ба панҷараи дарозиаш 160 м иҳота кардани майдончаи росткунҷашакли наздиҳавлигии масоҳаташ калонтарин андозаҳояшро чӣ хел гирифтан зарур аст?

563*. Бурриши тоннел росткунҷашакл буда, дар намуди нимдоира тамом мешавад. Периметри бурриш 18 м аст. Барои он ки масоҳати бурриш калонтарин бошад, радиуси доира бояд чанд метр гирифта шавад?

564. Дар нимдоираи радиусаш R росткунҷаи масоҳаташ калонтарини дарункашидашуда ҷой гирифтааст. Андозаи росткунҷаро муайян кунед.

Машқҳо барои такрор

565. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\dfrac{x^2-4}{x}=\dfrac{3+2x}{2}$; в) $\dfrac{2x^2}{3x-5}-x=0$;

б) $\dfrac{x^2+5}{2x}=\dfrac{3x+10}{6}$; г) $\dfrac{1+x-6x^2}{3x+1}=x$.

566. Сурати каср аз махраҷаш 2 воҳид хурдтар аст. Агар суратро як воҳид кам карда, махраҷашро 3 воҳид зиёд кунем, он гоҳ касре ҳосил мешавад, ки ба $\dfrac{1}{4}$ баробар аст. Касрро ёбед.

567. Оё муодилаҳои $2x-1=11$ ва $3x=18$ баробарқувваанд?

568. Ронандаи автобус 120 км масофаро дар як муддати муайяни вақт тай карданӣ буд. Баъди як соати ҳаракат ба муддати 15 дақиқа автобусро нигоҳ дошт. Бо мақсади дар вақти зарурӣ ба ҷои таъиншуда расидан ронанда суръатро 1,2 маротиба зиёд намуд. Суръати аввалаи ҳаракати автобусро ёбед.

569. Муодилаи $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=22$ - ро ҳал кунед.

570. Ифодаи $\cos^2(\pi-\alpha)+\sin^2(\pi-\alpha)$ - ро содда кунед.

571. Нишон диҳед, ки система ҳал надорад:

а) $\begin{cases} x-y=3; \\ -2x+2y=-10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-2y=7, \\ -9x+6y=21. \end{cases}$

Маълумоти таърихӣ

Дохилкунии методи координатаҳоро Декарт ихтироъ карда буд. Минбаъд тараққӣ додани назарияи ҳисоби дифференсиалӣ аз тарафи риёзидон ва файласуфи немис Г. Лейбнитс (1646-1716) ва риёзидону физики англис И. Нютон (1643-1727) дар таърихи илми риёзиёт саҳифаи нав кушод.

Ин табаддулот, ки ба дигаргуниҳои қатъӣ оварда расонид, аз тарафи К. Маркс ва Ф. Энгелс ин хел баҳо гирифт: «Пункти дигаргуниҳои қатъӣ дар риёзиёт бузургии тағйирёбандаи декартӣ буд. Бо шарофати он ба риёзиёт ҳаракат ва диалектика дохил шуданд». Давраи аввали тараққиёти шохаҳои риёзиётро бошад, ки ба мафҳумҳои беохир хурдҳо, лимит, ҳосила,... алоқаманд буданд, Маркс «муаммо» номида буд.

Акнун назаре ба он солҳо карда кӯшиш менамоем, ки ба хонанда сабаби чунин баҳои баланд гирифтани риёзиёти он давраро каме бошад ҳам, кушоем.

Масъалаҳои ёфтани экстремуми функсия, гузаронидани расанда ба хати кач ва ғайраҳоро пештар аз рӯи ягон усули чун ҳозира (яъне усули ҳисоби дифференсиалӣ) системанок ва ягона ҳал намекарданд.

Масалан, барои ҳалли масъалаи гузаронидани расанда ба хати кач методҳои махсусро истифода мебурданд, ки ба хосиятҳои хатҳои качи маълум (ба монанди эллипс, парабола,…) такя мекард.

Дар асри XVII диққати риёзидононро масъалаҳои ёфтани қиматҳои калонтарин ва хурдтарин ҷалб карда буд. Як қатор чунин масъалаҳо дар асари илмии олими итолиявӣ В. Вавиани «Дар бораи қиматҳои максималӣ ва минималӣ», ки соли 1659 аз чоп баромада буд, тадқиқи худро ёфтаанд. Бояд қайд кард, ки дар асар масъалаҳо бо роҳи қадимаи геометрӣ ҳал шуда буданд.

Тараққиёти алгебра ва методи координатаҳо ба риёзидонон имконият дод, ки ҳалли масъалаҳои ба экстремум вобастаро асоснок ва амалӣ намоянд.

Ҳанӯз дар асри XIV риёзидони франсавӣ Н. Орезм қайд карда буд, ки дар наздикии қимати максималӣ ё минималӣ қиматҳои дигари функсия хеле суст тағйир меёбанд.

Риёзидон ва ситорашиноси немис И. Кеплер (1871-1630) бошад, дар мақолааш «Стреометрияи бочкаҳои вино» ғояҳои худро ба ҳалли масъалаи ёфтани силиндри ҳаҷмаш калонтарини дарункашидашуда дар кура вобаста карда аст.

Методҳои гузаронидани расандаҳо ба хатҳои каҷро, дар асоси фаҳмишҳои кинематикӣ, шогирди Галилей Э. Торричели (1608-1647) ва риёзидони франсавӣ Ж. П. Робервал (1602-1672) тараққи доданд. Торричелли аввалин шахсе буд, ки дар масъалаи гузаронидани расандаҳо ҷамъи суръатҳоро тадбиқ кард. Вале дар ин ҷо ҳам зарурияти дар ҳар як ҳолати алоҳида хоситяҳои хати каҷро ба ҳисобгирӣ ба миён меомад. Ҳамаи ин ҳолатҳо эҳтиёҷотро ба методи умумии ҳалли чунин масъалаҳо хеле зиёд менамуд. Ниҳоят ин метод ҳам кор карда баромада шуд. Он методи алгебравӣ буд. Методи алгебравӣ характери кифоягӣ ва умумияти ба худ хосе дошта, бо ёриаш ҳамаи масъалаҳои ба гузаронидани расанда вобаста бо роҳи ягона ҳал карда мешуд. Дар ин бора тадқиқотҳои Р. Декарт (дар китобаш «Геометрия») ва риёзидони голландӣ И. Гудде (1628-1704) ҷолиби диққат аст. Гудде корҳои Декартро оиди методҳои алебравии ҳалли масъалаи гузаронидани расанда ба хати кач давом додааст.

П. Ферма новобаста аз Декарт ба идеяҳои ӯ хеле наздик омада буд. Соли 1638 Ферма роҳи ёфтани минимум ва максимумро пешниҳод мекунад, ки ба тартибдиҳии муодилаи

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

асос ёфта буд. Ферма баъди тақсимкунӣ ба *h* фарз мекунад, ки $h=0$ аст. Ҳамин тариқ, ӯ безургиеро ба нул баробар мекунад, ки мо онро ҳоло ҳосилаи функсияи $f(x)$ меномем. Ниҳоят қайд мекунем, ки методи Ферма фақат барои функсияи ратсионалӣ тадбиқшаванда асту халос. Ӯ инчунин усули ёфтани нуқтаҳои хамии графики функсияро нишон додааст. Ғояҳои Фермаро як қатор риёзидонони охири асри XVII, аз он ҷумла, риёзидон ва механики голландӣ Х. Гюйгенс (1629-1695) инкишоф додаанд.

То нимаи дуюми асри XVIII доираи масъалаҳое, ки бо методи ҳисоби дифференсиалӣ[*] ҳал мешуданд, аниқ шуда буд. Илова бар он, алоқаи байни суръати лаҳзагӣ ва расандаҳо ошкор шуда буд. Методҳои алоҳидаи ҳалли масъалаҳо кор карда баромада шуда бошанд ҳам, вале алгоритми умумӣ, аниқтараш худи ҳисоби дифференсиалӣ сохта нашуда буд.

Назарияи умумии ҳосилаҳо ва методҳои ҳисоб карда ёфтани онҳоро новобаста аз якдигар И. Нютон ва Г. Лейбнитс[†] дар охирҳои асри XVII кор карда баромаданд.

Нютон дар асоси баъзе фаҳмишҳои механикаи худ (аз он ҷумла суръати лаҳзагӣ) ҳосиларо маънидод кардааст. Ӯ ҳосиларо **флюксия** (аз калимаи лотинии *fluere* – ҷорӣ) ва худи функсияро **флюента** меномид. Ҳатто дар баъзе корҳояш ба мафҳуми лимити функсия хеле наздик шуда, истилоҳи «лимит» - ро дохил мекунад.

---

[*] Фасли риёзиёт, ки дар он ҳосилаҳо ва тадбиқоти онҳо дар тадқиқи функсия омӯхта мешаванд, **ҳисоби дифференсиалӣ** ном дорад.

[†] Лейбнитс Готфрид Вилгелм (1646-1716) – олими бузурги немис буда, дар фалсафа, риёзиёт, ҳуқуқ ва забон корҳои илмии зиёде дорад. Соли 1666 ӯ унвони доктори илмҳои ҳуқуқро мегирад ва чанд муддат ба корҳои дипломатӣ машғул мешавад. Корҳои аввали ба риёзиёт бахшидаи ӯ солҳои 1668-1671 чоп шудаанд.

Чӣ хеле қайд карда шуд, ӯ яке аз бунёдкунандагони (новобаста аз Нютон) назарияи ҳисоби дифференсиалӣ мебошад. Лейбнитс ба баҳс бо Нютон оиди «кӣ пештар назарияи номбурдаро кашф кардааст» кашида мешавад. Гуфтугузор ва каҷфаҳмиҳои зиёд саломатиашро заиф мегардонад ва ӯ соли 1716 вафот мекунад. Аз паси тобути Лейбнитс фақат як нафар меравад. На академияи улуми ш. Берлин ва на ҷамъияти лондонии таъсисдодаи шоҳ аз фавти ӯ ягон хабаре намедиҳанд. Ҳақиқати баҳс дар он аст, ки назарияи ҳисоби дифференсиалиро аввалин маротиба Нютон кашф кардааст. Вале новобаста аз ӯ Лейбнитс низ дар кори бунёди анализи математикӣ ҳиссагузорӣ карда натиҷаҳои илмиашро нисбат ба Нютон пештар дастраси умум гардонида буд.

Ишоратҳои дохил кардаи Нютон, ки бисёр риёзидонони англис ба монанди Дж. Грегори, Б. Тейлор, К. Маклорен ва дигарон истифода мебурданд, хеле қулай буданд. Вале системаи пурратари ишораҳоро, ки то ҳоло истифода мебаранд, Лейбнитс пешниҳод карда буд. Дар асоси системааш Лейбнитс мафҳуми дифференсиалро гузошта (пайдоиши назарияи ҳисоби дифференсиалӣ ба ин ном вобаста аст), чун «афзоиши беохир хурд» (аниқтараш чун қисми афзоиши функсия), ҳосиларо бошад чун нисбати дифференсиалҳо маънидод мекунад (бо рамзи df - дифференсиали функсияи f ва бо рамзи $\frac{df}{dx}$ - ҳосиларо ишорат мекунад). Масъалаи асосиро дар маънои анализи беохир хурдҳо мефаҳмид. Номи ҳозираи предмети «Анализи математикӣ» аз номи пештараи «Анализи математикии беохир хурдҳо» бармеояд.

Ба мактаби илмии Лейбнтс баргашта, қайд менамоем, ки онҳо хатҳои качро чун бисёркунҷаҳо бо тарафҳои шумораашон беохир зиёд дида мебаромаданд. Шогирдони Лейбнитс бародарон Якоб ва Иоган Бернулли ғояҳои устодашонро ривоҷ додаанд.

Дар тараққиёти назарияи ҳисоби дифференсиалӣ ва тадбиқоти он китоби Л. Эйлер (1707-1783) «Ҳисоби дифференсиалӣ» роли бузургро бозид. Дар ин китоб, ки соли 1755 дастрас шуд, аввалин маротиба мафҳуми ҳосила дар шакли аналитикӣ бе такя ба мафҳумҳои физикӣ ва геометрӣ маънидод карда мешавад.

Гарчанде мафҳуми дифференсиал ба маънои Лейбнитс пурра набошад ҳам, вале ҳосиларо чун нисбати дифференсиалҳо фаҳмиданаш чӣ дар ҳалли масъалаҳои анализ ва чӣ дар тадбиқотҳояш қуллаи фароҳам овард.

Дар бунёд ва асосноккунии анализи математикӣ (бо назардошти имрӯза) хизмати бузурги О. Коши (1788-1857) намоён аст. Вай таърифҳои дақиқтари лимити функсия ва пайдарпаиро додааст. Ин бошад, ба ӯ имконият дод, ки як қатор теоремаҳои асосии анализро исбот кунад.

Бо мурури инкишофи назарияи функсияҳои канишдор мафҳуми ҳосила барои чунин функсияҳо умумӣ гардонида шуд. Дар ин ҷода хизмати риёзидони Иттиҳоди Шӯравӣ А. Н. Колмогоров (1903-1987) назаррас аст.

Риёзидони дигари Шуравӣ Хинчин А. Я. (1894-1959) ҳанӯз солҳои студентиаш дар Донишгоҳи Давлатии Маскав дар яке аз маърӯзаҳояш дар маҳфили илмӣ (с. 1914) мафҳуми ҳосиларо умумӣ гардонидааст, ки ба илм бо номи «ҳосилаи асимптотикӣ» дохил гардид.

Машқҳои иловагӣ ба боби V
Ба параграфи 14

Нобаробариҳоро бо методи фосилаҳо ҳал кунед (572-575):

572. а) $(x-2)(x-4)(x-6) \le 0$; д) $(2x-1)(x+1)$;

б) $3x(10x-3) > 0$; е) $(10x-1)(5x-2) < 0$;

в) $(0{,}5x-1)(x-5) < 0$; ж) $(0{,}6+x) \cdot x < 0$;

г) $(5x+3)(2x-5) > 0$; з) $(4x-3)(2-3x) \ge 0$.

573. а) $\dfrac{(x+3)(x-1)}{x^2-25} > 0$; в) $\dfrac{(x+4)(x-10)}{(x+1)(x+5)} \ge 0$;

б) $\dfrac{x^2-1}{(x-3)(x-13)} < 0$; г) $\dfrac{x+11}{(x-1)(x+2)} \le 0$; д) $1-\dfrac{x+1}{2x^2} \ge 0$.

574. а) $x^2-16x+64 > 0$; в) $3x^2-31x-22 \le 0$;

б) $25-20x+4x^2 > 0$; г) $2x^2+5x-63 \le 0$; д) $3x^2+5x-8 \ge 0$.

575. а) $(x^3-8)(x^2-81) \cdot x \ge 0$; б) $\dfrac{(x-1)^3(x-6)^4}{(x+3)(x+1)^2} \le 0$;

в) $\dfrac{(x-1)^2(x-5)}{(x-3)^3} > 0$; г) $\dfrac{x^2-7x+6}{(x-4)^2} < 0$.

576. Соҳаи муайянии функсияҳоро ёбед:

а) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$; б) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$;

в) $y=\sqrt{\dfrac{(x-3)^2}{x-5}}$; г) $y=\sqrt{4-\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}}$.

577. Дар кадом қиматҳои a нобаробарӣ маъно дорад:

а) $\dfrac{(a-3)^2}{a^2-25} \ge 0$; б) $\dfrac{(a-1)^2}{a(a-2)} \le 0$;

в) $\dfrac{(a-2)^3(a+3)^2}{a(a^2+1)} < 0$; г) $\dfrac{(a^2+4)(a-4)^3}{2a^2(a+5)} < 0$?

Ба параграфи 15.

578. Коэффитсиенти кунҷии расандаро ба графики функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи абсиссааш x_0 ёбед:

а) $f(x)=\sin x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}$; б) $f(x)=3x^2-9x+17,\ x_0=2.$

579. Ҷисм аз рӯи хати рости $0x$ мувофиқи қонуни $x(t)=\dfrac{2}{3}t^3-2t^2+3t$ ҳаракат мекунад. Суръат ва шитоби ҳаракатро ҳангоми $t=2$ сон. будан муайян кунед.

580. Баландшавии об дар зарфи силиндршакли диаметраш ба 6 см баробар дар 1 сон. 1 см аст. Суръати бо об пуршавии зарф ёфта шавад.

581. Ҷисми массааш 4 кг аз рӯи қонуни $S=t^2+t+1$ ростхатта ҳаракат мекунад (масофа бо метр чен карда шавад). Энергияи кинетикии ҷисмро дар лаҳзаи вақти $t=5$ сон. ёбед.

582. Ҷисм аз рӯи қонуни $x(t)=\cos\omega t$ $(\omega=const)$, ҳаракат мекунад. Суръат ва шитоби онро дар лаҳзаи $t_0=\dfrac{\pi}{4\omega}$ ёбед.

583. Фосилаи афзуншавӣ ва камшавии функсияҳоро ёбед:

а) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-27x^3$; в) $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$;

г) $f(x)=4x^3-6x^2$ д) $f(x)=5-x^2$; е) $f(x)=2x(x^4+1)$;

ж) $f(x)=3x+2\cos 3x$; з) $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$; и) $f(x)=x-\sin 2x$;

к) $f(x)=3x+2\cos 3x.$

584. Исбот кунед, ки дар нуқтаҳои соҳаи муайяниашон функсияҳои

а) $f(x)=7-\dfrac{13}{x}$; б) $f(x)=x^5+2x-100$

афзуншаванда ва функсияҳои

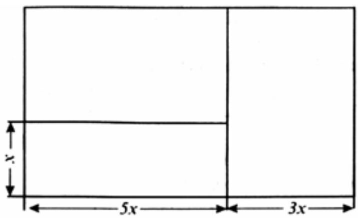
в) $f(x)=5x^3-x$; г) $f(x)=-5x-\sin 2x$

камшавандаанд.

585. Нуқтаҳои критикии функсияро ҳангоми

а) $y=\sqrt{x^3-3x}$; б) $f(x)=x^2-|x|-2$

будан ёбед.



Расми 95

586. Муодилаи $f'(x)=0$ - ро ҳал карда, нуқтаҳои статсионарии функсияро ёбед:

а) $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{8}{x}+9;$ б) $y=2x^3-15x^2+36x-13.$

587. Нуқтаҳои экстремум ва экстремали функсияҳоро ёбед:

а) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-25x+21;$ б) $f(x)=x^4-4x;$

в) $f(x)=x^2+\frac{54}{x};$ г) $f(x)=4x-x^2;$

д) $f(x)=2x-\sqrt{x};$ е) $f(x)=\frac{3}{x}+\frac{x}{3}.$

588. Нишон диҳед, ки функсияи зерин доир ба экстремум шубҳанок нест;

а) $y=-5x+11;$ б) $y=\frac{x-1}{3};$ в) $y=4x^3+8x-19;$

589. Функсияи

а) $y=2x^3-3x^2+19;$ б) $y=7x^2-2x+13$

- ро бо ёрии ҳосилаи тартиби ду доир ба экстремум тадқиқ намоед.

590. Функсияро тадқиқ намуда, графикашро созед:

а) $f(x)=1+2\sin x;$ б) $f(x)=9x+3x^2-x^3;$

в) $f(x)=7x^2+4x-11;$ г) $f(x)=2-5x-3x^2;$

д) $f(x)=\frac{x}{1-x};$ е) $f(x)=x+\sqrt{1-x}.$

591. Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияҳоро дар порчаи нишондодашуда ёбед:

а) $y=8x^3-24x^2,\ [1;3];$ б) $y=3x-x^3,\ [-2;3];$

в) $y=4x^3+6x^2,\ [-2;1];$ г) $y=\cos^2 x,\ \left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right].$

592. Андозаи ҳавзи кушодро, ки тагаш квадратшаклу ҳаҷмаш 32 $м^3$ аст, чунон муайян кунед, ки барои руйкаш кардани деворҳою таги он миқдори камтарин масолеҳ сарф шавад.

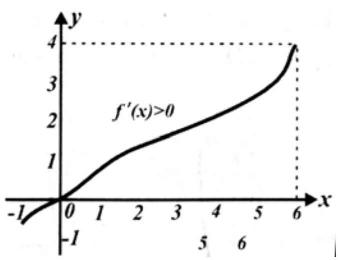
593. Дарозии умумии девори дар нақшаи бино тасвирёфта (расми 95) 90 м шуданаш лозим аст. бари роҳравро (бо x ишорат шудааст) чӣ хел гирем, ки се хонаи дигари бино масоҳати калонтарин дошта бошад?

Ҷавобҳо

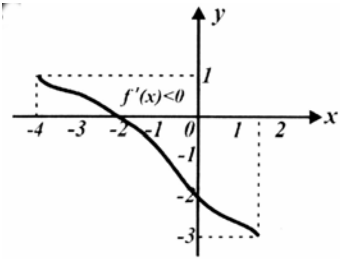
485. а) $x \in (-\infty;3) \cup (4;+\infty)$; б) $x \in [-1;2] \cup [5;+\infty)$; в) $x \in \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \cup (1;6)$; г) $x \in \left[-2;\frac{1}{2}\right] \cup [7;+\infty)$; $x \in (-3;1) \cup (2;3)$; е) $x \in (-3;-2] \cup (-1;2] \cup (3;+\infty)$; ж) $x \in (3;4) \cup (5;6)$; з) $x \in (-\infty;-5) \cup (-2;2) \cup [5;+\infty)$. **486.** а) $x \in \left(-\infty;-\frac{4}{7}\right] \cup [1;+\infty)$; б) $x \in \left(1;\frac{3}{2}\right)$; в) $x \in \left(-\infty;-\frac{5}{3}\right) \cup (2;+\infty)$; г) $x \in [1;9]$; д) $x \in \left[-\sqrt{3};-1\right] \cup \left[1;\sqrt{3}\right]$; е) $x \in \left(-\infty;-\sqrt{2}\right] \cup [-1;1] \cup \left[\sqrt{2};+\infty\right)$. **487.** а) $x \in (-\infty;-3] \cup [-2;1] \cup [2;+\infty)$; г) $x \in (-\infty;-2] \cup [-1;1] \cup [3;+\infty)$; д) $x \in \left(\frac{7}{2};5\right)$; е) $x \in (-2;1) \cup (2;+\infty)$. **488.** а) $x \in (-5;-1) \cup (1;+\infty)$; б) $x \in [1;4]$. **489.** а) $x \in (-\infty;3)$; б) $x \in (-\infty;-3) \cup (4;+\infty)$. **490.** а), в), г), е), ж)-ҳа; б), д), з), и)-не. **491.** $2\sin\alpha$. **492.** а) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$. **493.** 0 ва 4. **494.** $S = -12$. **495.** 60 км/соат ва 80 км/соат. **496.** а) $117x^2 - 4$; б) $-3\sin x - 7\cos x$. **497.** $\omega(\mathrm{t}) = 14\mathrm{t} - 3$; $\omega(t) = 67$ м/сон. **498.** $v(\mathrm{t}) = \mathrm{t}^4 + 3$, $\vartheta(3) = 75$ м/сон; $a(t) = 4t^3 - 2t$, $a(3) = 102$ м/сон². **499.** $\vartheta(0) = 3$ м/сон; $v(3) = 4{,}62$ м/сон; $a(0) = 0$; $a(3) = 10{,}8$ м/сон²; $\vartheta_{\text{м}} = 3{,}54$ м/сон; $a_{\text{м}} = 0{,}54$ м/сон². **501.** а) $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = 1$; б) $t \in \left(\frac{1}{3};1\right)$. **502.** $F = 1260\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{сон}^2}$. **503.** 1,5рад/сон. **504.** 202,5ч. **505.** а) $-\pi + 2k\pi,\ k \in Z$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$. **506.** а) $\sin\frac{\pi}{8}\sin\alpha$; б)

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha$. **507.** а) $-1 \le x \le 3$; б) ҳал надорад. **508.** $x=1$. **509.** $S_{40}=1680$. **510.** а) $x=\frac{5}{6}$; б) $x=\pm\frac{1}{3}$.

511.

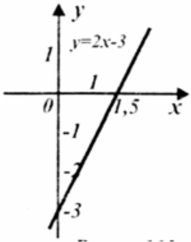


Расми 96 а)

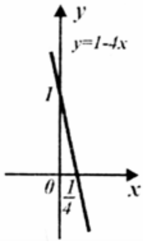


Расми 96 б)

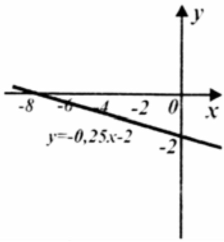
512. а), г) дар тамоми $R(-\infty;+\infty)$ афзуншаванда аст (расмҳои 97, 100); б), в) дар тамоми R камшаванда аст (расмҳои 98,99);



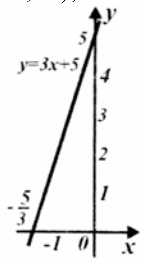
Расми 97



Расми 98

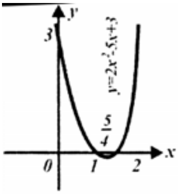


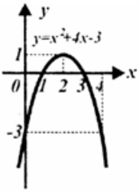
Расми 99

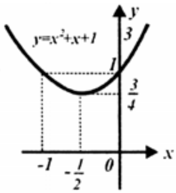


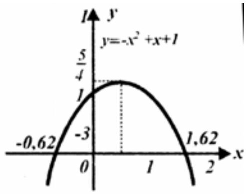
Расми 100

д) парабола дар $\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)\downarrow$ ва дар $\left(\frac{5}{4};+\infty\right)\uparrow$ (расми 101); е)парабола дар $(-\infty;2)\downarrow$ ва дар $(2;+\infty)\uparrow$ (расми 102); ж)парабола дар $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\downarrow$ ва дар $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)\uparrow$ (расми 103); з)парабола дар $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\downarrow$ ва дар $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\uparrow$ (расми 104);



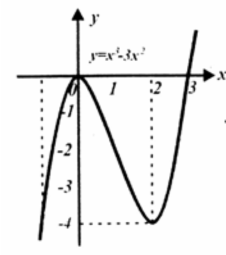


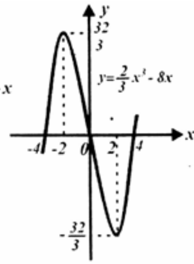


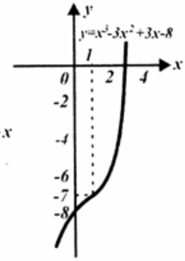


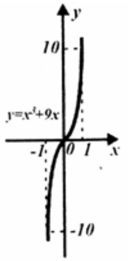
Расми 101 ***Расми 102*** ***Расми 103*** ***Расми 104***

и) дар $\left(-\infty;0\right)\cup(2;+\infty)\uparrow$ ва дар $\left(0;2\right)\downarrow$ (расми 105); к)парабола дар $\left(-\infty;-2\right)\cup(2;+\infty)\uparrow$ ва дар $\left(-2;2\right)\downarrow$ (расми 106); л) ва м) дар тамоми $(-\infty;+\infty)$ афзуншаванда аст (расмҳои 107, 108);



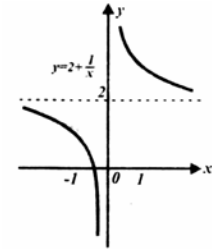


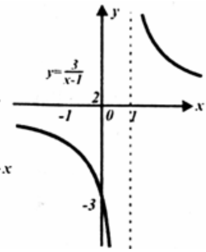


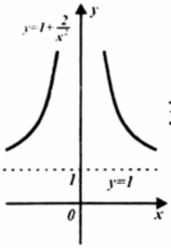


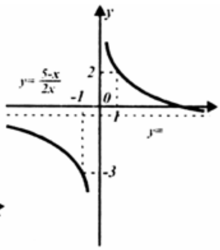
Расми 105 ***Расми 106*** ***Расми 107*** ***Расми 108***

н) гипербола дар $\left(-\infty;0\right)\cup(0;+\infty)\downarrow$ (расми 109); о) гипербола дар $\left(-\infty;1\right)\cup(1;+\infty)\downarrow$ (расми 110); п) гипербола $\left(-\infty;0\right)\uparrow$ ва дар $\left(0;+\infty\right)\downarrow$ (расми 111); р) гипербола дар тамоми *R* ба ғайр аз 0 камшаванда аст (расми 112).







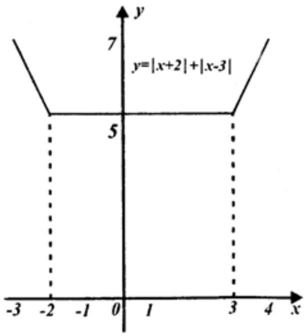


Расми 109 ***Расми 110*** ***Расми 111*** ***Расми 112***

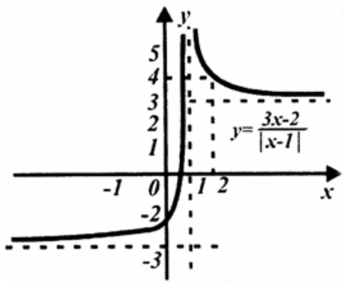
515. Нишондод. Дар қиматҳои $a>1$ функсия дар тамоми *R* афзуншаванда мешавад, чунки $|\cos x|\le 1$ буда фарқи $a-1$ фақат ҳангоми $a>1$ будан мусбат мемонад. **516.** $a<-\dfrac{3}{2}$. **517. Нишондод.**

а) Мувофиқи хосияти модул функсияро дар намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$y = |x+2| + |x-3| = \begin{cases} 1-3x, \text{ агар } x < -2; \\ 5, \text{ агар}, -2 \le x \le 3; \\ 2x-1, \text{ агар}, \ x > 3. \end{cases}$$



Расми 113



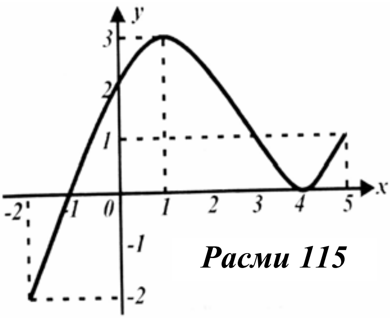
Расми 114

График дар расми 113 акс ёфтааст; б) Барои ҳамаи $x > 1$ функсия дар намуди $y = -3 + \dfrac{1}{x-1}$ - ро мегирад. Хати кач гипербола буда дар расми 114 акс ёфтааст. **518.** а) 6; б) 0,3625. **519.** а) $-x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 35$; б) $-5a^2 - 6ab$. **520.** а) $\dfrac{6-5x}{x^2-4}$; б) $\dfrac{3y-2x^2}{x(y^2-x^2)}$. **521.** Азбаски координата қуллаи (4; -5) аст, пас он дар чоряки чорум ҷойгир аст. **522.** $b_1 = q = \dfrac{1}{2}$. **523.** 20 м ва 25 м. **524.** а) $2x + \dfrac{5}{x^2}$; б) $3x^2 - \cos x + x\sin x$. **525.** $x_1 = -5$, $x_2 = -1{,}5$, $x_3 = 1$, $x_4 = 6$ - абсиссаҳои нуқтаҳои max; $x_5 = -3{,}5$, $x_6 = -0{,}5$, $x_7 = 4$ - абсиссаҳои min. **526.** $x_1 = -4$, $x_2 = -3$, $x_3 = -2{,}5$, $x_4 = -1{,}8$, $x_5 = -0{,}4$, $x_6 = 2$, $x_7 = 2{,}5$. **527.** а) $x = \pm 3$; б) $x = 13$; в) $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$. **528.** а) 0; б) 2; $\dfrac{5}{4}$; в) 2; г) $\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; д) 1; е) нуқтаи критикӣ надорад. **529.** а) $y_{\min} = y\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{43}{4}$; б) $y_{\min} = y\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{253}{12}$; в) $y_{\max} = y(4) = 16$; г) $y_{\min} = y(5) = 2$, $y_{\max} = y(-5) = -2$; д) $y_{\min} = y(6) = 6$, $y_{\max} = y(-6) = -6$; е) $y_{\max} = y(-3) = 10$; ж) $y_{\min} = y(1) = -\frac{1}{2}$; з) дар тамоми R афзуншаванда аст; нуқтаи ба экстремум шубҳанок надорад; и) $y_{\min} = y(0) = 1$. **530.** а) дар $(-\infty;2)\downarrow$ ва дар $(2;+\infty)\uparrow$; $y_{\min} = y(2) = -8$; б) дар фосилаҳои $(-\infty;-3)$ ва $(3;+\infty)\uparrow$; дар $(-3;3)\downarrow$; $y_{\max} = y(-3) = 55$; $y_{\min} = y(3) = -53$; в) функсия дар нуқтаҳои соҳаи муайянииашон афзуншаванда буда, дорои нуқтаҳои ба экстремум шубҳанок нест; г) функсия дар нуқтаҳои соҳаи муайянииашон камшаванда буда, дорои нуқтаҳои ба экстремум шубҳанок нест; д) функсия дар тамоми $(-\infty;+\infty)\uparrow$ буда, экстремум надорад. **531.** а) $x = -1$ - абсиссаи нуқтаи максимум; $y(-1) = 0{,}25$; $x = 0$, $x = 4$ - абсиссаи нуқтаҳои минимум: $y_{\min} = y(0) - 0$; $y_{\min} = y(4) = 10\frac{2}{3}$; б) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$ - абсиссаи нуқтаи максимум $y\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$ - абсиссаи нуқтаҳои минимум: $y\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **532.** а), в), г)-не, чунки онҳо дар нуқтаҳои соҳаи муайянииашон фақат афзуншавандаанд; б) азбаски $y' = -11 < 0$ аст (функсия дар тамоми R камшаванда), пас дорои экстремум нест. **533.** $y_{\min} = y(1) = 0$, $y_{\max} = y\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{108}{3125}$; б) $y_{\min} = y\left(\frac{4}{15}\right) = -\frac{252869}{253125}$; в) фақат дар $D(f)\downarrow$ дорои экстремум нест; г) $y_{\min} = y(0) = 0$. **534.** 16м/сон; 10м. **535.** а) $45\frac{6}{7}$. **536.** а)

$\dfrac{a+5}{a+3}$; б) $\dfrac{2b-1}{b-2}$; в) $\dfrac{2c+1}{c+5}$. **538.** $x_1=-2, \quad x_2=6, \quad x_{3,4}=3\pm\sqrt{21}$.

539. 7; 8; 9; 10. **540.** а) $12\sin 2x$; б) $-27\cos 3x$. **542.** $x=-\dfrac{1}{8}$. **543.** а) $D(f)=[-4;5]$;

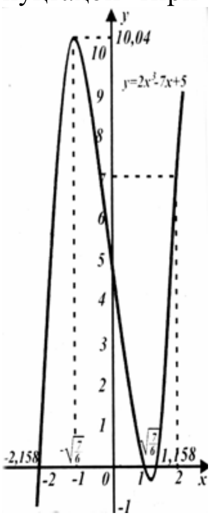
б) $x_1=-11,\ x_2=-7,\ x_3=-4,\ x_4=0,\ x_5=2,\ x_6=8$; в) фосилаҳои афзуншавӣ: (–12;–9), (–5;–2), (1;5); фосилаҳои камшавӣ: (–9;–5), (–1;1), (5;9); г) $y_{\max}=f(-9)=2$, $y_{\min}=f(-5)=-4$, $y_{\max}=f(-2)=4$, $y_{\min}=f(1)=-1$, $y_{\max}=f(5)=5$. **544.** График дар расми 115 акс ёфтааст.



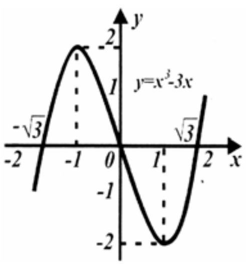
Расми 115

545. а) дар $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\downarrow$, дар $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)\uparrow$, $x=\dfrac{1}{3}$ - нуқтаи минимум; б) дар $(-\infty;0{,}3)\downarrow$, дар $(0{,}3;+\infty)\uparrow$; $x=0{,}3$ - нуқтаи минимум; в) дар $(-\infty;1)\downarrow$, дар $(1;+\infty)\uparrow$; $x=1$ - нуқтаи минимум; г) дар $\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)\uparrow$, дар $\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)\downarrow$, $x=\dfrac{2}{3}$ - нуқтаи максимум; д) дар $(-\infty;2)\uparrow$, дар $(2;+\infty)\downarrow$, $x=2$ - нуқтаи максимум; е) дар $\left(-\infty;\dfrac{5}{2}\right)\downarrow$, дар $\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)\uparrow$, $x=\dfrac{5}{2}$ - нуқтаи минимум; ж) дар $(-\infty;-2)\uparrow$, дар $(-2;+\infty)\downarrow$, $x=-2$ - нуқтаи максимум; з) дар $\left(-\infty;\dfrac{7}{6}\right)\downarrow$, дар $\left(\dfrac{7}{6};+\infty\right)\uparrow$, $x=\dfrac{7}{6}$ - нуқтаи минимум; и) дар $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\uparrow$, дар

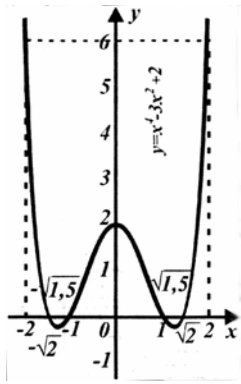
$\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)\downarrow$, $x=-\frac{1}{2}$ - нуқтаи максимум; к) дар $(-\infty;-2)\uparrow$, дар $(-2;+\infty)\downarrow$, $x=-2$ - нуқтаи максимум; л) $(-\infty;-4)\downarrow$, дар $(-4;+\infty)\uparrow$; $x=-4$ - нуқтаи минимум. **546.** а) (1;0), $\left(-1\pm\sqrt{11};0\right)$ - нуқтаи бурриш бо тири 0x; (0;5) – нуқтаи нуқтаи бурриш бо тири 0y; функсия дар фосилаҳои $\left(-\infty;-\sqrt{\frac{7}{6}}\right),\left(\sqrt{\frac{7}{6}};+\infty\right)$ афзуда, дар $\left(-\sqrt{\frac{7}{6}};\sqrt{\frac{7}{6}}\right)$ кам мешавад; $x=-\sqrt{\frac{7}{6}}$ нуқтаи максимум ва $x=\sqrt{\frac{7}{6}}$ нуқтаи минимум; графикаш дар расми 116 тасвир ёфтааст; б) (0;0), $\left(\pm\sqrt{3};0\right)$ - нуқтаи бурриш бо тири 0x; дар фосилаҳои $(-\infty;-1)$, ва $(1;+\infty)\uparrow$, дар $(-1;1)\downarrow$; $x=-1$ нуқтаи максимум ва $x=1$ нуқтаи минимум; графикаш дар расми 117 тасвир ёфтааст; в) (1;0), (-2;0) – нуқтаҳои бурриш бо тири 0x; дар фосилаҳои $(-\infty;-1)$, ва $(1;+\infty)\uparrow$ ва дар $(-1;1)\downarrow$; $x=-1$ нуқтаи максимум ва $x=1$ нуқтаи минимуми функсия аст; г) График аз ибтидои координата гузашта дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ афзуншаванда аст; д) График аз ибтидои



Расми 116

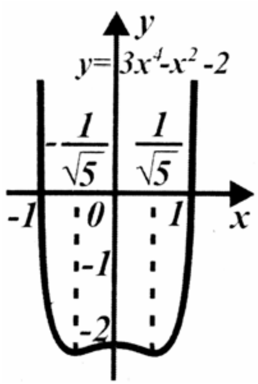


Расми 117



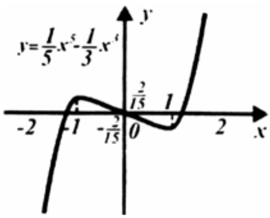
Расми 118

координата мегузарад; дар $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$ ва $(0;+\infty)\uparrow$, дар $\left(-\frac{2}{3};0\right)\downarrow$ мешавад; $x=-\frac{2}{3}$ - нуқтаи максимум ва $x=0$ нуқтаи минимум аст; е) $\left(\pm\sqrt{2};0\right)$, $(\pm 1;0)$ - нуқтаи бурриш бо тири $0x$ ва $(0;2)$ нуқтаҳои бурриш бо тири $0y$; дар $\left(-\infty;-\sqrt{1,5}\right)$, ва $\left(0;\sqrt{1,5}\right)\downarrow$; дар фосилаҳои $\left(-\sqrt{1,5};0\right)$, ва $\left(\sqrt{1,5};+\infty\right)\uparrow$; $x=\pm\sqrt{1,5}$ нуқтаи минимум ва $x=0$ нуқтаи максимум аст.

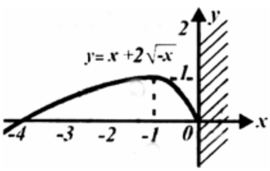


Расми 119

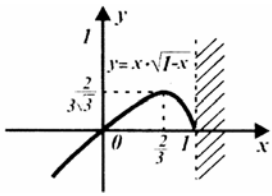
График дар расми 118 тасвир карда шудааст; ж) $(\pm 1;0)$ - нуқтаи буриш бо тири $0x$; $(0–2)$ – нуқтаҳои буриш бо тири $0y$; дар фосилаҳои $\left(-\infty;\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, ва $\left(0;\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ функсия кам ва дар фосилаҳои $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};0\right)$ ва $\left(\frac{1}{\sqrt{5}};+\infty\right)$ меафзояд; нуқтаҳои $x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ нуқтаҳои минимум ва $x=0$ нуқтаи максимум аст. График дар расми 119 тасвир карда шудааст; з) $(\pm 1;0)$ - нуқтаи буриш бо тири $0x$; график аз ибтидои координата мегузарад; дар фосилаҳои $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, ва $\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ кам ва дар $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$ ва $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$ меафзояд; $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ нуқтаҳои минимум ва $x=0$ нуқтаи максимум мебошад; и) $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}};0\right)$ - нуқтаи бурриш бо тири $0x$; график аз ибтидои координата мегузарад; $(-\infty;-1)$ ва $(1;+\infty)$, фосилаҳои афзуншавӣ, (-1;0) ва (0;1) – фосилаҳои камшавии функсия аст; $x=-1$ - нуқтаи максимум ва $x=1$ нуқтаи минимум аст; График дар расми 120 тасвир шудааст; к) $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}};0\right)$ - нуқтаи бурриш бо тири $0x$; график аз ибтидои координата мегузарад; $(-\infty;-1)$ ва $(1;+\infty)\uparrow$; дар (-1;0) ва $(0;1)\downarrow$; $x=-1$ - нуқтаи максимум ва $x=1$ нуқтаи минимум аст; График аз ибтидои координата гузашта тири $0x$ – ро дар нуқтаи (5;0) мебурад; дар $(-\infty;0)$ ва $(4;+\infty)\uparrow$; дар $(0;4)\downarrow$; $x=0$ нуқтаи максимум ва $x=4$ нуқтаи минимум аст. м) График тири $0x$ – ро дар нуқтаи $(\pm 2;0)$ мебуррад; дар тамоми нӯқтаҳои соҳаи муайянӣ афзуншаванда аст; $x=0$ нуқтаи каниши функсиямебошад; н) График тири $0x$, $0y$ ва хати рости $x=4$ - ро мебурад; дар фосилаҳои $(-\infty;0)$ ва $(8;+\infty)$ кам шуда, дар (0;8) меафзояд; $x=8$ -нуқтаи максимуми функсия мебошад; о) График дар нуқтаи (0;0) ибтидо ёфта дар нимҳамвории $x\le 0$ ҷой мегирад. Бо тири $0x$ дар нуқтаи (-4;0) бурида мешавад; дар $(-\infty;-1)\uparrow$,



Расми 120



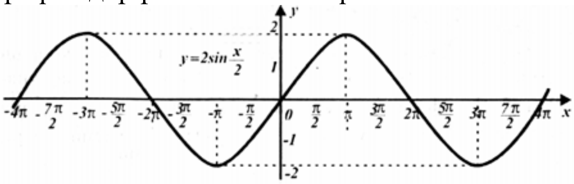
Расми 121



Расми 122

$(-1;0;)\downarrow$; дар нуқтаи $x=-1$ дорои максимум мешавад (расми 121); п) График аз ибтидои координата гузашта дар нимҳамвории аз хати рости $x=1$ чап ҷой гирифтааст; дар фосилаи $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$ афзуншаванда ва дар фосилаи $\left(\frac{2}{3};1\right)\downarrow$ камшаванда аст. $x=\frac{2}{3}$ - нуқтаи минимуми функсия аст. График дар расми 122 тасвир ёфтааст. **547.** а) $(2n\pi;0)$, $n=0;\pm1;\pm2;...$ нуқтаҳои буриши график бо тири $0x$; дар фосилаҳои $-\pi+4n\pi<x<\pi+4n\pi,\quad n\in Z$ функсия афзуда, дар $\pi+4n\pi<x<3\pi+4n\pi,\ n\in Z$ кам мешавад;

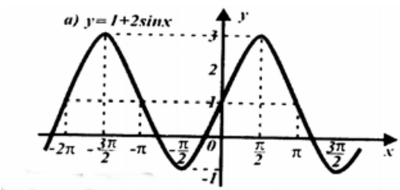
$x = \pi + 4n\pi$ - нуқтаҳои максимум ва $x = -\pi + 4n\pi$ нуқтаҳои минимум. График дар расми 123 акс ёфтааст.



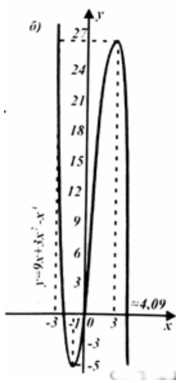
Расми 123

548. а) $\frac{17}{2}$; б) 15; в) $\frac{1}{8}$. **549.** 2,4 км/соат ё 3 км/соат. **550.** $x_1 = 5$, $x_2 = -14$; б) $x_1 = -5$, $x_2 = 4\frac{1}{3}$. **553.** $y = 3x - 1$. **554.** а) $y_{\min} = y(-1) = -2$, $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{калонт} = y(-2) = 3$, $y_{хурдт} = y(3) = 3$; б) $y_{\max} = y(-2) = 2$, $y_{\min} = y(1) = -2$, $y_{калонт} = y(3) = 3$, $y_{хурдт} = y(-4) = -1$. **555.** $y_{хурдт} = 1{,}3125$; $y_{калонт} = 2$; б) $y_{хурдт} = -256$; $y_{калонт} = 0$; в) $y_{калонт} = 12$, $y_{хурдт} = 0$; г) $y_{хурдт} = -\frac{1}{2}$, $y_{калонт} = 0$. **556.** а) $y_{хурдт} = y(2) = 8$, $y_{калонт} = y(-1) = -2$. **557.** 8 ва 8. **558.** 1. **559.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **560.** $-\frac{1}{2}$. **561.** 1сон; 1м/сон; **562.** 40 м ва 40 м (яъне майдончаи назди ҳавлигӣ дар сурати шакли квадрат доштанаш ба масоҳати калонтарин доро аст). **563.** $\frac{18}{\pi + 4}$; **Ниошондод:** расмро кашида аз рӯи он барои масоҳат функсияи $S(x) = 9x - \frac{\pi + 4}{8}x^2$ - ро тартиб дода аз рӯи дастури пешниҳодшуда доир ба ёфтани қимати калонтарин тадқиқ кардан зарур аст. **564.** $\sqrt{2}R$ ва $\sqrt{2}R$; $S_{калонт} = 2R^2$. **565.** а) $-2\frac{2}{3}$; б) 1,5; в) $x_1 = 0$, $x_2 = 5$; г) $\frac{1}{3}$. **566.** $\frac{3}{5}$. **567.** ҳа. **568.** 48 км/соат. **569.** $x_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$, $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{3}$. **570.** 1. **572.** а) $x \in (-\infty; 2] \cup [4; 6]$; б)

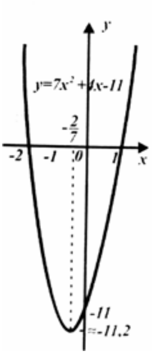
$x \in (0;0,3)$; в) $x \in [2;5]$; г) $x \in \left(-\infty;-\frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{5}{2};+\infty\right)$; д) $x \in (-\infty;-1) \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; е) $x \in (0,1;0,4)$; ж) $x \in (-0,6;0)$; з) $x \in \left[\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right]$. **573.** а) $x \in (-\infty;-5) \cup (-3;1) \cup (5;+\infty)$; б) $x \in (-1;1) \cup (3;13)$; в) $x \in (-\infty;-5) \cup [-4;-1] \cup [10;+\infty)$; г) $x \in (-\infty;-11] \cup (-2;1)$; д) $x \in \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \cup (1;+\infty)$. **574.** а) $x \in (-\infty;+\infty)$; б) $x \in (-\infty;+\infty)$; в) $x \in \left(-\frac{2}{3};11\right)$; г) $x \in [-7;4,5]$; д) $x \in \left(-\infty;-\frac{8}{3}\right) \cup (1;+\infty)$. **575.** а) $x \in (-\infty;-9) \cup (0;2) \cup (9;+\infty)$; б) $x \in (-3;-1) \cup (-1;1]$; в) $x \in (1;3) \cup (5;+\infty)$; г) $x \in (1;4) \cup (4;6)$. **576.** а) $x \in (-1;1]$; б) $x \in (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$; в) $x = 3,5 < x < +\infty$; г) $x \in \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \cup (1;+\infty)$. **577.** а) $a = 3$, $a \in (-\infty;-5) \cup (5;+\infty)$; б) $a \in (0;2)$; в) $a \in (0;2)$; г) $a \in (-5;0) \cup (0;4)$. **578.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 3. **579.** $\vartheta(2) = 3$ м/сон, $a(2)$=4м/сон^2. **580.** 9π см/сон. **581.** 242кг·м/сон. **582.** $v\left(\frac{\pi}{4\omega}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega$, $a\left(\frac{\pi}{4\omega}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega^2$. **583.** а) дар тамоми нуқтаҳои соҳаи муайяни, яъне дар $(-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$ афзуншаванда аст; б) дар $(-\infty;0) \cup (0;81)$ кам шуда дар $(81;+\infty)$ меафзояд; в) дар $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ афзуда, дар $(2;0) \cup (0;2)$ кам мешавад; г) дар фосилаҳои $(-\infty;0)$ ва $(1;+\infty)$ афзуда дар фосилаи $(0;1)$ кам мешавад; д) дар $(-\infty;0)$ афзуда, дар $(0;+\infty)$ кам мекшавад; е) дар $(-\infty;+\infty)$ меафзояд; ж) дар $\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n, \frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n\right)$ афзуншаванда ва дар $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n, \frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n\right)$ камшаванда аст $(n \in Z)$; з) барои ҳамаи x- -ҳои $x>1$ афзуншаванда ба барои $x<0$ ва $0<x<1$ камшаванда аст; и) дар $-\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}<x<\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}, n \in Z$ меафзояд. **585.** а) $x_{1,2}=\pm 1;$ $x_{3,4}=\pm\sqrt{3},$ $x_5=0;$ б) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2},$ $x_3=0.$ **586.** а) $x_{1,2}=\pm 4;$ б) $x_1=2,$ $x_2=3.$ **587.** а) $y_{\max}=(-5)=\frac{313}{3},$ $y_{\min}=y(5)=-\frac{187}{3};$ б) $y_{\min}=y(1)=-3;$ в) $y_{\min}=y(3)=27;$ г) $y_{\max}=(2)=4;$ д) $y_{\min}=y\left(\frac{1}{10}\right)=-\frac{1}{8};$ е) $y_{\max}=(-3)=2.$ **589.** а) $y_{\min}=y(1)=18;$ б) $y_{\max}=(-1)=14;$ в) $y_{\min}=y\left(\frac{1}{7}\right)=12\frac{6}{7}.$ **590.**



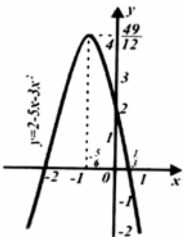
Расми 124



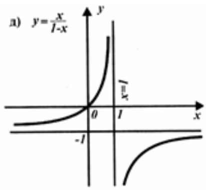
Расми 125



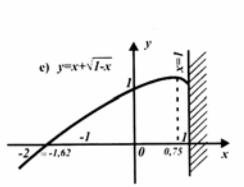
Расми 126



Расми 127



Расми 128



Расми 129

591. а) $y_{хурдт} = y(2) = -32,$ $y_{калонт} = y(0) = 0;$ б) $y_{хурдт} = y(3) = -18,$ $y_{калонт} = y(1) = y(-2) = 2;$ в) $y_{хурдт} = y(-2) = -8,$ $y_{калонт} = y(1) = 10;$ г) $y_{хурдт} = y(2) = -32,$ $y_{калонт} = y(0) = y(32) = 0.$
592. 4м х 4м х 2м. **593.** Ҳангоми х=2м будан масоҳати се хонаи дигари бино калонтар мешавад.

БОБИ I

Дарача ва функсияи дарачагӣ. Муодилаҳои ирратсионалӣ

§1. Дарачаи нишондиҳандааш ратсионалӣ……3
§2. Муодилаҳои ирратсионалӣ……14
1. Таъриф ва хосиятҳои дарачаи нишондиҳандааш натуралӣ……3
2. Дарачаи нишондиҳандааш нул ва адади бутуни манфӣ……6
3. Решаи дарачаи n – ум ва хосиятҳои он……8
4. Табдилдиҳии айниятии ифодаҳои дарача ва решадошта……11
5. Дарачаи нишондиҳандааш ирратсионалӣ……14
6. Муодилаҳои ирратсионалӣ……16
7. Системаи муодилаҳои ирратсионалӣ……22
Маълумоти таърихӣ……25
Машқҳои иловагӣ ба боби I……26
Чавобҳо……29

БОБИ 2

Функсияҳои тригонометрӣ

§3. Формулаҳои тригонометрии фарқ, сумма ва натичаҳои онҳо……32
§4. Табдилдиҳии айниятии ифодаҳои тригонометрӣ. ……53
Хосиятҳо ва графики функсияҳои тригонометрӣ сумма ва натичаҳои онҳо……53
8. Косинуси фарқ ва суммаи кунчҳо……32
9. Синуси сумма ва фарқи кунчҳо……35
10. Тангенси сумма ва фарқи кунчҳо……37
11. Формулаҳои кунчҳои дучанда……40
12. Формулаҳои тригонометрии нисфи кунч……44
13. Формулаҳои ба сумма ва фарқ табдил додани ҳосили зарби функсияҳои тригонометрӣ……48
14. Формулаҳои ба ҳосили зарб табдил додани сумма ва фарқи функсияҳои тригонометрӣ……51
15. Формулаҳое, ки функсияҳои тригонометриро ба воситаи тангенси нисфи кунч ифода мекунанд…..53
16. Функсияҳои тригонометрии аргументи ададӣ ва хосиятҳои онҳо……56
17. Экстремуми функсияҳо……61
18. Функсияҳои даврӣ……66
19. Графики функсияи y=sinx……70
20. Графики функсия y=cosx……74
21. Графики функсияи y=tgx……77
Маълумоти таърихӣ……80
Машқҳои иловагӣ ба боби 2……81
Чавобҳо:……83

БОБИ III

Муодилаҳои тригонометрӣ

§5. Арксинус, арккосинус, арктангенс ва арккотангенси адад……88
§6. Ҳалли муодилаҳои тригонометрӣ ва системаи муодилаҳо……100
§7. Ҳалли нобаробариҳои тригонометрӣ……131
22. Арксинус, арккосинус, арктангенс ва арккотангенси адад……88
22.1. Арксинус……88
22.2. Арккосинус……91
22.3. Арктангенс……94
22.4. Арккотангенс……97
22.5. Алоқаи байни функсияҳои роста ва чаппаи тригонометрӣ……99
23. Муодилаи sinx=α……105
24. Муодилаи cosx=α……108
25. Муодилаи tgx=a……111
25. Муодилаҳои тригонометрии аргументашон якхела……114
27. Усули ба як функсия овардан……116
28. Усули ба зарбкунандаҳо чудо кардан дар ҳалли муодилаҳои тригонометрӣ……119
29. Муодилаи тригонометрии якчинса……121
30. Дар бораи гузориши универсалӣ……124
31. Ҳалли системаи муодилаҳои тригонометрӣ……127
32.Ҳалли нобаробариҳои оддитарини тригонометрӣ……131
32.1. Ҳалли нобаробариҳои намуди sinx>a, sinx<a, ва cosx>a, cosx<a……131
32.2. Ҳалли нобаробариҳои намуди tgx>a, tgx<a ……135
Маълумотҳои таърихӣ……138
Машқҳои иловагӣ ба боби III……139
Чавобҳо……141

БОБИ IV
Ҳосила

§8. Мафҳуми лимит ва бефосилагии функсия……147
§9. Мафҳуми ҳосила ……162
§10. Қоидаҳои асосии дифференсиронӣ……170
§11. Ҳосилаи функсияи дараҷагӣ ва мураккаб……180
§12. Ҳосилаи функсияҳои тригонометрӣ. Ҷадвали ҳосилаи функсияҳо……191
§13. Мафҳуми ҳосилаи тартиби олӣ……199
33. Афзоиши аргумент ва функсия……147
33.1. Мафҳуми атрофии нуқта……147
33.2. Мафҳуми афзоиши аргумент ва афзоиши функсия……147
33.3. Маънои геометрӣ ва механикии нисбати Δу бар Δх……150
34. Мафҳуми лимит ва бефосилагии функсия……154
35. Суръати лаҳзагии ҳаракат……162
36-37. Таърифи ҳосила……164
38. Ҳосилаи сумма, зарб ва тақсими ду функсия. ……170
39. Ҳосилаи функсияи дараҷагӣ. ……180
40. Дифференсиронидашавандагии функсияҳои ратсионалӣ ва касрӣ–ратсионалӣ……182
41. Мафҳуми функсияи мураккаб ва ҳосилаи он……183
41.1. Функсияи мураккаб. ……183
41.2. Ҳосилаи функсияи мураккаб……185
42. Ҳосилаи функсияи y=sinx……191
43. Ҳосилаи функсияи cosx, tgx ва ctgx……192
44. Ҷадвали ҳосилаи функсияҳо. ……195
Машқҳои иловагӣ ба боби IV……203
Ҷавобҳо……211

БОБИ V
Баъзе тадбиқҳои бефосилагӣ ва ҳосила

§14. Тадбиқи бефосилагӣ дар ҳалли нобаробариҳо……225
§15. Баъзе тадбиқҳои ҳосила……230
45. Ҳосила дар физика ва техника……230
46. Аломатҳои афзуншавӣ ва камшавии функсия……234
47. Нуқтаҳои критикӣ ва экстремуми функсия……240
48. Сохтани графики функсия……251
49. Ёфтани қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсия……259
Маълумоти таърихӣ……267
Машқҳои иловагӣ ба боби V……271
Ҷавобҳо……274

Пиров Раҳмон, Усмонов Нурулло

АЛГЕБРА

Китоби дарсӣ барои синфи 10-уми
муассисаҳои таҳсилоти умумӣ

Муҳаррир:
Муҳаррири техникӣ: Қ. Саъдуллоев
Тарроҳ: Қ. Назаров

Ба матбаа 00.00.2016 супорида шуд. Ба чопаш 00.00.2016 иҷозат дода шуд. Андозаи 60х90 1/16. Коғази офсет. Чопи офсет. Ҷузъи чопӣ 18,0. Адади нашр 0000000. Супориши №0. 2016